روشی جدید برای تخمین میانگین و واریانس زمان فعالیت در شبکه پرت

مسعود ربانی
دانشیار گروه مهندسی صنایع – پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران
رضا توکلی مقدم
دانشیار گروه مهندسی صنایع – پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران
سعید داودآبادی فراهانی
فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی صنایع – پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران
(تاریخ دریافت۸۲/۷/۱، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۵/۴/۳، تاریخ تصویب ۸۵/۷/۸)

چکیده

پرت روشی برای تخمین زمان مورد نیاز تکمیل یک پروژه است. میانگین و واریانس زمان ختم هر فعالیت بر اساس مفروضات در سطح فعالیت محاسبه می‌گردد و زمان ختم پروژه با میانگین و واریانس محاسبه شده کلیه فعالیت‌ها و بر اساس مفروضات در سطح شبکه محاسبه می‌گردد. این مقاله روشی برای تخمین میانگین و واریانس زمان ختم فعالیت معرفی می‌نماید که هیچ فرضی در مورد پارامترهای توزیع قائل نمی‌شود و با دریافت دو پارامتر از خبره انجام کار تخمینی را برای میانگین و واریانس زمان تکمیل فعالیت ارائه می‌کند. با استفاده از آزمون فرض t دو نمونه‌ای و آزمون آنالیز واریانس روش جدید با روشهای موجود مقایسه گردیده است. با خطای پذیرش غلط ۱٪ (خطای نوع اول)، میانگین خطای مطلق روش جدید از میانگین خطای مطلق کلیه روشهایی که از پارامترهای موضوعی استفاده می‌کنند، کمتر است.

واژه‌های کلیدی: توزیع بتا، پرت، تخمین میانگین و واریانس زمان تکمیل فعالیت، مدیریت پروژه

مقدمه

پس از معرفی روش پرت که یک روش شناخته شده در کنترل پروژه‌ها و تخمین مقادیر پارامترها است، این روش بارها مورد سئوال واقع شده است. این سئوالات بستر تحقیق بیشتر بر روی این روش را فراهم نموده، به نحوی که روش‌های بهبودیافته بسیاری پس از آن ارائه شده، که در بخش مرور ادبیات به طور مفصل بدان پرداخته می‌شود.

روش‌های مذکور در بالا در دو کلاس متفاوت قابل دسته‌بندی می‌باشد(کیفر و وردینی [۱]). کلاس اول را روش‌های موضوعی[1] تشکیل می‌دهند. روش‌های این کلاس دارای دقت پایین‌تری می‌باشند، لکن فهم و درک پارامترهای بکار گرفته شده در آن برای تخمین‌زننده با سهولت بیشتری صورت می‌گیرد. به طور مثال در این روش‌ها از تخمین‌های سه‌گانه بدبینانه، محتمل‌ترین و خوش‌بینانه استفاده می‌شود.

کلاس دوم روش‌های پرت را روش‌هایی تشکیل می‌دهند که از تخمین صدک[2] استفاده می‌نمایند. روش‌های این کلاس دارای دقت زیادی هستند، لکن پارامترهای بکار گرفته شده در آن، دارای مفهوم روشن و مشخص تجربی برای تخمین‌زننده نیست. به طور مثال X_{10}، مقدار زمانی است که یک فعالیت با احتمال ده درصد در آن زمان به پایان می‌رسد.

آنچه که این مقاله در پی آن است، ارائه روشی است که در آن از پارامترهای موضوعی استفاده شود (مزیت کلاس اول) و دقت آن روش با روش‌های کلاس دوم پرت (روش‌های صدک) قابل مقایسه باشد و در صورت امکان از تعداد پارامترهای کمتری برای تخمین استفاده نماید.

مرور ادبیات

روش پرت و اصلاحات بعدی

علی‌رغم آنکه سالها از زمان ایجاد روش پرت PERT [3] می‌گذرد هنوز مقالات بسیاری در این زمینه در تحقیقات علمی روز دنیا مشاهده می‌گردد. آنچه که علاقه محققان را برای کار بر روی این موضوع توجیه می‌نماید، سهولت کاربرد این روش است. اگرچه روش‌های بسیاری در این سالها ایجاد شده که دقت محاسباتی بیشتری نسبت به

روش پرت اصلی دارند، در عمل کمتر از این روش‌ها استفاده می‌گردد. زیرا کاربردی بودن روش ارائه شده از نظر دور مانده است. بنابراین کاربردی بودن یک روش، از اهمیت بسزایی برخوردار است.

روش پرت بر پایه مفروضات زیر، محاسبات خود را بنا نهاده است :

تابع توزیع احتمال زمان ختم فعالیت بتا است.

انحراف استاندارد توزیع یک‌ششم دامنه می‌باشد.

تخمین‌های a، m و b به ترتیب تخمین‌های خوش‌بینانه، محتمل‌ترین و بدبینانه از زمان تکمیل یک فعالیت به طور دقیق توسط تخمین زننده صورت گرفته است.

طراحان این روش [۱] اظهار نمودند که ما این تقریب‌ها را، به دلیل دقت کافی آنها، می‌پذیریم و بر اساس این مفروضات فرمول زیر را برای میانگین زمان ختم فعالیت بر حسب سه تخمین موضوعی a, m, b ارائه نمودند.

$$\mu = \frac{1}{6}(a + 4m + b) \tag{۱}$$

پس از آن مک‌کریمون و ریاوک[۳]با یک بررسی ریاضی بر فرضیه‌های بکار گرفته شده در محاسبات روش پرت، نشان دادند که روش پرت در تخمین میانگین تا ۳۳٪ و انحراف استاندارد تا ۱۷٪ دارای خطای ناشی از محاسبات می‌تواند باشد. این خطاها خطای تخمین میانگین و تخمین انحراف استاندارد زمان تکمیل یک فعالیت است و هنگامی محاسبه میانگین و انحراف استاندارد شبکه فعالیت‌ها، این خطاها می‌تواند خنثی یا تشدید شود.

کلارک [۴]، گرابس [۵] و ساسینی [۶] کمبود یک رابطه محکم ریاضی را برای به دست آوردن رابطه (۱) یکی از نکات مبهم روش پرت مورد بحث قرار دادند.

ساسینی [۶] پس از آنکه فرمول میانگین را بر حسب میانه حل نمود، یک معادله درجه سه بدست آورد. وی عنوان نمود که برای رسیدن به فرمول میانگین روش پرت بایستی مجموع دو پارامتر توزیع بتا را برابر با ۴ در نظر گرفت و هیچ دلیل ریاضی محکم برای این منظور وجود ندارد. به عبارت دیگر روش پرت برای رسیدن به فرمول میانگین، خود را به خانواده توزیع‌های بتا با مجموع پارامترهای ۴ محدود می‌نماید. دو پاسخ بلافاصله توسط لیتلفیلد و راندولف [۷] و گالاگر [۸] ارائه گردید.

لیتلفیلد و راندولف [۷] با استفاده از فرضیه‌های پرت و با فرض اضافی برقراری رابطه خطی بین میانگین و میانه توزیع، با ضریب همبستگی خطی ۰٫۹۹۸ فرمول میانگین پرت را به دست آوردند.

گالاگر [۸] از برابری مجموع پارامترهای توزیع بتا با ۴ که ساسینی آن را بدون دلیل ریاضی محکم می‌دانست، به برابری انحراف استاندارد با یک ششم دامنه توزیع (فرض دوم پرت) رسید و نشان داد که این دو فرض هم ارز یکدیگر می‌باشند و از هر یک می‌توان به دیگری رسید. وی انتخاب این فرض (فرض دوم پرت) را موجب شباهت این خانواده از توزیع بتا به توزیع نرمال مطرح نمود و سالها بعد از آن، کامبروسکی [۹] نیز اعتبار ریاضی برای شباهت تابع توزیع بتا با مجموع پارامترهای ۴ با توزیع نرمال به دست آورد.

اسکولی [۱۰] تاریخچه پرت را یادآوری نمود و دلایلی که فرضیه‌های پرت را توجیه می‌کند را مطرح کرد. گلنکو گینزبرگ [۱۱] با استفاده از فرض جدیدی یک تخمین بدست آورد. وی به جای فرض برابری انحراف استاندارد تابع توزیع با یک ششم دامنه توزیع (فرض دوم پرت)، متوسط آن را روی کلیه مقادیر میانه برابر یک ششم دامنه توزیع قرار داد و فرمول‌های زیر را ارائه نمود:

$$\mu = \frac{1}{13}(2a + 9m + 2b) \tag{۲}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{1268}[22 + 81(\frac{m-a}{b-a}) - 81(\frac{m-a}{b-a})^2] \tag{۳}$$

فارنوم و استنتون [۱۲] از فرض برابری واریانس توزیع بتای α و β با توزیع بتای α-۱ وβ-۱ و برابری میانه اولی با میانگین دومی، فرمولی را برای میانگین در فاصله $0.13 \le m \le 0.87$ ارائه نمودند و به دلیل آنکه فرمول اخیر در دو بازه انتهایی بسیار ضعیف است، دو تخمین دیگر نیز برای فاصله ابتدایی و انتهایی ارائه نمودند.

پریماکانرا [۱۳] در مقاله‌ای اخیرا روش دیگری برای تخمین میانگین معرفی نموده است. وی معتقد است که فرمول وی برای میانگین، بدون هیچ فرضی در مورد پارامترهای تابع توزیع بتا به دست آمده، لیکن وی از فرض دوم روش پرت استفاده نموده و رابطه خود را بدست آورده است و همانطور که گالاگر نشان داد، فرض دوم روش پرت، با $\alpha + \beta = 4$، هم ارز است که فرضی در مورد پارامترهای تابع توزیع است و بر خلاف ادعای وی

می‌باشد. کیفر و وردینی [۱] بین روشهای موجود مقایسه عددی انجام دادند و دقیق‌ترین روش‌ها را تعیین نمودند. آنها با استفاده از ۷۸ زوج عدد برای دو پارامتر توزیع بتا، نمونه‌ای عددی از مقادیر مختلف توزیع بتا را اندازه گرفتند و بر این اساس روش پرت و ۶ روش اصلاح شده پس از آن را با یکدیگر مقایسه نمودند. با توجه به این مقایسه روش پیرسون- توکی [۱۴] و روش سوآنسون- مگیل [۱۵] از دقیق‌ترین روش‌ها می‌باشد.

کلاس یک: تقریبهایی که بر اساس تخمینهای موضوعی صورت گرفته است.

این روش‌ها از تخمین‌های موضوعی استفاده می‌نمایند. روش‌های این کلاس سهولت بیشتری برای کاربرد دارند. کلیه روشهایی که تاکنون مورد بحث قرار گرفت در زمره روش‌های کلاس اول هستند.

کلاس دو: تقریبهایی که بر اساس تخمین سه، پنج و یا هفت صدک از تابع توزیع صورت گرفته است.

روش‌های این کلاس بر اساس صدک‌های تابع توزیع صورت می‌گیرد. روش‌های این کلاس از دقیق‌ترین روش‌ها برای تخمین پرت می‌باشد. لیکن از نظر کاربردی آسان نیست.

لائو و دیگران [۱۶] روش دیگری در زمره روشهای کلاس دوم ارائه نمودند که این روش نیز از دقت کافی برخوردار است، لیکن همانند دیگر روش‌های کلاس دوم از تقریب صدک‌ها استفاده می‌نماید و نیز برای تخمین از پنج صدک یا هفت صدک استفاده می‌شود که در کاربرد استفاده از آن دشوار و هزینه‌بر است.

نکات کاربردی موجود در ادبیات پرت

همانطور که اسکولی[۱۰] نیز متذکر شد، فاکتور مهم در کاربردی بودن یک روش زمان‌بندی فعالیت‌ها، سهولت دریافت اطلاعات آن است. برای این منظور بایستی ارائه اطلاعات برای خبره انجام کار آسان باشد و هزینه‌های اجرایی آن برای هزاران فعالیت، قابل قبول باشد. برای این منظور بایستی از اطلاعاتی استفاده نمود که برای خبره انجام کار دارای معنای تجربی باشد. از طرفی ارائه اطلاعات میانگین و واریانس به سادگی صورت نمی‌پذیرد. زیرا این اطلاعات بایستی توسط کارشناسی ارائه گردد که از توزیع‌های احتمال اطلاع کافی ندارد و تنها تجربه انجام کار را دارد. وقتی در مورد زمان تکمیل فعالیتی در آینده صحبت می‌شود، اولین زمانی که به ذهن می‌رسد، زمانی است که بیشترین احتمال وقوع را دارد و این زمان مد تابع توزیع است. بنابراین پارامتری با سهولت درک می‌شود و قابل تخمین است مد یا محتمل‌ترین زمان تکمیل فعالیت است. (اسکولی [۱۰])

ویلیامز[۱۶] نیز متذکر شده که پارامترهای انتخاب شده برای تخمین‌زننده می‌بایست دارای مفهوم تجربی باشد. میانه یا محتمل‌ترین زمان، این خصوصیت را دارد. وی همچنین دلیل موفقیت روش پرت را در انتخاب «پارامترهای موضوعی» می‌داند.

در تخمین‌های صدک یا کلاس دوم روش پرت، مودر و راجرز [۱۸] و پری [۱۹] پیشنهاد نمودند که به جای صدک صفر و صد از صدکهای پنج و نود و پنج استفاده گردد. آلپرت [۲۰] و سلویچ [۲۱] و داویدسون [۲۲] نشان دادند که ارزیابی صدکها بخصوص در نقاط انتهایی، ساده نیست و ارزیابی صدکهای نزدیک به نقاط انتهایی بسیار دشوارتر از ارزیابی سایر صدکها است.

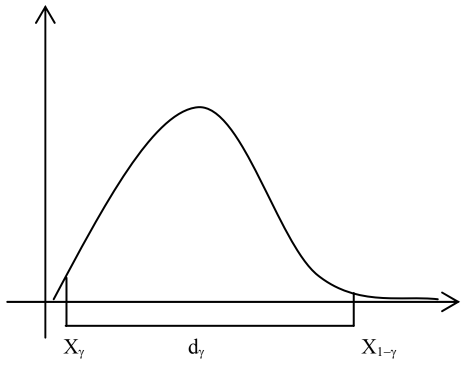
لیتلفیلد و راندولف [۲۳] نشان دادند که موفقیت در کاربرد پرت به فرایند تخمین موضوعی آن مربوط است و به همین دلیل روشهای موجود هر دو کلاس دارای اهمیت بالایی برای استفاده هستند.

روش توسعه یافته

تقریب واریانس

تعریف :پارامتر d_γ را به شرح زیر تعریف می‌نماییم:

پارامتر d_γ به عنوان طول بازه حاوی زمان تکمیل فعالیت با احتمال $(1\text{-}2\gamma)\%$ در نظر گرفته می‌شود. شکل (۱) مقدار d_γ را به نمایش گزارده است.



شکل ۱ : طول بازه حاوی زمان ختم فعالیت با احتمال $(1\text{-}2\gamma)\%$.

وجود رابطه‌ای خطی بین واریانس تابع و مجذور مقدار d_γ را بررسی می‌کنیم:

$$\sigma^2 = a * d_\gamma{}^2$$

(۴)

۱۰۰۰ زوج عدد تصادفی بین ۲ تا ۲۵ ایجاد گردید که این زوج‌ها برای پارامترهای تابع توزیع (α و β) استفاده شدند. به دلیل تقارن تابع، نسبت به پارامترهایش، مقادیر تصادفی به نحوی تولید می‌گردد که $\alpha<\beta$ باشد. رابطه زیر با استفاده از رگرسیون خطی با ضریب ۰٫۹۹۶ و $\gamma = 1\%$ به دست می‌آید. یعنی

$$\sigma^2 = 0.0545 * d_{.01}{}^2$$

(۵)

که می‌توان آن را با تقریب خوبی به شکل زیر نوشت:

$$\sigma^2 = 0.05 * d_{.01}{}^2$$

(۶)

در مرحله بعد برای اینکه نشان داده شود تعداد اعداد تصادفی تولید شده و محدوده در نظر گرفته شده برای پارامترها تاثیری در نتیجه به دست آمده ندارد، ۲۰۰۰ زوج عدد تصادفی بین ۲ تا ۳۵ با همان روش تولید گردید و مبنای محاسبات زیر قرار گرفت:

$$\sigma^2 = 0.0531 * d_{.01}{}^2$$

(۷)

همانطور که مشاهده می‌گردد فرمول به دست آمده (۶) تقریب خوبی برای رابطه (۴) و (۷) می‌باشد.

تقریب میانگین

با فرض $Z=\alpha+\beta$ و با استفاده از (۱۸) داریم:

$\alpha=Z.m$ و $\beta=Z-Z.m$

(۸)

و با استفاده از (۸) و (۱۶) خواهیم داشت:

$$\mu_x = \frac{Z.m+1}{Z+2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(Z.m+1)(Z-Z.m+1)}{(Z+2)^2(Z+3)}$$ یا

(۹)

$$\sigma_x^2 = \frac{1+Z+Z^2.m-Z^2.m^2}{Z^3+7Z^2+16Z+12}$$

(۱۰)

که با تقریب خوبی می‌توان (۱۰) را به شکل ساده‌تر زیر بازنویسی کرد:

$$\sigma_x^2 \cong \frac{Z^2.m - Z^2.m^2}{Z^3}$$ یا $$Z \cong \frac{m(1-m)}{\sigma_x^2}$$

(۱۱)

در نهایت با استفاده از (۱۱) و (۹) :

$$\mu_x = \frac{m^2(1-m)/\sigma_x^2+1}{m(1-m)/\sigma_x^2+2}$$ یا $$\mu_x = \frac{m^2(1-m)+\sigma_x^2}{m(1-m)+2.\sigma_x^2}$$

(۱۲)

بنابراین با محاسبه واریانس از (۶)، میانگین قابل محاسبه می‌باشد.

ارزیابی روش توسعه یافته

در این ارزیابی روش جدید با کلیه روش‌های بکار گرفته شده در مقایسه کیفر و وردینی [۱۱] و روش پریماکانرا [۱۳] که پس از مقایسه کیفر و وردینی ارائه شده است، مقایسه گردیده است که در جدول (۱) فرمولهای آنها ذکر شده است.

برای اثبات دقت روش جدید نسبت به روش‌های دیگر از دو اثبات آماری استفاده گردیده که به این منظور از ۴۰۰۰ زوج عدد تصادفی بین ۲ تا ۵۰ به دلیل آن که در عمل به ندرت مقادیر بالاتر از ۵۰ برای این دو پارامتر اتفاق می‌افتد (لائو و دیگران [۲۴])، تولید گردیده است.

از آنجا که در این ارزیابی از یک نمونه داده برای مقایسه همه روش‌ها استفاده شده، نتیجه تخمین‌های روش‌های مختلف به یکدیگر وابسته است. در این بخش آزمونهایی که با وجود این وابستگی پاسخ‌های نزدیک به واقعیت ارائه می‌کنند، در نظر گرفته شد.

بدین منظور آزمون فرض t دونمونه‌ای و آزمون تحلیل واریانس (رتبه‌بندی فریدمن[۴]) انتخاب شد. لازم به ذکر است که در هر دو آزمون خطای پذیرش غلط ۱٪ (خطای نوع اول) مورد استفاده قرار گرفت.

آزمون t دونمونه‌ای

این آزمون در زمانی که داده‌های آزمون به یکدیگر وابسته است، کاربرد دارد. در این آزمون متغیر آزمون به صورت $e=|\mu-\overline{\mu}|$ در نظر گرفته شده که در آن $\overline{\mu}$ میانگین واقعی و μ میانگین محاسبه شده در روش مورد نظر می‌باشد.

آزمون فرضی برای مقایسه به شرح زیر تعریف گردید:

$$\begin{cases} H_0 : e_9 = e_i \quad ,i=1,\dots,8 \\ H_1 : e_9 \neq e_i \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} H_0 : e_9 - e_i = 0 & ,i = 1,..,8 \\ H_1 : e_9 - e_i \neq 0 \end{cases}$$

که در آن i شماره روش در جدول (۱) می‌باشد.
با توجه به آنکه فرض عدم برابری میانگین خطاهای مطلق در فرض یک قرار داده شده، آزمون به طور سخت‌گیرانه صورت پذیرفته است. (در پیوست ۲ در مورد آزمون سخت‌گیرانه و سهل‌گیرانه توضیح داده شده است)

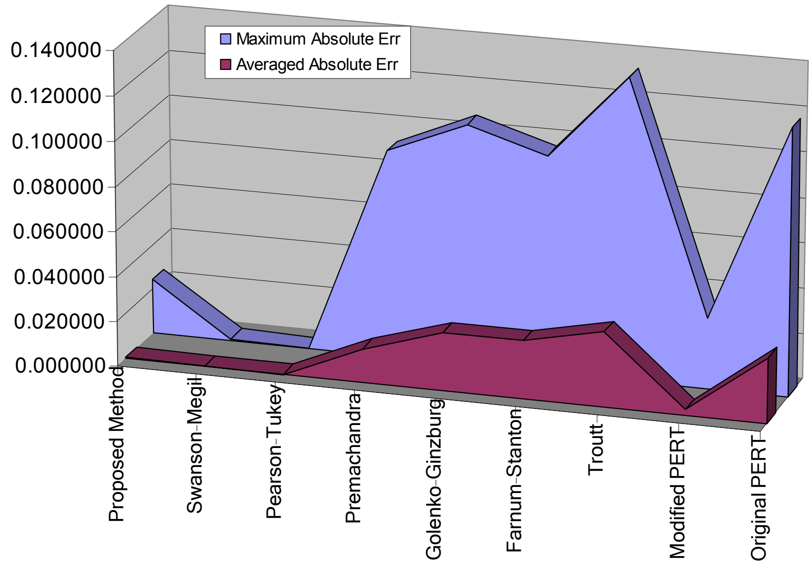
مقدار آماره آزمون (t دونمونه‌ای) برحسب مقادیر نمونه تصادفی و بازه پذیرش فرض H_0 محاسبه گردیده است. جدول (۲) مقدار تفاوت میانگین‌ها و بازه پذیرش آزمون فرض t دونمونه‌ای را، نمایش داده است.

جدول ۱: روش‌هایی که در مقایسه بکار گرفته شده‌اند.

ردیف	نام روش	تخمین میانگین	تخمین واریانس
۱	پرت اصلی	$\mu_x = \frac{(X_{0.0} + 4X_m + X_{1.0})}{6}$	$\sigma_x^2 = \frac{(X_{1.0} - X_{0.0})^2}{6}$
۲	پرت اصلاح شده	$\mu_x = \frac{(X_{.01} + 4X_m + X_{.99})}{6}$	$\sigma_x^2 = \frac{(X_{.99} - X_{.01})^2}{6}$
۳	پیرسون-توکی	$\mu_x = 0.63 .X_{.50} + 0.185 .(X_{.05} + X_{.95})$	$\sigma_x^2 = 0.63(X_{.50} - \hat{\mu})^2 + 0.185[(X_{.05} - \hat{\mu})^2 + (X_{.95} - \hat{\mu})]$
۴	سوانسون-مگیل	$\mu_x = 0.3.X_{.50} + 0.4.(X_{.10} + X_{.90})$	$\sigma_x^2 = 0.3(X_{.50} - \hat{\mu})^2 + 0.4[(X_{.10} - \hat{\mu})^2 + (X_{.90} - \hat{\mu})^2]$
۵	تروت	$\mu_x = \frac{[X_{0.0} + 4.X_{.50} + X_{1.0}]}{6}$	Not applicable
۶	فارنوم-استنتون	$\mu_x = \frac{(36X_m^2 + 1)(1 - X_m)}{(36X_m + 1)(1 - X_m) + X_m}$ $\mu_x = \frac{2}{(2 + 1/X_m)}$ و برای Xm ≤۰,۱۳	$\sigma_x^2 = \frac{(X_{1.0} - X_{0.0})^2}{6}$ $\sigma_x^2 = \frac{X_x^2(1 - X_m)}{(1 + X_m)}$ و برای Xm ≤۰,۱۳
۷	گلنکو گینزبرگ	$\mu_x = \frac{[2X_{0.0} + 9X_m + 2X_{1.0}]}{13}$	$\sigma_x^2 = \frac{(X_{1.0} - X_{0.0})^2}{1268}[22 + 81\frac{(X_m - X_{0.0})}{(X_{1.0} - X_{0.0})} - 81(\frac{(X_m - X_{0.0})}{(X_{1.0} - X_{0.0})})^2]$
۸	پریماکانرا	$\mu_x = \frac{36X_m^2(1 - X_m) + 1}{36X_m(1 - X_m) + 2}$	$\sigma_x^2 = \frac{(X_{1.0} - X_{0.0})^2}{6}$
۹	روش این تحقیق	$\mu_x = \frac{X_m^2(1 - X_m) + \sigma_x^2}{X_m(1 - X_m) + 2.\sigma_x^2}$	$\sigma_x^2 = .06(X_{.99} - X_{0.01})^2$

جدول ۲ : بازه پذیرش و تفاوت میانگین‌های روش‌های مختلف در مقایسه با روش جدید.

ردیف	نام روش مورد مقایسه در مقابل روش جدید	بازه پذیرش برابری میانگین روش جدید و روش مورد مقایسه	میانگین تفاوت میانگین خطای روش مورد مقایسه در مقایسه با روش جدید
۱	روش پرت اصلی	(0.033,0.036)	0.0346
۲	روش پرت اصلاح شده	(0.001,0.001)	0.0008
۳	روش تروت	(0.036,0.039)	0.0373
۴	روش فارنوم-استنتون	(0.029,0.031)	0.0301
۵	روش گلنکو گینزبرگ	(0.030,0.033)	0.0315
۶	روش پریماکانرا	(0.018,0.020)	0.0193
۷	روش پیرسون- توکی	(-0.001,0.000)	-0.0005
۸	روش سوانسون- مگیل	(-0.001,0.000)	-0.0005



شکل ۲ : مقایسه میانگین و بیشترین خطای مطلق روش‌های مختلف موجود پرت.

ارزیابی نتیجه آزمون *t* دونمونه‌ای

با توجه به آنکه در آزمون صورت گرفته مقادیر خطای میانگین روش مورد مقایسه از روش توسعه یافته کسر شده، هرگاه بازه مورد نظر دارای دو سر مختلف‌العلامه باشد حاوی مقدار صفر نیز هست و اگر مقدار صفر (که نشان دهنده برابری دو میانگین خطاست) در بازه پذیرش قرار گیرد، فرض H_0 پذیرفته می‌شود. بعبارت دیگر دو میانگین خطا با یکدیگر برابرند. در غیر اینصورت دو حالت وجود دارد. اگر هر دو سر بازه مثبت باشد روش جدید، میانگین خطای کمتری دارد و در صورت منفی بودن دو سر بازه روش مورد مقایسه دارای میانگین خطای کمتری است.

با توجه به این آزمون با خطای پذیرش غلط (خطای نوع اول ۱٪) با سختگیری می‌توان گفت روش ارائه شده در این تحقیق از کلیه روش‌های هم کلاس خود (کلاس i پرت) میانگین خطای مطلق کمتری را دارا می‌باشد و دقت این روش با دقت روش‌های کلاس دوم پرت نیز قابل مقایسه است. میانگین و بیشترین خطای مطلق هر روش در شکل (۲) نمایش داده شده است.

آزمون رتبه‌بندی تحلیل واریانس

در آزمون تحلیل واریانس مقادیر میانگین خطای مطلق همه روش‌ها به یکباره با یکدیگر مقایسه می‌شود و آزمون بر اساس کلیه داده‌های حاصل از روش‌های مختلف صورت می‌پذیرد. از مزایای این آزمون رتبه‌بندی روش‌ها بر اساس کل داده‌هاست که دقت بیشتر آزمون و نتیجه کسب شده از آن را موجب می‌گردد. روش‌های جدول (۱) با روش رتبه‌بندی فریدمن (آزمون تحلیل واریانس نرم‌افزار SPSS) رتبه‌بندی گردیده است. جدول (۳) خلاصه نتایج این آزمون را ارائه نموده است. ملاحظه می‌گردد که روش مورد نظر در رتبه دوم قرار می‌گیرد.

جدول ۳: رتبه بندی روش‌هاباتحلیل واریانس.

ردیف	نام روش	رتبه‌بندی با استفاده از تحلیل واریانس فریدمن
۱	روش پرت اصلی	۷,۵۵
۲	روش پرت اصلاح شده	۳,۸۲
۳	روش تروت	۸,۸۴
۴	روش فارنوم و استنتون	۷,۴۱
۵	روش گلنکو گینزبرگ	۶,۰۳
۶	روش پریماکانرا	۵,۰۱
۷	روش پیرسون- توکی	۱,۹۴
۸	روش سوانسون- مگیل	۲,۴۰
۹	روش مورد نظر این تحقیق	۱,۹۹

ارزیابی نتیجه آزمون رتبه‌بندی

این نتیجه به معنای آنست که روش مورد نظر در رتبه دوم و حتی بالاتر از روش سوانسون-مگیل قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که این روش رتبه‌بندی بر اساس کلیه داده‌های آزمون صورت می‌گیرد و دارای دقت بیشتری نسبت به سایر روش‌هاست.

نتیجه‌گیری

این مقاله روشی جدید برای محاسبه میانگین و واریانس زمان تکمیل فعالیت در شبکه‌های پرت ارائه می‌نماید که بر خلاف سایر روشها هیچ فرضی در مورد پارامترهای توزیع بتا قائل نشده است.

افزایش تعداد پارامترها موجب افزایش هزینه بکارگیری روش می‌گردد و پارامترهای موضوعی سهولت کاربردی بیشتری دارند. روش جدید میانگین و واریانس زمان تکمیل فعالیت را با دریافت دو پارامتر موضوعی از خبره انجام کار تخمین می‌زند.

در این مقاله پارامتر جدید d_γ به عنوان طول بازه حاوی زمان تکمیل فعالیت با احتمال ٪$(1-2\gamma)$ معرفی گردیده است. این پارامتر جدید توسط خبره انجام کار پس از درک مفهوم آن تخمین زده می‌شود و بر اساس مقدار این پارامتر و بر اساس محتمل‌ترین زمان، میانگین و واریانس زمان تکمیل فعالیت محاسبه می‌گردد.

در این مقاله از دو آزمون t دو نمونه‌ای و آزمون تحلیل واریانس برای مقایسه روش‌ها استفاده گردیده است.

روش جدید با خطای پذیرش غلط ۱٪ به طور سخت‌گیرانه دارای خطای کمتری نسبت به روش‌های هم کلاس خود یا کلاس اول پرت است و خطای قابل ملاحظه‌ای بین این روش با روشهای کلاس دوم پرت نیست.

مراجع

|1 – Keefer, D. L. and Verdini, W. A. (1993). "Better estimation of PERT activity time parameters." *Mgmt Sci.,* Vol. 39, PP.1086-91.

2 - Malcolm, D. G., Roseboom, J. H., Clark, C. E. and Fazer, W. (1959). "Aplication of a technique for research and development program evaluation." *Opl. Res.,* Vol. 7, PP.646-9.

3 - MacCrimmon, K. R. and Ryavec, C. A. (1964). "An analytical study on the PERT assumptions." *Opr. Res.,* Vol. 12, PP.16-37.

4 - Clark, C. E. (1962). "The PERT model for the distribution of an activity time." *Opr. Res.,* Vol. 10, PP.405-406.

5 - Grubbs, F. E. (1962). "Attempts to validate certain PERT statistics or 'picking on PERT.'" *Oprs. Res.*, Vol. 10, PP.912-915.

6 - Sasieni, M. W. (1986). "A note on PERT times." *Mgmt Sci.*, Vol. 32, PP.1652-1653.

7 - Littlefield, T. K. and Randolph, P. H. (1987). "An answer to Sasieni's question On PERT times." *Mgmt Sci.,* Vol. 33, PP.1357-1359.

8 - Gallagher, C. (1987). "A note On PERT times." *Mgmt Sci.*, Vol. 33, PP.1360.

9 - Kamburoski, J. (1997). "New validation of PERT times." *Int. J. Mgmt Sci.,* Vol. 25, No. 3, PP.323- 8.

10 - Sculli, D. (1989). "A historical note on PERT times." *Int. J. of Mgmt Sci.,* Vol. 17, No. 2, PP.195-196.

11 - Golenko-Ginzburg, D. (1988). "On the distribution of activity time in PERT." *Oprs. Res. Soc.*, Vol. 39, No. 8, PP.767-771.

12 - Farnum, N. R. and Stanton L. W. (1987). "Some Results concerning the estimation of Beta Distribution Parameters in PERT." *J. of Opr Res. Soc.,* Vol. 38, PP.287-90.

13 - Premachandra, I. M. (2001). “An approximation of the activity duration distribution in PERT.” *Computers & Operations Research,* Vol. 28, PP.443-452.

14 - Pearson, E. S. and Tukey, J. W. (1965). “Approximate means and standard diviations based on distances between percentage points of frequency.” *Biometrics,* Vol. 52, PP.533-546.

15 - Megill, R. E. (1977). *An Introduction to risk analysis.* Tulsa, Ok, Petroleum publishing company.

16 - Lau, A. H., Lau, H. S. and Zhang, Y. (1996). “A simple and logical alternative for making PERT time estimates.” *IIIE Transactions,* Vol. 28, PP.183-192.

17 - Williams, T. M. (1992). “Practical use of distributions in network analysis.” *J. Oprs Res. Soc.,* Vol. 43, No.3, PP.265-270.

18 - Moder, J. and Rodgers, E. (1968). “Judgment estimates of the moments of PERT type distributions.” *Mgmt Sci.,* Vol. 15, PP.B76-83.

19 - Perry, C. and Grieg, I. D. (1975). “Estimating the mean and variance of subjective distributions in PERT and decision analysis.” *Mgmt Sci.,* Vol. 21, PP.1477-1480.

20 - Alpert, M. and Raiffa, H. (1982). *A progress report on the training of probability assessors. In: Kahneman D., Solvic P, Tversky A, editors. Judgment under Uncertainty: heuristics and biases*. New York :Cambridge University Press, PP.294-305.

21 - Selvidge, J. E. (1980). “Assessing the extremes of probability distributions by the fractile method.” *Decision Sci.*, Vol. 11, PP.493-502.

22 - Davidson, L. and Cooper, D. (1980). “Implementing effective risk analysis at Getty oil company.” *Interfaces,* Vol. 10, PP.62-75.

23 - Littlefield, T. K. and Randolph, P. H. (1991). “PERT duration times.” *Mathematics or MBO. Interfaces,* Vol. 21, PP.92-95.

24 - Lau, H. S. and Somarajan, C. (1995). “A proposal on improved procedures for estimating task-time distributions in PERT.” *Eurp J. of oprs Res ,* Vol. 85, PP.39-52.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Subjective
2 - Percentile
3 - Program Evaluation and Review Technique
4 - Friedman

پیوست ها

پیوست ۱ : خواص تابع توزیع بتا

تابع توزیع احتمال بتا به شکل زیر است:

$$f_y(y)=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}.\frac{(y-a)^{p-1}.(b-y)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}}, \qquad a<y<b, \qquad p,q>0$$

با تغییر متغیرهای زیر، (۴) را به شکل ساده‌تر (۶) تبدیل می‌گردد.

$$x=\frac{(y-a)}{(b-a)} \qquad ,\alpha=p-1, \qquad \beta=q-1$$

$$f_x(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.x^{\alpha}.(1-x)^{\beta}, \qquad 0<x<1, \qquad \alpha,\beta>-1$$

میانگین و واریانس و میانه (۶) از فرمولهای زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mu_x = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)}$$

$$m_x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

پیوست ۲ : شرحی کوتاه بر آزمون‌های آماری سخت‌گیرانه و سهل گیرانه

در آزمون‌های آماری دو فرض وجود دارد که فرض H_0 و H_1 نامیده می‌شوند. فرض H_1 نقیض فرض H_0 در نظر گرفته می‌شود.

در صورتی که در فرض H_0 فرض دلخواه قرار داده شود، آزمون سهل‌گیرانه انجام گرفته و در صورتی که فرض مطلوب و دلخواه در فرض H_1 قرار داده شود، آزمون سخت‌گیرانه صورت گرفته است.

در آزمون سخت‌گیرانه فرض بر آنست که مقدار میانگین روش ارائه شده، خطای بیشتری نسبت به سایر میانگین‌ها دارد. با این نوع فرض در پذیرش بهتر بودن روش ارائه شده، سخت‌گیری شده است. در صورتی که آزمون به صورت سهل‌گیرانه انجام گیرد و فرض این باشد که روش جدید بهتر از روش‌های مورد مقایسه است، در پذیرش بهتر بودن روش ارائه شده در این مقاله سهل‌گیری صورت پذیرفته است.