«دانش مدیریت»

سال دوازدهم - شماره ۴۶ - پائیز ۱۳۷۸

ص ص ۳۴ - ۲۳

روش‌های برنامه‌ریزی آرمانی فازی

دکتر عزیزا... معماریانی [۱]

چکیده مقاله

برنامه‌ریزی آرمانی [۲] در سیستم‌هایی که چندین هدف، و اغلب متضاد با هم مورد نظر است، بکار می‌رود. هدف‌های نادقیق، استفاده از برنامه‌ریزی فازی را ایجاب می‌کند. برنامه‌ریزی آرمانی فازی، موضوع مجموعهٔ تحقیقاتی است که از اوایل دهه ۱۹۸۰ شروع شده و روش‌های متعددی پیشنهاد گردیده است. ارزیابی ساختار ارجحیت اهداف و تابع عضویت آرمان‌های فازی دو ویژگی بارز FGP هستند که این روش‌ها را از هم متمایز می‌نمایند. این مقاله به بررسی این روش‌ها می‌پردازد.

واژه‌های کلیدی

برنامه‌ریزی - تصمیم‌گیری - برنامه‌ریزی آرمانی فازی - روش ناراسیمهان - روش حنان - روش تیواری - روش نُرم اقلیدسی.

مقدمه

برنامه‌ریزی آرمانی یکی از روش‌های تصمیم‌گیری با معیارهای چندگانه [۳] است که در دو

۱- عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت مدرس

2- Goal Programming (GP)

دهۀ گذشته بیشترین کاربرد را در زمینه‌های گوناگون علم مدیریت داشته است. (نگاه کنید به رومرو [۸]، زاناکیس و گپتا [۱۰]، معماریانی و شارما [۶])

از نظر ریاضی، GP را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: (ایگنیزیو [۳])

$$\text{Minimize} \quad \bar{a} = \{p_1(\bar{n}, \bar{p}), (p_2(\bar{n}, \bar{p}), \ldots, p_k(\bar{n}, \bar{p})\} \qquad (۱)$$

Subject to:

$$f_i(x) + n_i - p_i = b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\bar{x}, \ \bar{n}, \ \bar{p} \geq \bar{o}$$

که در آن: $\bar{a}$ تابع دستیابی،

$\bar{p}, \ \bar{n}$ متغیرهای انحرافی منفی و مثبت،

$p_k(\bar{n}, \bar{p})$ تابعی از متغیرهای منفی و مثبت در اولویت K،

$f_i(x)$ تابعی از متغیرهای تصمیم در هدف i،

b_i میزان آرمان در هدف i

k تعداد اولویت‌ها در مدل است.

تابع هدف در GP، مینیمم کردن متغیرهای انحرافی به سمت دستیابی به اهداف (آرمان‌ها) است. برای اهداف از نوع سود، متغیر انحرافی منفی و برای اهداف از نوع هزینه، متغیر انحرافی مثبت در تابع هدف مینیمم می‌گردد.

بسیاری از اطلاعاتی که از محیط دریافت می‌کنیم نوعی از نادقیقی را در درون خود دارد. در قالب برنامه‌ریزی فازی، پارامترهای مدل از قبیل ضرایب متغیرهای تصمیم، میزان آرمان، اولویت‌ها و اوزان را می‌توان نادقیق انگاشت. آرمانی را که میزان آن نادقیق بیان شده باشد به یک «آرمان فازی» اطلاق می‌کنیم.

در این مقاله به بررسی روش‌هایی می‌پردازیم که میزان آرمان‌ها فازی بوده و توابع عضویت نیز خطی می‌باشند. بررسی روش‌هایی که تابع عضویت به صورت غیرخطی بیان شده و یا ضرایب متغیرهای تصمیم، فازی هستند را در مقالۀ دیگری مورد بحث قرار خواهیم داد.

برنامه‌ریزی آرمانی فازی (FGP)

از نظر ریاضی، FGP با m آرمان فازی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\begin{aligned}&\text{find } x && (۲)\\&\text{to satisfy } \quad f_i(x) \;\underset{\sim}{\odot}\; b_i && i = 1, \dots, m\\&\qquad x \ge 0\end{aligned}$$

که علامت "~" نشان فازی بودن مقدار آرمان‌ها و علامت "⊙" برای (< ، > و یا =) بکار رفته است؛ برای مثال: $f_1(x) \gtrsim b_1$ را می‌توان به دستیابی تابع $f_1(x)$ به میزان «تا حدودی بیشتر» از b_1 اطلاق کرد. در مسایل برنامه‌ریزی ریاضی فازی، با طراحی توابع عضویت مناسب و انتخاب یک عملگر سازگار برای یکنوا کردن توابع عضویت مسأله را به مدل برنامه‌ریزی ریاضی قطعی تبدیل کرده تا بتوانیم آن را با روش‌های کلاسیک (مانند برنامه‌ریزی خطی) حل کنیم.

گرچه اصطلاح برنامه‌ریزی آرمانی فازی، برای اولین بار توسط ناراسیمهان [۷] مطرح گردید ولی مسأله بردار ماکزیمم فازی[1] که توسط زیمرمن [۱۱] ارائه شده را نیز می‌توان به عنوان یک مدل FGP در نظر گرفت زیرا در این روش نیز قبل از حل مسأله، مقادیر اهداف (آرمان‌ها) از تصمیم‌گیرنده خواسته می‌شود.

روش زیمرمن

در این روش FVMP ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&\text{Find } x && (۳)\\&\text{to satisfy } f_i(x) \gtrsim b_i && i = 1, \dots, m\\&\text{Subject to :}\\&\qquad GX \le g\\&\qquad X \ge 0\end{aligned}$$

که در آن $f_i(x)$ هدف فازی i، b_i میزان هدف i، $GX \leq g$ مجموعهٔ محدودیت‌های سیستم و X بردار n بُعدی متغیرهای تصمیم است. تابع عضویت برای اهداف فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad f_i(x) \geq b_i \\ \dfrac{f_i(x) - L_i}{b_i - L_i} & \text{اگر} \quad L_i \leq L_i(x) \leq b_i \\ 0 & \text{اگر} \quad f_i(x) \leq L_i \end{cases}$$

که L_i حد پایین تحمل برای هدف فازی $f_i(x)$ و $b_i - L_i$ بازهٔ تحمل است.

اگر هدف فازی به صورت $f_i(x) \lesssim b_i$ باشد آنگاه تابع عضویت به شکل زیر خواهد بود:

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad f_i(x) \leq b_i \\ \dfrac{u_i - f_i(x)}{u_i - b_i} & \text{اگر} \quad b_i \leq f_i(x) \leq u_i \\ 0 & \text{اگر} \quad f_i(x) \geq u_i \end{cases}$$

که u_i حد بالای تحمل و $u_i - b_i$ بازهٔ تحمل است.

برای یکنوا کردن توابع عضویت، عملگر اشتراک (مینیمم) استفاده گردیده است. بنابراین تابع هدف را خواهیم داشت:

$$\max_x \quad \min_i (\mu_i)$$

اگر $\lambda = \min_i (\mu_i)$ فرض کنیم، آنگاه مدل قطعی FVMP به شکل زیر خواهد بود:

Max λ

Subject to:

$$\lambda = \leq (f_i(x) - L_i) / (b_i - L_i) \tag{۴}$$

$$GX \leq g$$

$$X \geq 0$$

برای اهداف فازی $f_i(x) \lesssim b_i$، محدودیت زیر را خواهیم داشت:

زیمرین، در همان مقاله ادعا می‌کند که انسان زمانی که گزاره‌های فازی را با "and" ترکیب می‌کند نمی‌تواند از عملگر مینیمم استفاده نماید و بدین لحاظ عملگر ضرب را به صورت زیر پیشنهاد می‌کند:

$$\text{Max} \quad \prod_{i=1}^{m} \frac{f_i(x) - L_i}{b_i - L_i} \tag{۵}$$

Subject to:

$$GX \leq g$$

$$X \geq 0$$

سپس نتیجه می‌گیرد که با استفاده از عملگر مینیمم، حل ماکزیمم به بازهٔ تحمل $(b_i - L_i)$ بستگی دارد و با استفاده از عملگر ضرب، حل ماکزیمم فقط بستگی به مقدار L_i دارد تا زمانی که: $(b_i - L_i) > f_i(x)_{opt} - L_i > 0$

حنان [۱] مؤثر بودن عملگر ضرب را ثابت می‌کند و نتیجه می‌گیرد که این عملگر از نقطه نظر کاراً بودن جالب است. اگر برای مسأله اصلی جواب کاراً وجود داشته باشد، فرمول جدید مستقیماً منتهی به یک جواب مؤثر می‌شود و یا باکاوش جواب‌های بهینهٔ جایگزین به جواب مؤثر منتهی می‌گردد. البته در مدل قطعی با عملگر ضرب، تابع هدف غیرخطی است که با روش‌های کلاسیک مختص بخود قابل حل خواهد بود.

روش ناراسیمهان

ناراسیمهان [۷] تابع عضویت مثلثی را پیشنهاد می‌کند که جواب را با حل ۲^m مسأله برنامه‌ریزی خطی که هر یک شامل ۳^m محدودیت و $n+۱$ متغیر می‌باشند به دست می‌آورد. توابع عضویت شبیه مدل زیمرمن است. مسایل فرعی به صورت زیر می‌باشند:

$$\underset{x}{\text{Max}} \quad \underset{i}{\text{Min}} \quad \frac{f_i(x) - L_i}{b_i - L_i} \tag{۶}$$

Subject to:

و همچنین

$$\underset{x}{\text{Max}} \quad \underset{i}{\text{Min}} \quad \frac{u_i - f_i(x)}{u_i - b_i} \tag{۷}$$

Subject to:

$$b_i \leq f_i(x) \leq u_i$$

سپس تصمیم‌های ماکزیمم برای مسایل فرعی با هم مقایسه شده و مسأله‌ای که بیشترین درجهٔ عضویت را در مجموعهٔ تصمیم داشته باشد به عنوان تصمیم بهینه برای FGP انتخاب می‌شود.

برای حالتی که اهداف از درجهٔ اهمیت یکسانی برخوردار نیستند، ناراسیمهان متغیرهای زبانی را مانند «خیلی مهم»، «نسبتاً مهم» و «مهم» را برای اولویت‌های فازی معرفی می‌کند. برای این اولویت‌ها، تابع عضویتی تعریف می‌گردد به گونه‌ای که مقیاس مشترکی برای درجهٔ عضویت دستیابی اهداف مشخص شود. پس می‌توان $\mu_{w_i}(\mu f_i(x))$ را این تابع عضویت فرض کرد. آنگاه تابع عضویت مجموعه تصمیم $\mu_D(x)$ که در برگیرنده m آرمان فازی با اولویت‌های فازی هستند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\mu_D(x) = \mu_{w_1}(\mu f_1(x)) \wedge \mu_{w_2}(\mu f_2(x)) \wedge \ldots \wedge \mu_{w_m}(\mu f_m(x))$$

و تصمیم ماکزیمم را خواهیم داشت:

$$\underset{x}{\text{Max}} \quad \mu_D(x) = \underset{x}{\text{Max}} \quad \underset{i}{\text{Min}} \quad \mu_{w_i}(\mu f_i(x))$$

روش حنان

به دنبال مقالهٔ ناراسیمهان، حنان [۲] ثابت کرد که مسأله FGP را می‌توان فقط با یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با 2m محدودیت و n + 2m + 1 متغیر حل نمود. او همچنین نشان داد که تابع عضویت ترکیبی ناراسیمهان نمی‌تواند اهمیت هدف‌ها را با اولویت‌های فازی نشان دهد. حنان مدل خود را به صورت زیر پیشنهاد نمود:

$$\text{Max} \quad \lambda$$

$$\frac{f_i(x)}{\Delta i} + n_i - P_i = \frac{b_i}{\Delta i} \qquad (۸)$$

$$\lambda + (n_i, p_i) \leq 1$$

$$\lambda , n_i, p_i, x \geq 0$$

که در آن Δ_i بازهٔ تحمل است. محدودیت $\lambda + (n_i, p_i) \leq 1$ به صورت $\lambda + n_i \leq 1$ نوشته می‌شود زمانی که آرمان i از نوع سود باشد و به صورت $\lambda + p_i \leq 1$ نوشته می‌شود زمانی که آرمان i از نوع هزینه باشد. این محدودیت متضمن این است که مقدار λ در بازهٔ [0,1] باشد و با نزدیک شدن λ به 1 میزان انحراف (n یا p) به طرف دستیابی به آرمانی مینیمم می‌گردد.

برای حالتی که اهداف دارای اهمیت متفاوت هستند حنان مدل زیر را پیشنهاد می‌کند:

$$\text{Min} \quad \sum_i W_i (n_i + p_i) \qquad (۹)$$

Subject to:

$$\frac{f_i(x)}{\Delta i} + n_i - P_i = \frac{b_i}{\Delta i}$$

$$n_i , p_i \geq 0$$

که w_i وزن (فازی) برای آرمان i است که از روش تحلیل فرآیند تسلسلی [۱] به دست می‌آیند.

روش تیواری

برنامه‌ریزی آرمانی فازی با عملگر جمعی توسط تیواری و دیگران [۹] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها مدل دیگری نیز برای اولویت‌های قطعی پیشنهاد نمودند. مدل عملگر جمعی برای مسأله FGP به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{Max} \quad V(\mu) = \sum_i \mu_i \qquad (۱۰)$$

Subject to:

$$\mu_i = (f_i(x) - L_i) / (b_i - L_i)$$

$$GX \leq g$$

$$M_i \leq 1$$

برای حالتی که آرمان‌ها دارای اهمیت یکسان نیستند و اولویت‌ها به صورت ضریب وزنی تعریف می‌شوند مدل (۱۰) به شکل زیر تکامل می‌یابد:

$$\text{Max} \quad V(\mu) = \sum_{i} w_i \, \mu_i \qquad (۱۱)$$

Subject to:

$$\mu_i = (f_i(x) - L_i) / (b_i - L_i)$$

$$GX \leq g$$

$$M_i \leq 1$$

مدل FGP با اولویت‌های ترتیبی قطعی (غیرفازی) با عملگر جمعی ساختار زیر را خواهد داشت:

$$\text{Max} \quad \sum_{s} (\mu_s)_{p_i} \qquad (۱۲)$$

Subject to:

$$\mu_s = (f_s(x) - L_s) / (b_s - L_s)$$

$$GX \leq g$$

$$(\mu)_{pr} = (\mu^*)_{pr} \qquad r = 1, \ldots, i\text{-}1$$

$$\mu_s \leq 1$$

که $(\mu_s)_{p_i}$ تابع عضویت اولویت i سطح i و $(\mu^*)_{pr}$ مقدار عضویت دست‌یافته در اولویت سطح r $(r < i)$ است.

این روش انعطاف‌پذیری بیشتری در رابطه با در نظرگرفتن اولویت‌ها چه به صورت قطعی و ترتیبی و چه به صورت وزنی را دارد. اما تابع عضویت میزان دستیابی هدف کلی را در بازهٔ [0 , 1] نشان نمی‌دهد.

روش نُرم اقلیدسی

نرمال کردن آرمان‌هایی که به یک اولویت تخصیص می‌یابند و دیمانسیون متفاوتی دارند

موضوع مهمی است که در قالب GP بحث زیادی در بارهٔ آن شده است.

روش‌هایی که تا حال برای FGP مورد بحث قرار گرفت مقدار تحمل (Δ_i) را برای نرمال کردن آرمان‌ها مورد استفاده قرار می‌دهند. در این صورت نمی‌توان بین مقادیر عددی متغیرهای انحراف، دستیابی به اهداف و فاصلهٔ هندسی آنها ارتباطی قائل شد.

FGP با نرم اقلیدسی در مقالهٔ معماریانی و نوال کیشور [۵] مطرح می‌شود. در مدل قطعی GP نرمال کردن آرمان‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} (n'_i + p'_i) \tag{۱۳}$$

Subject to:

$$\frac{f_i(x)}{\| C_i \|} + n'_i + p'_i = \frac{b_i}{\| C_i \|} \qquad i = 1, \dots, m$$

$$n'_i, p'_i, X \geq 0$$

اگر a_{ij}، $(j = 1, \dots, n)$ ضرایب متغیرهای تصمیم در آرمان i باشد، آنگاه

$$\| C_i \| = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

واضح است که بین متغیرهای انحراف (n'_i, p'_i) و متغیرهای انحراف مدل اصلی GP رابطهٔ زیر برقرار است:

$$n'_i = \frac{n_i}{\| C_i \|}, \quad p'_i = \frac{p_i}{\| C_i \|} \qquad i = 1, \dots, m$$

پس مدل (۱۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\| C_i \|} (n_i + p_i) \tag{۱۴}$$

Subject to:

$$f_i(x) + n_i - p_i = b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$n_i, p_i, X \geq 0$$

مدل (۱۴) را پایه‌ای برای تعمیم نرم اقلیدسی در FGP قرار می‌گیرد. اگر Δ_i مقدار تحمل

برای آرمان i تعریف شود، آنگاه مدل (۱۴) را برای برنامه‌ریزی آرمانی فازی به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{|b_i - \Delta_i|}{\|C_i\|}(n_i + p_i) \tag{۱۵}$$

Subject to:

$$f_i(x) + n_i - p_i = b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$n_i, p_i, X \geq 0$$

در این مدل علاوه بر نرمال شدن آرمان‌ها با استفاده از نرم اقلیدسی که از نظر تئوریک قویتر است انجام شده، نیز مقدار عددی آرمان نیز نقشی در اهمیت آن آرمان دارد. هر چه مقدار b_i بیشتر باشد اهمیت آرمان i زیادتر می‌گردد. همچنین میزان Δ_i نیز با اهمیت آرمان i رابطه عکس دارد. هر قدر میزان Δ_i بیشتر باشد از اهمیت آرمان i کاسته می‌شود. علامت قدر مطلق برای تضمین مثبت بودن وزن آرمان‌ها می‌باشد. وزن آرمان‌ها در مدل (۱۵) زمانی واقعی است که مقدار b_i ها با هم مساوی باشد اما چنین چیزی در عمل غیر ممکن است. برای رفع این مشکل می‌توان اهمیت آرمان‌ها را به درصد نوشت. در این صورت مدل (۱۵) به صورت زیر بهبود می‌یابد:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{100 \times \dfrac{|b_i - \Delta_i|}{b_i}}{\|C_i\|}(n_i + p_i) \tag{۱۶}$$

Subject to:

$$f_i(x) + n_i - p_i = b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$n_i, p_i, X \geq 0$$

نتیجه گیری

غالب مسایلی که در جهان واقع، تحلیل‌گران سیستم با آن روبرو هستند ماهیت فازی دارند. اینگونه مسایل را می‌توان با استفاده از نظریه فازی حل نمود. در برنامه‌ریزی ریاضی

پارامترهای ضرایب، مقادیر سمت راست و ... را می‌توان به صورت اعداد و یا اهداف فازی در نظر گرفت که مسأله در قالب برنامه‌ریزی ریاضی فازی قابل حل خواهد بود. برای حل اینگونه مسایل، ابتدا باید با تعریف کردن توابع عضویت برای پارامترهای فازی آنها را به حالت قطعی تبدیل کرد تا سپس بتوان با الگوریتم‌های کلاسیک مسأله را حل نمود. جواب و یا مجموعهٔ جواب مسایل برنامه‌ریزی ریاضی فازی بدینگونه همیشه قطعی خواهد بود. در این مقاله به بررسی روش‌های برنامه‌ریزی آرمانی فازی که فقط آرمان‌ها فازی هستند پرداخته شده است. جدول شماره ۱ خصوصیات این روش‌ها را زمانی که به مدل قطعی تبدیل شده‌اند نشان می‌دهد. اگر مسأله دارای m آرمان و n متغیر تصمیم باشد روش زیمرمن در حالت تبدیل شدهٔ قطعی کمترین متغیر و محدودیت را دارد. مطالعات بیشتری می‌توان بر روی کارآ بودن این الگوریتم‌ها انجام داد. (نمونه‌ای از این مطالعه را می‌توان در نائبی [۱۲] دید).

جدول شماره ۱ - مشخصات مدل تبدیل شده قطعی

روش	تعداد محدودیت	تعداد متغیر
زیمرمن	m	n+1
حنان	2m	n+2m+1
تیواری	2m	n+m
معماریانی	m	n+2m

منابع و مآخذ

1- Hannan, E. L., (1979), On the Officiency of the Product Operator in Fuzzy Programming with Multiple Objectives. **Fuzzy Sets & Systems**, 2, pp. 259-262.

2- Hannan, E. L., (1981), On Fuzzy Goal Programming, **Decision Sciences**, 12, pp. 522-531.

3- Igmizio, J. P., (1976), **Goal Programming and Extensions**, Lexington Books, 4- Memariani, A. and Newal Kishore., (1991), **Fuzzy Goal Programming: Rotrospects and prospects**, procedings of 24th annual convention of the Operational Research Society of India, Bangalore.

5- Memariani, A. and Newal Kishore., (1994) Outline of a new Formulation for Fuzzy Goal Programming, **Progress in Mathematics**, (in Pross).

6- Memariani, A. and J. K. Sharma., (1989), Goal Programming: A Classiticatory Review for Researchers Presented at the International Conference on MCDM, Asian Instihile of Tecknology, Bangkok, Thailand.

7- Marasinlan, R., (1980), Goal Programming in Fuzzy Enilironment, **Decision Sciences,** 11, 325- 336.

8- Romero, C., (1986), A Survey of Generalized Goal Programming, **European Jounral of Operational Research**, 25, 183-191.

9- Tiwari, R. N., S. Dharmar and J. K. Rao., (1987), Fuzzy Goal Programming An Addituie Model. **Fuzzy Sets and Systems**, 24, 27-34.

10- Zarakis, S. H. and S. K. Gupla., (1985), A Cotegorized Bibliographic Survey of Goal Programming. **Omega**, 13(3), 211-222.

11- Zimmermann, H. J., (1978), Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions. **Fuzzy Sets and Systems**, 1(1), 45-55.

۱۲- نائبی، حمیدرضا (۱۳۷۲)، **«مقایسهٔ روش‌های برنامه‌ریزی آرمانی فازی»**، سمینار کارشناسی ارشد، بخش مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس.