

# خرد شدن<sup>۱</sup> سازه های هانی کمب<sup>۲</sup> فلزی تحت بارهای شبه استاتیکی

غلامحسین لیاقت

استاد بخش مهندسی مکانیک - دانشکده فنی دانشگاه تربیت مدرس

و گروه صنایع مکانیک - سازمان هوافضا

مجتبی صدیقی

استادیار دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

حمیدرضا داغیانی

دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

علی علوی نیا

استادیار دانشکده مهندسی - دانشگاه بوعلی سینا

و گروه صنایع مکانیک - سازمان هوافضا

(تاریخ دریافت ۸۰/۵/۱۰، تاریخ تصویب ۸۱/۱۱/۱۵)

## چکیده

هانی کمب ها به دلیل برخورداری از ویژگیهای منحصر بفرد در صنایع مختلف کاربرد وسیعی یافته اند. خاصیت جذب انرژی زیاد یکی از این موارد است. در این مقاله با توجه به این جنبه مهم، آلمان زاویه ای<sup>۲</sup> معرفی و مکانیزم های اتلاف انرژی آن در اثر بارگذاری شبه استاتیکی بررسی شده است. با استفاده از اصل بقای انرژی نیروی خرد شدن یک هانی کمب محاسبه شده و ضمن توضیح مدل "ویرزبیک" برای محاسبه استحکام متوسط خرد شدن<sup>۱</sup> و "طول موج چین خوردگی" مدل جدیدی نیز معرفی شده است که در مقایسه با مدل "ویرزبیک"<sup>۴</sup> نتایج بهتری پیش بینی می نماید. بر اساس تحلیل انجام شده هندسه سلول های هانی کمب نقش بسیار مهمی در رفتار مکانیکی سازه دارد بطوریکه با کاهش اندازه سلولها استحکام متوسط خرد شدن افزایش و طول موج چین خوردگی کاهش می یابد. از طرف دیگر افزایش ضخامت دیواره سلولها باعث افزایش هر دو کمیت یاد شده می گردد. با توجه به نتایج حاصل از تئوری این مقاله و همخوانی آن با نتایج تجربی می توان آنرا جایگزین مناسبی برای مدل ویرزبیک دانست.

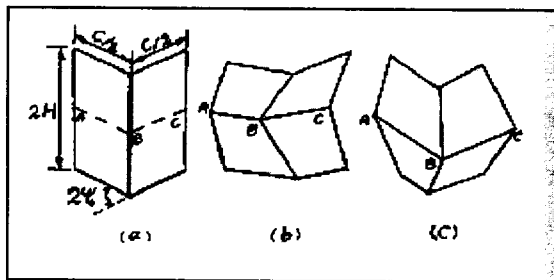
**واژه های کلیدی:** هانی کمب، سازه سلولی، خرد شدن، تا شدن<sup>۵</sup>

## مقدمه

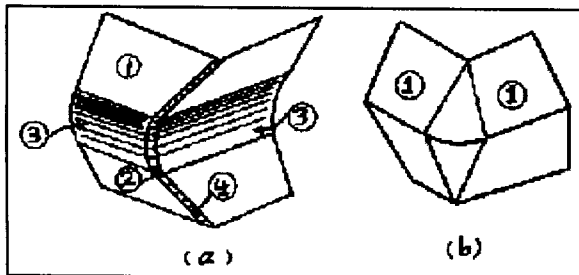
سازه های با سلول ۶ ضلعی تحت اثر بار محوری پیشنهاد نمود. بعدها این مدل توسعه داده شد تا تغییر فرمهای خمشی و انبساطی این سازه ها را نیز در برگیرد [۲]. خواص مکانیکی هانی کمبها در جهات جانبی بطور تحلیلی و تجربی توسط Gibson و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت [۴،۳]. اخیراً بر پایه روش مرجع [۲] تحلیل های مفصل تری در مورد کمانش لوله های با شکلهای سطح مقطع چند ضلعی گزارش شده است که برخی از این نتایج انطباق خوبی با داده های تجربی دارند

هانی کمبها به خاطر ویژگی هائی چون سبکی و قابلیت جذب انرژی زیاد، در مقیاس وسیعی به عنوان جاذب انرژی و ضربه گیر در برابر بارهای خارجی مورد استفاده قرار می گیرند. از طرف دیگر پانل های ساندویچی با هسته هانی کمب در اجزاء هواپیما و بدنه خودروها به منظور افزایش سفتی خمشی<sup>۶</sup> بکار برده می شوند. اولین بررسی قابل توجه در مورد رفتار خرد شدن هانی کمبها توسط Mc Farland صورت گرفت [۱]. او یک مدل نیمه تجربی برای پیش بینی تنش خرد شدن

انبساطی همراه با یک مود انبساطی وجود دارد. مود غیر انبساطی (شکل a-۲) شامل چهار المان دوزنقه‌ای (شماره ۱) که حرکت جسم صلب دارند، یک مقطع تورونیدی (شماره ۲) که دارای تغییر فرم انبساطی در جهت محیطی است، دو مقطع استوانه‌ای با خطوط مفصل متحرک افقی (شماره ۳) و دو مقطع استوانه‌ای با خطوط مفصل مایل (شماره ۴) است که به صورت مخروطی در می‌آیند. شکل (۳) اجزاء مختلف المان زاویه‌ای تغییر شکل یافته را نشان می‌دهد.



شکل ۱- a: المان زاویه‌ای b و c: مودهای تغییر شکل المان زاویه‌ای.



شکل ۲: مکانیزم‌های تا شدن a- غیر انبساطی b- انبساطی.

شکل (a-۱) هندسه اولیه المان فشرده شده را نشان می‌دهد که با پارامترهای  $2H$  ارتفاع المان (که غالباً طول موج کمانش نامیده می‌شود)،  $C$  پهنای المان (فرض می‌شود  $C$  نیز مانند  $H$  ثابت باشد)، و زاویه  $2\psi_0$  مشخص می‌شود. هندسه لحظه‌ای المان نیز با توجه به شکل (۴) با این کمیت‌ها تعریف می‌شود: فاصله خرد شدن (میزان کاهش ارتفاع المان)  $\delta$ ، یا زاویه چرخش صفحات جانبی،  $\alpha$ ، یا جابجایی افقی نقطه  $C$  یعنی  $S$ . رابطه این کمیت‌ها بایکدیگر با توجه به شکل (۴) چنین است:

[۵-۸]. توصیف کاملتری از مکانیزم کمانش برای لوله‌های جدارنازک با مقطع چند ضلعی که تحت اثر بارهای شبه استاتیکی و دینامیکی هستند در مراجع [۱۰، ۹] وجود دارد.

در این مقاله پدیده خرد شدن شبه استاتیکی سازه‌های هانی کمب بطور تحلیلی بررسی شده است. ابتدا با تشریح المان زاویه‌ای و مودهای تغییر شکل آن، با استفاده از روش انرژی نحوه محاسبه نیروی لازم برای خرد شدن آن و نیز نصف طول موج تا شدن این المان بررسی شده است. سپس مدل ویرزیکی؛ برای تحلیل شبه استاتیکی هانی کمبهای با سلول ۶ ضلعی توضیح داده شده و در ادامه مدل جدیدی برای تحلیل هانی کمبها ارائه گردیده است. در انتها ضمن مقایسه با نتایج تجربی کارائی مدل جدید و مزیت آن نسبت به مدل ویرزیکی نشان داده شده است.

## تئوری [۵، ۲]

در این بخش تئوری مربوط به تحلیل سازه‌های هانی کمب بطور مختصر مطرح می‌شود.

### فرض‌ها

الف- سازه مشبک<sup>۷</sup> در ابتدا شامل اجزاء صفحه‌ای مسطح است.  
ب- رفتار سازه به صورت صلب خمیری کامل با تنش سیلان  $\sigma_0$ ، ثابت در نظر گرفته می‌شود.  
ج- طول موج کمانش  $2H$  طی تشکیل چین خوردگی‌ها ثابت است.

### المان زاویه‌ای [۵، ۲]

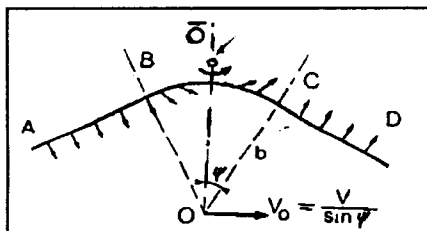
المان پایه در تحلیل مقاطع چند ضلعی المانی است که از دو صفحه تخت که در یک لبه به یکدیگر متصل هستند تشکیل شده است (شکل ۱). طول المان برابر  $C$  و ارتفاع آن برابر  $2H$  (طول موج تا شدن) و زاویه بین دو صفحه المان برابر  $2\psi_0$  است.

وقتی بار فشاری در امتداد قائم به این المان وارد شود المان به یکی از دو صورت شکل (b-۱) یا (c-۱) تغییر شکل می‌دهد. مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که طی خرد شدن تدریجی و پیوسته یک مود تغییر شکل غیر

را تعیین نمود. به این منظور مقطعی از المان تحت فشار را در نظر بگیرید که صفحه افقی آن المان پایه را به دو بخش قرینه تقسیم می نماید (شکل ۵). در هر لحظه شکل این مقطع مرکب از دو قطعه خط مستقیم AB و CD و یک قوس دایره ای BC است که مرکز آن نقطه O و شعاع آن b است. از آنجا که المان دوزنقه ای به صورت جسم صلب می چرخد سرعت نقاط روی خطوط مستقیم یکنواخت بوده و مقدار آن، V، از رابطه (۵) به دست می آید (شکل ۵). قطعه AB به طرف داخل و قطعه CD به طرف بیرون دوران می کند. پس با تعریف مرکز آنی دوران  $\bar{O}$  در محل تقاطع خطوط AB و CD منحنی سرعت کل مقطع قابل رسم است. بویژه سرعت نقطه O برابر است با:

$$V_0 = \frac{V}{\sin \psi_0} \quad (6)$$

محاسبه مؤلفه های تانسور نرخ کرنش عام بر اساس فرضیات ذیل استوار است:  
 الف- تغییرشکلها عموماً بزرگ هستند؛  
 ب- قانون Love-Kirchhoff معتبر است؛  
 ج- از جملات غیر خطی در بسط مؤلفه های تانسور نرخ کرنش روی محور عمود بر صفحه میانی پیوسته صرف نظر می شود.



شکل ۵: میدان سرعت در سیستم مختصات کلی.

در سطح توروئیدی، متغیرهای  $\theta$  و  $\varphi$  در محدوده های ذیل تغییر می کنند:

$$\frac{\pi}{2} - \psi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \psi$$

$$-\beta \leq \varphi \leq \beta \quad (7)$$

به خاطر تقارن فقط دو مؤلفه غیر صفر برای تانسور نرخ کرنش وجود دارند که هر دو در جهت محیطی هستند و

$$\delta = 2H(1 - \cos \alpha) \quad (1)$$

$$s = H(\sin \alpha)$$

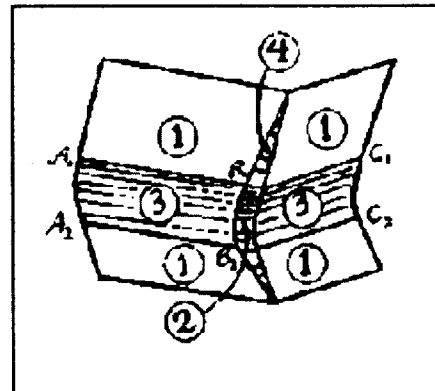
دو زاویه  $\gamma$  و  $\beta$  با این روابط به هم مربوط می شوند:

$$\tan \beta = \frac{\tan \alpha}{\sin \psi_0} \quad \text{و} \quad \tan \gamma = \frac{\tan \psi_0}{\sin \alpha} \quad (3)$$

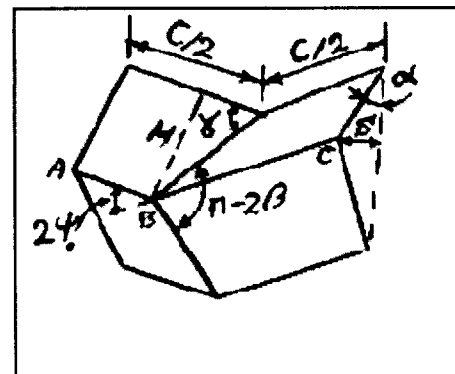
حرکت المان با سرعت نسبی لبه های بالا و پائین توصیف می شود. با مشتق گیری از رابطه های (۱) و (۲) سرعت های قائم و افقی بدست می آیند:

$$\dot{\delta} = (2H \sin \alpha) \dot{\alpha} \quad (4)$$

$$\dot{s} = V = (H \cos \alpha) \dot{\alpha} \quad (5)$$



شکل ۳: اجزاء المان زاویه ای پس از تغییر شکل.



شکل ۴: هندسه المان زاویه ای پس از تغییر شکل.

میدان سرعت و نرخ کرنش [۲]

برای محاسبه انرژی تلف شده در اثر تغییر شکل های پیوسته و نا پیوسته ابتدا باید میدان سرعت در مود تا شدن

$$E_{int} = \int_s (M^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta}) ds + \int_l M_0 \theta dl \quad (10)$$

در این رابطه  $E_{int}$  نرخ اتلاف انرژی داخلی،  $K_{\alpha\beta}$  و  $N^{\alpha\beta}$  بترتیب نرخ تغییرات انحنا و نرخ کرنش،  $M^{\alpha\beta}$  تانسور تنش کوشی و  $M_0$  تانسور کوپل تنش می باشد.  $dl$  المان طول و  $ds$  المان مساحت است. انرژی تلف شده در مکانیزم های مختلف (انبساط تسلیم خمیری در مفاصل افقی و مایل) به این صورت بدست می آیند:

$$E_1 = 4H N_0 I_1(\psi_0) = (16M_0 \frac{b}{h} H) I_1(\psi_0) \quad (11)$$

$$E_2 = \pi M_0 C \quad (12)$$

$$E_3 = (\frac{4M_0 H^2}{b}) I_3(\psi_0) \quad (13)$$

در این روابط  $I_1(\psi_0)$  و  $I_3(\psi_0)$  به صورت ذیل تعریف می شوند:

$$I_1(\psi_0) = \frac{1}{k \tan \psi_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \{ \sin \psi_0 \sin k\beta + \cos \psi_0 [1 - \cos k\beta] \} d\alpha \quad (14)$$

$$I_3(\psi_0) = \frac{1}{\tan \psi_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} d\alpha \quad (15)$$

مقدار انتگرال  $I_1$  بطور عددی محاسبه می شود ولی انتگرال  $I_3$  را که در مرجع [۵] بطور عددی محاسبه شده است می توان به صورت تحلیلی بدست آورد. به این صورت که با استفاده از رابطه (۳) با یکسری عملیات ریاضی میتوان به نتیجه زیر رسید:

$$\sin \gamma = \pm \frac{\tan \psi_0}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \tan^2 \psi_0}} \quad (16)$$

مقدار آنها برابر است با:

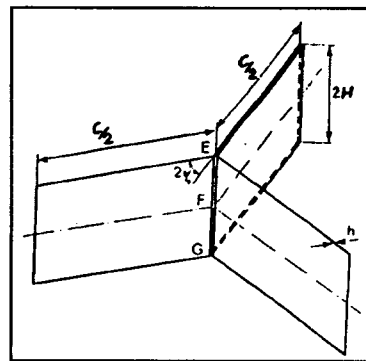
$$\lambda_{\varphi} = \frac{1}{r} \omega b \sin \theta$$

$$K_{\varphi} = \frac{1}{r^2} \omega a \sin \theta \quad (8)$$

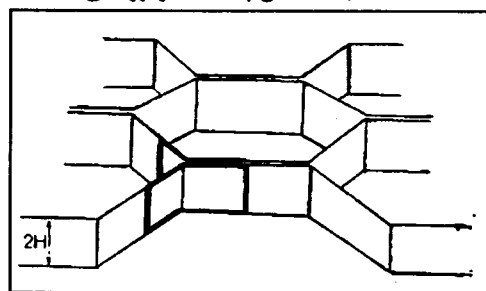
در این رابطه  $a$  و  $b$  بترتیب شعاعهای بزرگ و کوچک توروئید و  $r$  موقعیت لحظه ای نقطه ای روی این سطح است که نسبت به محور تقارن در زاویه  $\theta$  قرار گرفته است و:

$$r = b \cos \theta + a \quad (9)$$

مولفه های تانسور عام تنش، متناظر با نرخ انبساط  $\lambda_{\varphi}$  و نرخ انحنا  $K_{\varphi}$ ، بترتیب نیروی غشائی  $N_{\varphi}$  و لنگر خمشی  $M_{\varphi}$  هستند.



شکل ۶: المان پایه مدل ویرزیبکی.



شکل ۷: سلول ۶ ضلعی متشکل از المانهای پایه ویرزیبکی.

• اتلاف انرژی در المان زاویه ای در حال خرد شدن [۵،۲]

نرخ اتلاف انرژی در فرایند خرد شدن، به صورت زیر به دست می آید:

با جایگذاری این رابطه در (۱۵) و استفاده از تغییر متغیر ذیل:

با جایگذاری این رابطه در (۱۵) و استفاده از تغییر متغیر ذیل:

$$\frac{P}{M_0} = \left\{ A_1 \frac{b}{h} + A_2 \frac{C}{H} + A_3 \frac{H}{b} \right\} \quad (23)$$

$$\sin \alpha = \tan \psi_0 \tan x \Rightarrow \cos \alpha d\alpha = \frac{\tan \psi_0}{\cos^2 x} dx \quad (17)$$

در این رابطه مقادیر  $A_1$  تا  $A_3$  عبارتند از:

نتیجه چنین خواهد شد:

$$\begin{cases} A_1 = 8 I_1 \\ A_2 = \frac{\pi}{2} \\ A_3 = 2 I_3 \end{cases} \quad (24)$$

$$I_3 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\cos^3 x} \quad (18)$$

با استفاده از دو رابطه زیر [۱۲]:

که برای هر  $\psi_0$  به سادگی محاسبه می شوند. مجهولات رابطه (۲۳) یعنی  $P$ ،  $b$  و  $H$  از مینیمایز نمودن این رابطه نسبت به  $b$  و  $H$  بدست می آیند:

$$\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$$

$$b = \sqrt[3]{A_2 A_3 / A_1^2} \cdot \sqrt[3]{Ch^2} \quad (25)$$

$$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \text{Ln} \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) \quad (19)$$

از رابطه (۱۸) می توان  $I_3$  را چنین نوشت:

$$H = \sqrt[3]{A_2^2 / A_1 A_3} \cdot \sqrt[3]{C^2 h} \quad (26)$$

و با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۲۳) مقدار نیروی متوسط خرد شدن محاسبه می شود:

$$I_3 = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \left\{ \text{Ln} \left( \tan \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right\}_{x_1}^{x_2} \quad (20)$$

که حدود انتگرال عبارتند از:

$$\frac{P_m}{M_0} = 3 \sqrt[3]{A_1 A_2 A_3} \cdot \sqrt[3]{C/h} \quad (27)$$

این نتایج نشان می دهند که هر سه مکانیزم عمده اتلاف انرژی مورد بحث، صرفنظر از مقادیر عددی ضرائب  $A_1$  تا  $A_3$  به نسبت یکسانی در اتلاف انرژی مشارکت دارند، یعنی بطور متوسط حدود دو سوم انرژی خمیری در تغییر فرمهای غیرانبساطی در خطوط مفصل ساکن و متحرک و یک سوم دیگر در اثر انبساط سطح توروئیدی تلف می شود.

$$\alpha = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = \tan^{-1}(\cotan \psi_0) \quad (21)$$

در نتیجه با معلوم بودن  $\psi_0$  در هر المان، مقدار  $I_3$  بطور دقیق قابل محاسبه است.

کل انرژی تلف شده در یک المان زاویه ای با تکیه گاه های ساده، برابر مجموع انرژی های  $E_1$  تا  $E_3$  است.

### کاربرد نتایج قبل برای پانل های هانی کتب با

#### سلول های ۶ ضلعی منظم-روش ویرزیکی

ویرزیکی برای تحلیل خرد شدن پانل های هانی کتب از المان پایه ای به صورت شکل (۶) استفاده نمود [۵]. او فرض کرد که یک سازه هانی کتب از اجتماع این المان ها تشکیل شده است (شکل ۷). هر المان پایه

- تعادل انرژی و محاسبه نیروی متوسط خرد شدن [۵] انرژی تلف شده طی تا شدن المان زاویه ای با کار خارجی انجام شده توسط نیروی فشاری  $P$  برابر است:

$$2PH = E_1 + E_2 + E_3 \quad (22)$$

اساس مقادیر انتگرال های  $I_1$  و  $I_3$  از روابط (۲۰ و ۲۱) و برترتیب برابر  $1/0.4$  و  $2/3.9$  بدست می آیند.

مقادیر  $H$ ،  $b$  و  $P_m$  نیز با حداقل نمودن رابطه (۳۱)، از

روابط (۲۵) تا (۲۷) محاسبه می شوند با این تفاوت که به جای  $A_i$  ها از  $B_i$  های رابطه (۳۲) استفاده می شود،

بنابر این:

$$H = .821 \sqrt[3]{hc^2} = .569 \sqrt[3]{hS^2} \quad (33)$$

$$b = .683 \sqrt[3]{h^2c} = .569 \sqrt[3]{h^2S} \quad (34)$$

$$P_m = 8.61 \sigma_0 \sqrt[3]{h^5C} = 7.17 \sigma_0 \sqrt[3]{h^5S} \quad (35)$$

در این روابط  $S$  قطر کوچک سلول (فاصله دو ضلع روبرو در سلول ۶ ضلعی) می باشد.

برای یک سلول هانی کمب که بطور متوسط از چهار المان تشکیل می شود مقدار  $P_m$  برابر است با:

$$P_m = 34.44 \sigma_0 \sqrt[3]{h^5C} = 28.68 \sigma_0 \sqrt[3]{h^5S} \quad (36)$$

### مدل جدید

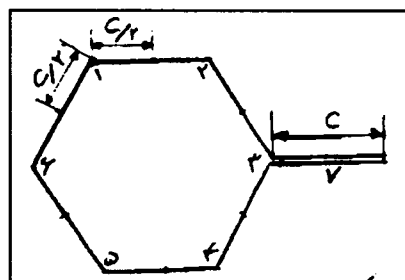
با توجه به نحوه قرارگیری سلولهای هانی کمب در یک پانل ملاحظه می شود که کل پانل را می توان به صورت مجموعه ای از سلول ها مانند شکل (۸) در نظر گرفت که هر سلول ترکیبی از ۶ المان زاویه ای (شکل ۱) و یک المان متفاوت دیگر است (المان موازی) که این المان جدید از دو ورق بهم چسبیده که هر یک دارای پهنای  $C$  و ضخامت  $h$  است، تشکیل می شود (المان شماره ۷ در شکل ۸). بنابراین کل انرژی تلف شده در یک واحد سلولی نمونه (شکل ۸) مساوی ۶ برابر مجموع انرژی اتلافی یک المان زاویه ای و انرژی یک المان موازی است. انرژی المان زاویه ای قبلا محاسبه شده و کافی است که انرژی تلف شده در اثر تغییر شکل المان موازی محاسبه و در رابطه تعادل انرژی واحد سلولی گنجانیده شود.

#### • محاسبه انرژی تلف شده در المان موازی

فرض می شود که این لایه دو جداره که

مورد نظر او از دو المان زاویه ای و هر سلول هانی کمب بطور متوسط از چهار المان پایه شکل (۶) تشکیل می شود. برای یک المان پایه در یک سلول از پانل انرژی تلف شده کل برابر است با:

$$E_{int} = 2 \{E_1 + 2 E_2 + E_3\} \quad (28)$$



شکل ۸: یک واحد سلولی شامل ۶ المان زاویه ای و یک المان موازی.

ضریب ۲ در پشت آکولاد به خاطر این است که المان پایه از ۲ المان زاویه ای تشکیل شده و ضریب ۲ برای  $E_2$  به این دلیل استفاده می شود که در یک سلول از پانل هانی کمب لبه های بالا و پائین المان پایه گیردار محسوب می شوند. برای یک سلول هانی کمب در یک سازه که از  $n$  سلول تشکیل شده است انرژی اتلافی ۴ برابر انرژی اتلافی المان پایه است، یعنی:

$$E_{int} = 8 \{E_1 + 2 E_2 + E_3\} \quad (29)$$

کار خارجی انجام شده طی خرد شدن از رابطه زیر بدست می آید:

$$E_{ext} = P_m \cdot 2 H \quad (30)$$

با استفاده از تعادل انرژی تلف شده با کار خارجی:

$$\frac{P_m}{M_0} = \left\{ B_1 \frac{b}{h} + B_2 \frac{C}{H} + B_3 \frac{H}{b} \right\} \quad (31)$$

که در این روابط کمیت های  $B_i$  عبارتند از:

$$\begin{cases} B_1 = 64 I_1 \\ B_2 = 8 \pi \\ B_3 = 16 I_3 \end{cases} \quad (32)$$

برای سلول ۶ ضلعی منظم،  $\psi_0 = 60^\circ$  است. بر این

• محاسبه انرژی کل واحد سلولی (شکل ۸)

با توجه به شرایط تکیه گاهی گیردار انرژی تلف شده در کل سلول برابر است با:

$$E_{ini} = 6 \{E_1 + 2E_2 + E_3\} + 2E_4 \quad (41)$$

در این رابطه عبارت داخل آکولاد انرژی تلف شده در یک المان زاویه ای و ضریب ۶ بدلیل وجود ۶ المان زاویه ای در یک سلول است. ضریب ۲ در  $E_4$  نیز به خاطر گیر دار بودن تکیه گاه آن است.

• محاسبه نیروی متوسط خرد شدن

با توجه به اصل تعادل انرژی می توان نوشت:

$$P_m \cdot (2H) = 6(E_1 + 2E_2 + E_3) + 2E_4 \quad (42)$$

پس از جایگذاری وساده نمودن جمله ها :

$$\frac{P_m}{M_0} = \left\{ d_1 \frac{b}{h} + d_2 \frac{C}{H} + d_3 \frac{H}{b} \right\} \quad (43)$$

با مینیمایز نمودن رابطه اخیر نسبت به  $H$  و  $b$  برای هانی کتب های با سلول ۶ ضلعی نتایج زیر بدست می آید:

$$b = 0.712 \sqrt[3]{h^2 C} = 0.593 \sqrt[3]{h^2 S} \quad (44)$$

$$H = 0.883 \sqrt[3]{h C^2} = 0.613 \sqrt[3]{h S^2} \quad (45)$$

$$\frac{P_m}{M_0} = 106.7 \sqrt[3]{\frac{C}{h}} = 88.85 \sqrt[3]{\frac{S}{h}} \quad (46)$$

برحسب  $\sigma_0$  ، رابطه اخیر چنین می شود:

$$P_m = 26.67 \sigma_0 \sqrt[3]{h^3 C} = 22.21 \sigma_0 \sqrt[3]{h^3 S} \quad (47)$$

از طرف دیگر در مرجع [۱۳] نشان داده شده است که:

$$\delta_e = 0.7 (2H) \quad (48)$$

با استفاده از این مقدار به جای جابجائی در رابطه کار نیروی خارجی روابط (۴۶) و (۴۷) به این صورت در می آیند:

ضخامت کل آن  $2h$  است بصورت یکپارچه عمل نموده و عرض آن  $C$  و ارتفاع  $2H$  باشد (شکل ۹-a). با توجه به الگوی تغییر شکل المان زاویه ای که قبلا توضیح داده شد این المان نیز در اثر خرد شدن حول دو خط مفصل افقی او  $2$  دوران نموده و به شکل (۹-b) در می آید. مشابه روشی که برای محاسبه انرژی در المان زاویه ای گفته شد می توان نوشت:

$$E_4 = 2 \int_0^C \int_0^{\frac{\pi}{2}} M'_0 d\theta dl \Rightarrow E_4 = M'_0 \pi C \quad (37)$$

ضریب  $2$  در پشت انتگرال بدلیل وجود  $2$  مفصل افقی خمیری به طول  $C$  است و  $M'_0$  لنگر خمیری کامل و برابر است با:

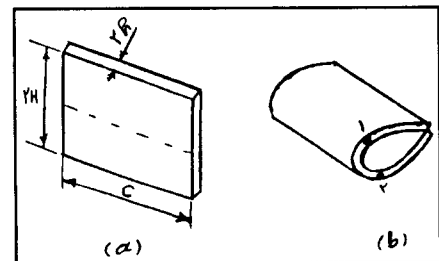
$$M_0 = \sigma_0 \frac{(2h)^2}{4} = \sigma_0 h^2 \quad (38)$$

در نتیجه بر حسب  $M_0$  :

$$M'_0 = 4 M_0 \quad (39)$$

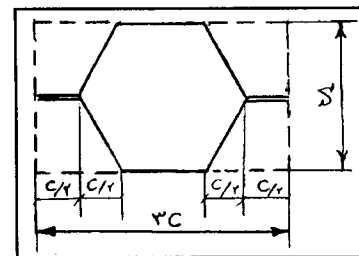
در نتیجه رابطه (۳۷) را میتوان چنین نوشت:

$$E_4 = 4 M_0 \pi C \quad (40)$$



شکل ۹- a: المان موازی قبل از تغییر شکل .

b - المان موازی بعد از تغییر شکل .



شکل ۱۰: سطح کل یک واحد سلولی در هانی کتب .

نشان داده شده است. همچنین در شکل های (۱۱) و (۱۲) و بترتیب نمودارهای ستونی مقایسه استحکام خرد شدن و نصف طول موج تا شدن برای هر دو مدل تحلیلی در مقایسه با نتایج تجربی رسم شده است.

جدول ۱: مشخصات نمونه های آزمایشگاهی هانی کمب [۱۶].

Type No.	D=S	Alloy	$\rho$	h
1	4.763	5052	49.656	35.7
2	4.763	5052	49.656	12.7
3	3.175	5052	72.081	25.4
4	3.175	5052	72.081	14.3
5	3.175	5056	72.081	20.7
6	3.175	5056	72.081	10.0

روابط (۳۶) و (۵۰) نیروی متوسط خرد شدن را برای یک واحد سلولی کامل بترتیب بر اساس مدل ویرزیکی و مدل جدید نشان می دهند. چنانچه تعداد سلولهای تحت بار برابر  $n$  باشد، نیروی کل خرد شدن با توجه به اصل تعادل انرژی در هر یک از این دو مدل چنین بدست می آید:  
مدل ویرزیکی:

$$P_m = 28.68 \sigma_0 n \sqrt[3]{h^5 S} \quad (55)$$

مدل جدید:

$$P_m = 31.73 \sigma_0 n \sqrt[3]{h^5 S} \quad (56)$$

نمودار مقایسه ای نیروی خرد شدن بر حسب تعداد سلول های تحت بار برای یکی از نمونه ها در شکل (۱۳) رسم شده است.

### بررسی نتایج و بحث

روابط استخراج شده نشان می دهند که در هانی کمب ها هندسه سلول نقش مهمی در رفتار مکانیکی سازه دارد بطوریکه با افزایش اندازه سلول ها نیروی لازم برای خرد شدن افزایش می یابد. این رفتار با زیاد شدن بار بحرانی ستونها در اثر کاهش نسبت لاغری<sup>۱</sup> قابل مقایسه است. از طرف دیگر چون با بزرگ شدن اندازه سلولها سطح مقطع ظاهری سلول بزرگ می شود استحکام متوسط خرد شدن که نسبت نیروی خرد شدن بر سطح مقطع ظاهری است کاهش می یابد.

$$\frac{P_m}{M_0} = 152.43 \sqrt[3]{\frac{C}{h}} \quad (49)$$

$$P_m = 38.1 \sigma_0 \sqrt[3]{h^5 C} = 31.73 \sigma_0 \sqrt[3]{h^5 S} \quad (50)$$

### مقایسه نتایج تئوری با داده های تجربی

معمولا در روابط هانی کمب ها به جای ضلع سلول،  $C$ ، از اندازه سلول (قطر کوچک ۶ ضلعی)،  $S$ ، استفاده می شود. رابطه  $C$  و  $S$  چنین است:

$$C = .577S \quad (51)$$

بعلاوه به جای نیروی متوسط خرد شدن از استحکام متوسط خرد شدن استفاده می شود که عبارت از نسبت نیروی متوسط خرد شدن بر سطح کل یک سلول است. سطح کل یک سلول واحد با توجه به شکل (۱۰) (سطح داخل مستطیل خط چین) برابر است با:

$$A = \sqrt{3} S^2 \quad (52)$$

بنابراین استحکام متوسط خرد شدن برای مدل ویرزیکی برابر است با:

$$\bar{\sigma}_m = 16.55 \sigma_0 (h/S)^{\frac{5}{3}} \quad (53)$$

و برای مدل جدید برابر خواهد شد با:

$$\bar{\sigma}_m = 18.31 \sigma_0 (h/S)^{\frac{5}{3}} \quad (54)$$

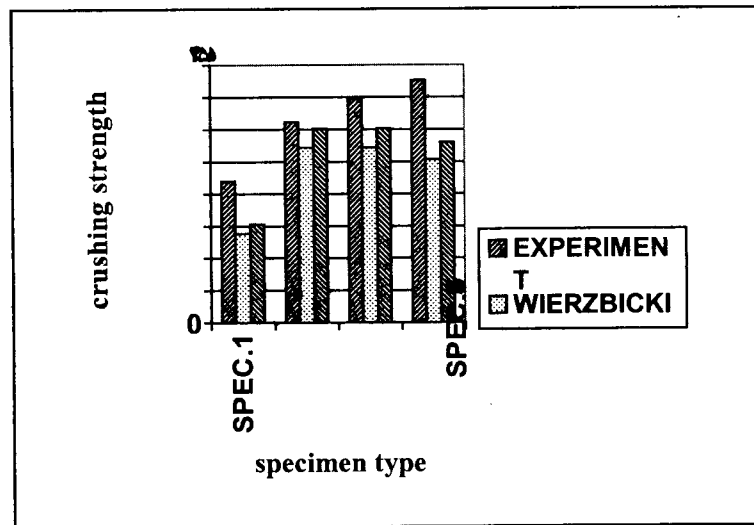
E. Wu و W. Sh.Jiang شش نمونه از هانی کمب های آلومینیومی را تحت بارگذاری شبه استاتیکی قرار داده و استحکام متوسط خرد شدن و طول موج کمناش آنها را اندازه گیری نمودند [۱۴]. مشخصات نمونه ها در جدول (۱) داده شده است. ضخامت همه نمونه ها برابر  $0.254$  میلیمتر و تنش تسلیم فشاری  $\sigma_0$  برای مواد Al 5052 و Al 5056 بترتیب ۲۵۵ و ۳۴۵ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است.

نتایج حاصل از مدل ویرزیکی و مدل جدید برای  $H$  و  $\bar{\sigma}_m$  همراه با نتایج تجربی شبه استاتیکی در جدول (۲)

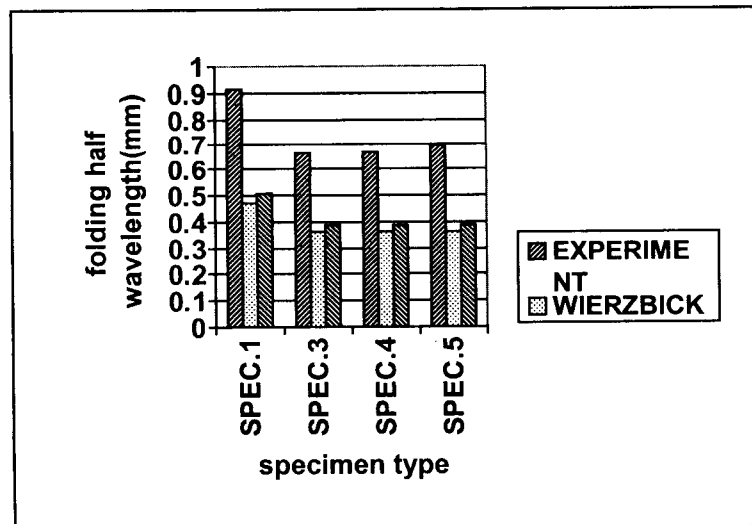


جدول ۲: مقایسه استحکام متوسط خرد شدن و نصف طول موج چین خوردگی بر اساس پیش بینی مدل‌های تحلیلی با نتایج تجربی.

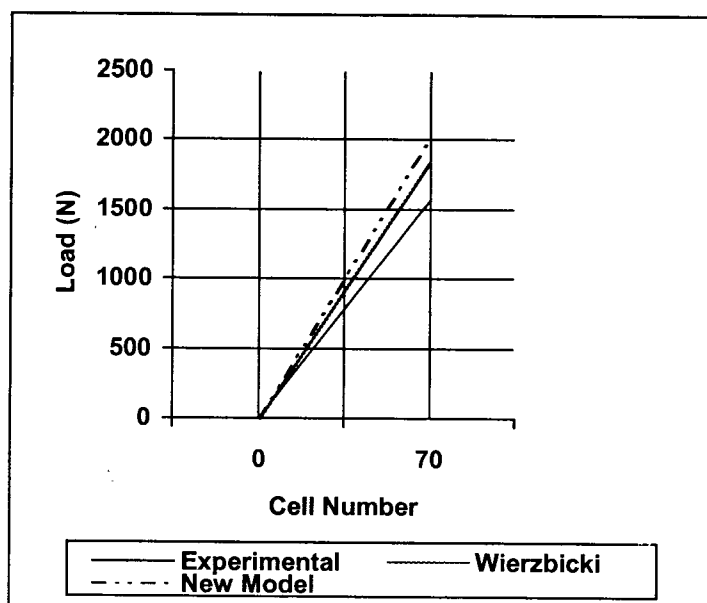
شماره نمونه	s-جنس نمونه	$\bar{\sigma}_m / \rho (10^3 \text{ N} - \text{ mm} / \text{ kg})$			H (mm)		
		تجربی [۱۶]	مدل ویرزبیکي	مدل جدید	تجربی [۱۶]	مدل ویرزبیکي	مدل جدید
1	5052-4.763	22.07	13.83	15.31	.916	.473	.510
3	5052-3.175	31.20	27.20	30.09	.665	.361	.389
4	5052-3.175	34.72	27.20	30.09	.669	.361	.389
5	5056-3.175	37.64	25.35	28.04	.696	.361	.389



شکل ۱۱: مقایسه استحکام خرد شدن برای سه حالت: ۱- تجربی ۲- مدل ویرزبیکي ۳- مدل جدید.



شکل ۱۲: مقایسه نصف طول موج تا شدن برای سه حالت: ۱- تجربی ۲- مدل ویرزبیکي ۳- مدل جدید.



شکل ۱۳: تاثیر تعداد سلولهای تحت بار روی نیروی خرد شدن شبه استاتیکی برای هانی کمب نوع اول و مقایسه حالت های تئوری و تجربی .

به همان نسبت تعداد المانهای پایه که باید تغییر شکل دهند زیاد میشود و در نتیجه انرژی لازم برای تغییر فرم آنها افزایش می یابد، بنابراین نیروی خرد شدن مستقیماً با تعداد سلولهای تحت بار متناسب است [۱۵].

### نتیجه گیری

با توجه به نتایج حاصل از این تحقیق موارد ذیل را می توان به عنوان نتیجه گیری بیان نمود :

الف- مدل جدیدی برای تحلیل هانی کمبهای با سلول ۶ ضلعی ارائه گردید.

ب- مدل جدید این مقاله و مدل ویرزبیکس از نظر نقش کلی عوامل مختلف در مقاومت خرد شدن و طول موج کماتش مشترک هستند ولی نتایج کمی حاصل از مدل جدید در هر دو مورد  $\bar{\sigma}_m$  و  $H$ ، به نتایج تجربی نزدیکتر است.

ج- هندسه سلول و ابعاد آن نقش مهمی در رفتار مکانیکی سازه دارد. افزایش اندازه سلول هم  $H$  و هم  $P_m$  افزایش یافته ولی استحکام متوسط خرد شدن  $\bar{\sigma}_m$ ، کاهش می یابد. اما افزایش ضخامت دیواره های سلول باعث افزایش هر سه کمیت یاد شده می شود. البته این تاثیر در مورد  $P_m$  و  $\bar{\sigma}_m$  شدیدتر است (روابط ۴۵ و ۴۶).

با افزایش مقاومت تسلیم ماده هانی کمب  $\sigma_0$ ، نیروی متوسط خرد شدن و استحکام متوسط خرد شدن افزایش می یابد که بدیهی به نظر میرسد.

با توجه به اشتراک مبانی اولیه مدل جدید و مدل ویرزبیکس طبیعی است که عوامل اصلی موثر در نتایج مشترک باشند ولی چون در مدل جدید میزان جابجائی مؤثر، واقعی تر در نظر گرفته شده (رابطه ۴۸) مقدار نیروی متوسط خرد شدن در مدل جدید نسبت به مدل ویرزبیکس به مقدار تجربی نزدیکتر است.

مقادیر استحکام متوسط خرد شدن در هر دو مدل ارائه شده کمتر از مقدار تجربی است که احتمالاً بدلیل فرض های ساده کننده و یا در نظر نگرفتن مکانیزمهای دیگر اتلاف انرژی می باشد.

بر اساس نتایج تجربی استحکام متوسط خرد شدن برای پانل هانی که ضخامت کمتری دارند بیش از مقدار آن برای پانل های ضخیمتر است [۱۴]. این مسئله را بطور تقریبی میتوان براساس رابطه اولر تفسیر نمود (که بار بحرانی و تنش بحرانی ستونهای کوتاهتر بیشتر است). البته هیچیک از مدلهای تحلیلی اثر ضخامت پانل را در نظر نمی گیرند.

وقتی تعداد سلولهای پانل تحت بار افزایش می یابد

- د- طول موج تا شدن  $H$ ، ۲، ظاهراً فقط به هندسه سلول بستگی دارد و مستقل از خواص مکانیکی سازه است. با افزایش ابعاد سلول  $H$  نیز افزایش می یابد و در این میان اثر ضخامت جداره بیشتر است (رابطه ۴۵).
- ه- استحکام متوسط خرد شدن  $\bar{\sigma}_m$ ، و نیروی متوسط خرد شدن  $P_m$ ، مستقیماً با تنش تسلیم ماده سازه  $\sigma_0$ ، متناسب هستند (روابط ۵۰ و ۵۴).
- و-  $H$  و  $b$ ، هر دو مستقل از تعداد سلولهای تحت بار پانل  $n$ ، بوده ولی نیروی خرد شدن مستقیماً با  $n$  متناسب است (روابط ۴۴ و ۴۵ و ۵۶).
- فهرست علائم**
- $a$  : شعاع بزرگ سطح توروئیدی  
 $A_i$  : ضرائب ثابت  
 $b$  : شعاع کوچک سطح توروئیدی  
 $B_i$  : ضرائب ثابت  
 $C$  : طول المان زاویه ای  
 $d_i$  : ضرائب ثابت  
 $E_1$  : انرژی تلف شده در اثر انبساط خمیری  
 $E_2$  : انرژی تلف شده در اثر حرکت مفصل خمیری افقی  
 $E_3$  : انرژی تلف شده در اثر حرکت مفصل خمیری مایل  
 $E_4$  : انرژی تلف شده در اثر تغییر شکل المان ورقی  
 $E_{int}$  : انرژی داخلی  
 $E_{ext}$  : کار خارجی  
 $h$  : ضخامت دیواره های سلول هانی کمب  
 $H$  : نصف طول موج کمانش خمیری  
 $I_1$  : مقدار انتگرال (تابع هندسه المان زاویه ای)  
 $I_3$  : مقدار انتگرال (تابع هندسه المان زاویه ای)  
 $Ln$  : لگاریتم طبیعی
- $M_0$  : لنگر کامل خمیری مقطع  
 $M\phi$  : لنگر خمشی  
 $M^{\alpha\beta}$  : تانسور کوپل تنش  
 $n$  : تعداد سلول های تحت بار  
 $N\phi$  : نیروی غشائی  
 $N^{\alpha\beta}$  : تانسور تنش کوشی  
 $P$  : نیروی محوری فشاری  
 $P_m$  : متوسط نیروی خرد شدن  
 $r$  : مختصات شعاعی  
 $s$  : جابجائی افقی  
 $S$  : قطر کوچک سلول ۶ ضلعی  
 $V$  : سرعت  
 $\alpha$  : زاویه دوران المان زاویه ای  
 $\beta$  : زاویه ای در المان زاویه ای  
 $\gamma$  : زاویه ای در المان زاویه ای  
 $\delta$  : میزان کاهش ارتفاع المان زاویه ای در اثر تغییر شکل  
 $\delta_e$  : میزان جابجائی مؤثر در خرد شدن محوری المان زاویه ای  
 $\theta$  : زاویه  
 $\lambda_\phi$  : مؤلفه تانسور کرنش  
 $\kappa_\phi$  : مؤلفه تانسور کرنش  
 $\sigma_0$  : تنش سیلان ماده هانی کمب  
 $\bar{\sigma}_m$  : استحکام متوسط خرد شدن  
 $\psi_0$  : نصف زاویه بین صفحات المان زاویه ای

## مراجع

- 1 - McFarland, R. K. (1963). "Hexagonal cell structures under post-buckling axial load." *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 6, PP. 1380- 1385 .
- 2 - Wierzbicki, T. (1983). "Crushing analysis of metal honeycombs." *Int. J. of Impact Engng.*, Vol. 1, No. 2, PP. 157-174 .
- 3 - Gibson, L. J., Shby, M. F., Schajer, G. S. and Robertson , C. I. (1982). "The mechanics of two-dimensional cellular materials." *Proceedings of Royal Society of London A*, Vol. 382, PP. 25-42.
- 4 - Gibson, L. J. and Ashby, M. F. (1988). *Cellular solids, structures and properties*. Pergamon Press.

- 5 - Wierzbicki, T. and Abramowicz, W. (1983). "On the crushing mechanics of thin-walled structures." *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, PP. 727-734.
- 6 - Abramowicz, W. and Wierzbicki, T. (1989). "Axial crushing of multicorner sheet metal columns." *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, PP. 113-120.
- 7 - Li, S. and Reid, S. R. (1990). "Relationship between the elastic buckling of square tubes and rectangular plates." *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, PP. 969-973.
- 8 - Abramowicz, W. and Jones, N. (1984). "Dynamic axial crushing of square tubes." *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 2, No. 2, PP. 179-208.
- 9 - Jones, N. (1989). *Structural Impact*. Cambridge University Press, Cambridge.
- 10 - Johnson, W. and Reid, S. R. (1986). "Metallic energy dissipating systems, and the update." *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 31, PP. 277-288; and *Applied Mechanics Update*.
- 11 - White, M. D., Jones, N. and Abramowicz, W. (1999). *A Theoretical Analysis for the Quasi-Static Axial Crushing of Top-Hat and Double-Hat Thin-Walled Sections*. Vol. 41, PP. 209-233.
- 12 - Murray, R. (1968). *Mathematical handbook*. McGraw-Hill Book Company.
- 13 - Abramowicz, W. (1983). "The effective crushing distance in axially compressed thin-walled metal columns." *Int.J.Impact Engng.*, Vol. 1, No. 3, PP. 309-317.
- 14 - Wu, E. and Wu-Sh. Jiang, (1997). "Axial crush of metallic honeycombs." *Int.J.Impact Engng.*, Vol. 19, No. 5/6, PP. 439-456.
- 15 - Alavinia, A. and Liaghat, G. H. (2000). "Quasi static axial crushing of metallic honeycombs." *Internal Report*, Tarbiat Modarres University.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Crushing
- 2 - Honeycomb
- 3 - Angle Element
- 4 - Wierzbicki
- 5 - Folding
- 6 - Bending Stiffness
- 7 - Cellular Structure
- 8 - Slenderness Ratio