

# طراحی بهینه سیستم تعلیق فعال خودرو با هدف کاهش همزمان نیرو و جرک<sup>۱</sup>

محمد محبوب جهرمی

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

مرتضی تقی پور گورابی

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۸/۱۰/۲۹، تاریخ تصویب ۸۱/۹/۲)

## چکیده

هدف سیستم تعلیق خودرو، کنترل و کاهش اغتشاشات وارده از طرف جاده بر بدنه خودرو است. در بهینه سازی سیستم تعلیق باید بین خواسته های متضاد راحتی سفر<sup>۲</sup> و فرمانپذیری<sup>۳</sup> سازشی برقرار کرد. در سالهای اخیر، Jerk نیز بعنوان یکی از شاخصهای راحتی سفر در نظر گرفته شده است که به این روش، کنترل بهینه جرک<sup>۴</sup> JOC گفته می شود. هدف این مقاله بررسی تاثیر جرک در طراحی سیستم تعلیق فرمان بهینه<sup>۵</sup> برای مدل ۱/۴ خودرو با دو درجه آزادی و مقایسه آن با روش کنترل بهینه نیرو<sup>۶</sup> FOC و سیستم تعلیق غیرفعال<sup>۷</sup> است. در بررسی انجام گرفته، عبارات شتاب و جرک بدنه به طور مستقیم در مشخصه عملکرد روش JOC لحاظ شده است. همچنین بر خلاف موارد پیشین که برای محاسبه ضرایب پسخورد از حل معادله جبری ریکاتی<sup>۸</sup> استفاده می شد، این بار مستقیماً (با استفاده از همیلتونین<sup>۹</sup>)، معادلات کنترل بهینه بدست آمده است. نکته دیگر آنکه در هر دو روش JOC و FOC از عملگر<sup>۱۰</sup> نیرو بعنوان عامل کنترل کننده نیرو جرک استفاده شده است. نتیجه بدست آمده نشان دهنده آن است که در مقابل افزایش تغییر شکل دینامیکی تیر و جابجائی نسبی سیستم تعلیق می توان شتاب و جرک وارد بر بدنه را کاهش داد. میزان این تغییرات با توجه به ضرایب وزنی مختلف در مشخصه عملکرد تعیین می گردد.

واژه های کلیدی: سیستم تعلیق فعال، کنترل بهینه نیرو، کنترل بهینه جرک، راحتی سفر

## مقدمه

وارد بر جرم فدر بندی شده در خودرو، که از پارامترهای راحتی سفر هستند کاهش یابد، تغییر شکل دینامیکی تیر، که پارامتر فرمانپذیری است و جابجائی نسبی سیستم تعلیق، که از قیود طراحی است افزایش می یابد و بالعکس.

بررسی های انجام شده در مورد کنترل سیستم تعلیق خودرو به سال ۱۹۶۴ بر می گردد هنگامیکه Sheridan و همکاران دو مدل را برای توصیف چگونگی کنترل سیستم در حالتی که اطلاعات قبلی در دسترس باشد پیشنهاد کردند [۵]، اما برای نخستین بار Hubbard و Hrovat در سال ۱۹۸۱ پیشنهاد اضافه کردن جرک بعنوان شاخصی از راحتی سفر را ارائه کردند [۴]. در سال ۱۹۹۶، Hubbard، Hrovat و Rutledge تاثیر جرک را در طراحی سیستم تعلیق فعال برای مدل یک

سیستمهای تعلیق مورد استفاده در خودروها به سه گروه سیستم تعلیق غیر فعال، نیمه فعال<sup>۱۱</sup> و فعال تقسیم بندی شده اند. سیستم تعلیق غیرفعال شامل فدر و میراکننده<sup>۱۲</sup> ای است که هر دو دارای ضرایب ثابتی هستند. سیستمهای نیمه فعال به سیستمهای اطلاق می شود که اگر چه در آنها برای عمل کردن سوپاپ ها، حسگرها و کنترل کننده ها نیاز به انرژی خارجی نیست اما ضریب دمپر موجود در سیستم می تواند تغییر کند [۱]. سیستم های فعال، سیستمهای هستند که در آنها با استفاده از انرژی خارجی و بکارگیری یک عملگر ارتعاشات خودرو کنترل می شوند.

همچنان که توسط دیگران ذکر شده است [۴-۱] در کنترل بهینه باید بین خواسته های متضاد، بهینه یابی صورت گیرد. بعنوان مثال هر چه مقدار شتاب و جرک

جرم شاسی، بدنه خودرو، مسافر و بار است. جرم فنربندی نشده نیز شامل جرم اجزائی است که بین تایر و سیستم تعلیق قرار دارند. این اجزاء چرخ، تایر و اجزای تعلیق سیستم تعلیق شامل اجزائی است که جرم فنربندی شده و جرم فنربندی نشده را به هم وصل می کند. این اجزاء در سیستم تعلیق غیرفعال شامل فنر و دمپر بوده و در سیستم تعلیق فعال علاوه بر آنها یک عملگر نیرو نیز وجود دارد. تایر مانند یک فنر خطی مدل شده است و اغتشاشات ورودی جاده به صورت جابجائی و از طریق این فنر خطی به سیستم اعمال می شود.

### معادلات حالت سیستم

با توجه به اینکه در هر دو نوع سیستم تعلیق فعال (FOC و JOC) از عملگر نیرو برای کنترل نیرو و جرک وارده بر جرم فنربندی شده استفاده می شود، معادلات حرکتی و در نتیجه ماتریسهای حالت، کنترل و ورودی اغتشاش جاده یکسان است اما به دلیل اینکه شاخص عملکرد برای دو حالت فرق می کند معادلات کنترلی این دو حالت یکسان نخواهد بود.

#### الف - سیستم تعلیق فعال

از شکل (۱) قسمت b داریم:

$$-k_1(x_1 - w) - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - U = m_{us}\ddot{x}_1 \quad (1)$$

$$k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + U = m_s\ddot{x}_2$$

که در آن متغیرهای حالت عبارتند از:

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = \dot{x}_1$$

$$z_3 = x_2$$

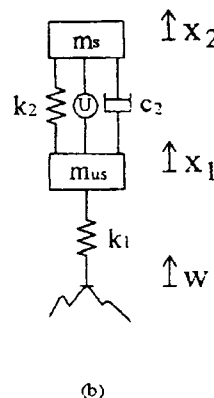
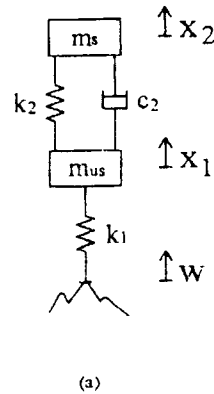
$$z_4 = \dot{x}_2$$

$$-k_1(z_1 - w) - k_2(z_1 - z_3) - c_2(z_2 - z_4) - U = m_{us}\dot{z}_2 \quad (2)$$

$$k_2(z_1 - z_3) + c_2(z_2 - z_4) + U = m_s\dot{z}_4$$

چهارم خودرو با دو درجه آزادی با معرفی یک عملگر جرک مورد بررسی قرار دادند [۲].

در این مقاله روش جدیدی برای احتساب جرک در معادلات مورد استفاده قرار گرفته است بطوریکه شتاب و جرک جرم فنربندی شده مستقیماً در تابع هدف آمده است بنابراین روی آنها می توان کنترل داشت. پس از حل معادلات و بدست آوردن ضرایب پسخورد برای حالت JOC عبارتهای موجود در مشخصه عملکرد برای سه حالت JOC، کنترل بهینه نیرو FOC و حالت سیستم تعلیق غیرفعال با یکدیگر مقایسه شده است.



شکل ۱: مدل فیزیکی یک چهارم خودرو با دو درجه آزادی و متغیرهای حالت برای (a) سیستم تعلیق غیرفعال (b) سیستم تعلیق فعال، است که تنها توسط تایر نگهداری می شوند.

### مدل فیزیکی

مدل فیزیکی ارائه شده، مدل ۱/۴ خودرو با دو درجه آزادی است که در شکل (۱) نشان داده شده است. جرم فنربندی شده شامل جرم قسمتهائی از خودرو است که به وسیله سیستم تعلیق نگهداری می شود که شامل

سرعت جرم فنر بندی شده  $\dot{x}_2$   
نیروی وارد از طرف عملگر  $U$   
بنابراین شاخص عملکرد در این حالت به صورت زیر  
تعریف می شود:

$$P.I. = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (Y^T M Y + U^T N U) dt \quad (۶)$$

بنابراین شاخص عملکرد معادله جبری Ricatti به  
صورت زیر می باشد [۳]:

$$Q - N_2 R^{-1} B^T P - N_2 R^{-1} N_2^T + A^T P + P A \\ - P B R^{-1} B^T P - P B R^{-1} N_2^T = 0 \quad (۷)$$

که در آن

$$Q = C^T M C \\ N_2 = C^T M D \\ R = D^T M D + N \quad (۸)$$

و همچنین

$$U = -K_1 X(t) \\ K_1 = R^{-1} (B^T P + N_2^T) \quad (۹)$$

با حل معادله ماتریسی ریکاتی (۷)، محاسبه ماتریس  $P$  و  
قرار دادن آن در معادله (۹) ضرایب پسخورد محاسبه می  
شوند.

#### معادلات کنترلی سیستم برای روش JOC

$$P.I. = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (Y^T M Y + \ddot{X}^T S \ddot{X} + \ddot{X}^T V \ddot{X} + \\ U^T N U) dt \quad (۱۰)$$

برای این روش متغیرهای تابع هدف عبارتند از:

تغییر شکل دینامیکی تایر  $X_1 - W$

جابجائی نسبی سیستم تعلیق  $X_2 - X_1$

سرعت جرم فنر بندی شده  $\dot{x}_2$

شتاب جرم فنر بندی شده  $\ddot{x}_2$

جرک جرم فنر بندی شده  $\ddot{x}_2$

نیروی وارد از طرف عملگر  $U$

با نوشتن همیلتونین و محاسبه معادلات ماتریسی،  
معادلات زیر حاصل می شود [ضمیمه ۱]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(k_1 + k_2) & -c_2 & k_2 & c_2 \\ m_{us} & m_{us} & m_{us} & m_{us} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2 & c_2 & -k_2 & -c_2 \\ m_s & m_s & m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ m_{us} \\ 0 \\ 1 \\ m_s \end{bmatrix} [U] + \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \\ m_{us} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [w]$$

اگر در حالت کلی معادلات بصورت زیر بیان شود:

$$\dot{X} = AX + BU + LW \\ Y = CX + DU + GW \quad (۴)$$

از مقایسه معادلات (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(k_1 + k_2) & -c_2 & k_2 & c_2 \\ m_{us} & m_{us} & m_{us} & m_{us} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2 & c_2 & -k_2 & -c_2 \\ m_s & m_s & m_s & m_s \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ m_{us} \\ 0 \\ 1 \\ m_s \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \\ m_{us} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۵)$$

#### ب - سیستم تعلیق غیرفعال

فرق این حالت با حالت قبل تنها در این که در  
اینجا عملگر نیروی  $U$  وجود ندارد بنابراین در این حالت  
 $A$  و  $L$  همانند حالت قبل خواهند بود و  $B=0$ .

#### محاسبه معادلات کنترلی سیستم

##### معادلات کنترلی سیستم برای حالت FOC

برای حالت FOC متغیرهای تابع هدف<sup>۱۳</sup> عبارتند

از:

تغییر شکل دینامیکی تایر  $X_1 - W$

جابجائی نسبی سیستم تعلیق  $X_2 - X_1$

شده و نیروی عملگر در دو روش FOC و JOC یکسان است. ضرایب وزنی شتاب و جرک در روش JOC باید با توجه به شرایط موجود انتخاب شوند.

#### ۱- پاسخ زمانی سیستم

در حوزه زمان دو ورودی به سیستم اعمال شده است. اول یک برآمدگی از نوع Haversine به ارتفاع ۶۰ cm و طول ۳۰ cm برای خودرویی با سرعت ۶۰ km/h در نظر گرفته شده است (شکل a-۲). نتایج شبیه سازی برای این ورودی در شکلهای (b-۲)، (c-۲)، (d-۲) و (e-۲) نشان داده شده است. ورودی دوم برآمدگی دوزنقه ای با ارتفاع ۵ cm و قاعده ۲۴۰ sm است که در شکل (a-۳) نشان داده شده است. نتایج شبیه سازی برای این ورودی در شکلهای (b-۳)، (c-۳)، (d-۳)، (e-۳) آمده است.

همانطور که در نمودارها دیده می شود، در مجموع عملکرد سیستم تعلیق فعال بهتر از سیستم تعلیق غیرفعال است. به دلیل اهمیتی که دو روش FOC و JOC در این مقاله دارد، این روشها ذیلاً با یکدیگر مقایسه می شوند.

برای ورودی نوع اول، افزایش به ترتیب ۱.۴٪ و ۲.۳٪ در rms تغییر شکل دینامیکی تایر و جابجائی نسبی سیستم تعلیق در روش JOC نسبت به روش FOC باعث کاهش ۱.۸٪ و ۲.۱٪ در rms شتاب و جرک می شود. همچنین برای ورودی نوع دوم افزایش به ترتیب ۱.۷٪ در rms تغییر شکل دینامیکی تایر و ۵٪ در rms جابجائی نسبی سیستم تعلیق در روش JOC نسبت به روش FOC باعث کاهش به ترتیب ۸۰٪ و ۷۹٪ در rms شتاب و جرک می شود.

همانطور که مقایسه دو حالت بالا نشان می دهد افزایش جابجائی نسبی سیستم تعلیق و تغییر شکل دینامیکی تایر باعث کاهش شتاب و جرک و در نتیجه افزایش راحتی سفر می شود. باید توجه کرد که با تغییر ضرایب وزنی می توان میزان کاهش شتاب و جرک را تغییر داد. برای مثال، ضریب وزنی شتاب و جرک برای ورودی دوم ۱۰ برابر ورودی اول فرض شده است.

$$\begin{aligned} Q - N_2 K_2 + A^T P + P(A - BK_2) + \\ S(A - BK_2)^4 - V(A - BK_2)^6 = 0 \\ U = -K_2 X(t) \\ K_2 = R^{-1}(N_2^T + B^T P) \end{aligned} \quad (11)$$

مقادیر  $Q$ ،  $R$  و  $N_2$  همان مقادیر (۸) هستند.

با حل معادلات (۱۱) مقادیر ضرایب پسخورد  $K_2$  محاسبه می شوند.

در اینجا توجه به نکات ذیل ضروری است:

اول آنکه در معادلات بالا باید  $R$  مثبت معین و  $S$  و  $Q$  و  $V$  مثبت معین یا نیمه معین باشد. دوم آنکه برای استفاده از ضرایب پسخورد در کنترل بهینه لازم است سیستم موردنظر کنترل پذیر بوده و برای کنترل پذیری سیستم باید ماتریس کنترل پذیری دارای رتبه کامل باشد [۶].

$$\phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \quad (12)$$

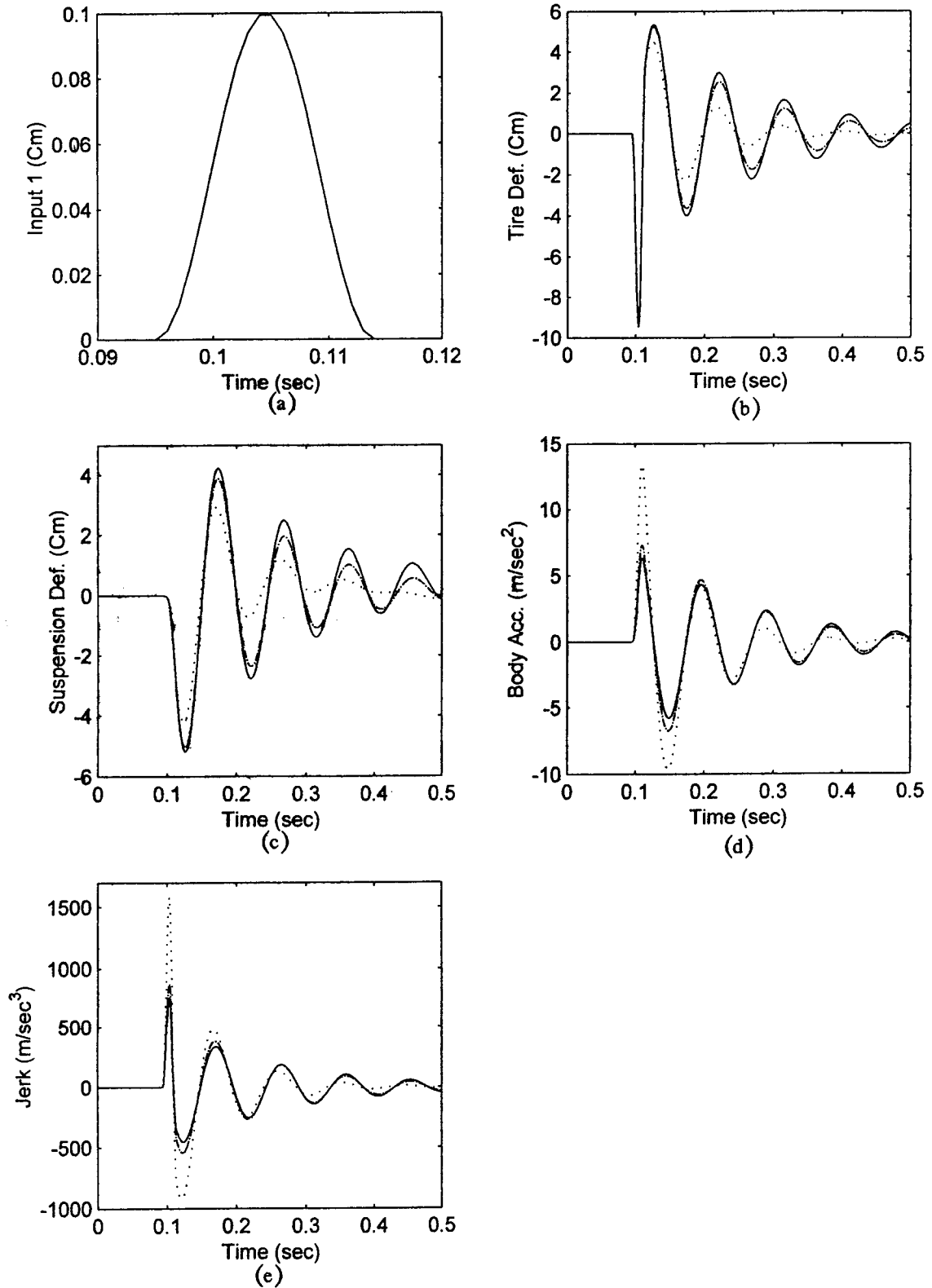
سومین نکته است که باید به آن توجه شود آن است که ضرایب وزنی  $M$ ،  $N$  و  $S$  نقش مهمی در مقادیر ضرایب پسخورد و در نتیجه کنترل جملات مندرج در تابع هدف داشته و فقط با انتخاب ضرایب وزنی مناسب می توان به نتیجه موردنظر رسید.

#### تحلیل نتایج

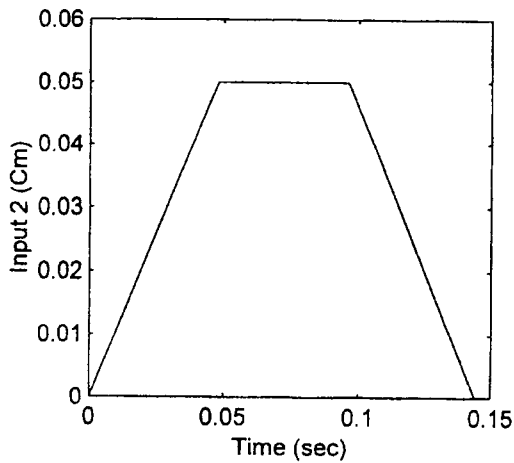
مقادیر در نظر گرفته شده برای مدل ارزیابی سیستم به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} m_{us} &= 36 \text{ kg} \\ m_s &= 240 \text{ kg} \\ k_1 &= 160000 \text{ N/m} \\ k_2 &= 16000 \text{ N/m} \\ c_2 &= 980 \text{ N.S/m} \end{aligned} \quad (13)$$

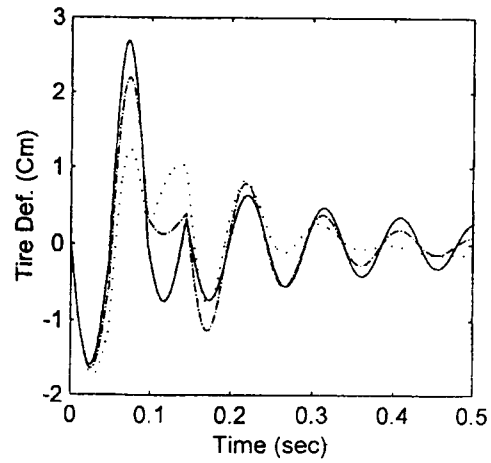
با استفاده از مقادیر بالا، ماتریسهای  $A$ ،  $B$  و  $L$  محاسبه شده و در نتیجه معادلات ذکر شده در (۷) و (۱۱) حل شده و مقادیر عددی ضرایب پسخورد محاسبه می شوند. ضرایب وزنی انتخاب شده در مورد تغییر مکان دینامیکی تایر و جابجائی نسبی سیستم تعلیق، سرعت جرم فنربندی



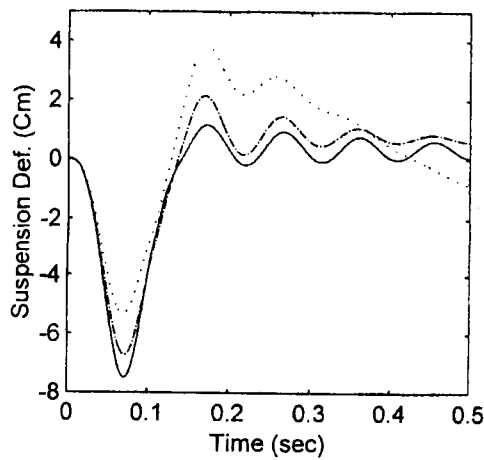
شکل ۲: پاسخهای سیستمهای تعلیق JOC (خط ممتد)، FOC (خط چین بزرگ) و غیرفعال (خط چین کوچک) برای ورودی نوع اول (a): ورودی Haversine (b): تغییر شکل دینامیکی تایر (c): جابجایی نسبی سیستم تعلیق (d): شتاب جرم فنر بندی شده (e): جرک جرم فنر بندی شده.



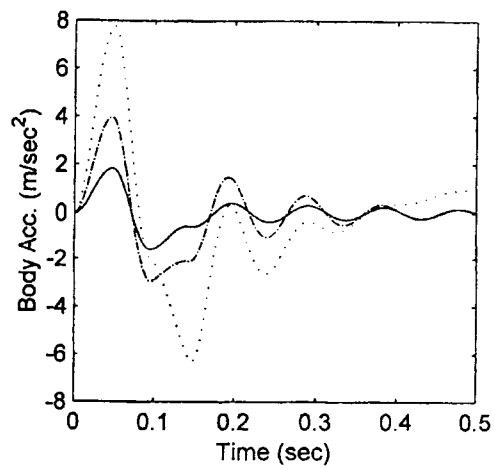
(a)



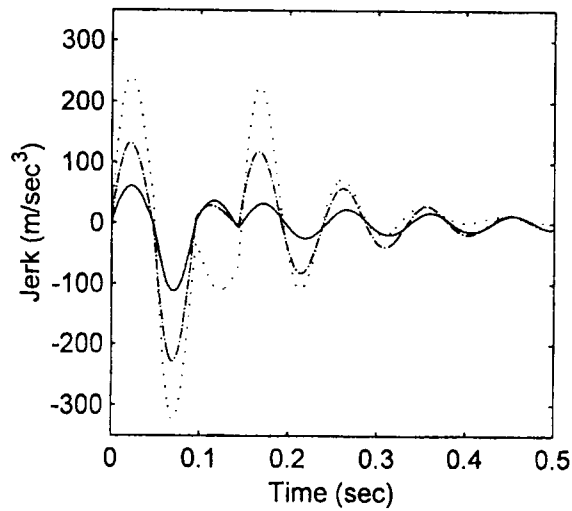
(b)



(c)

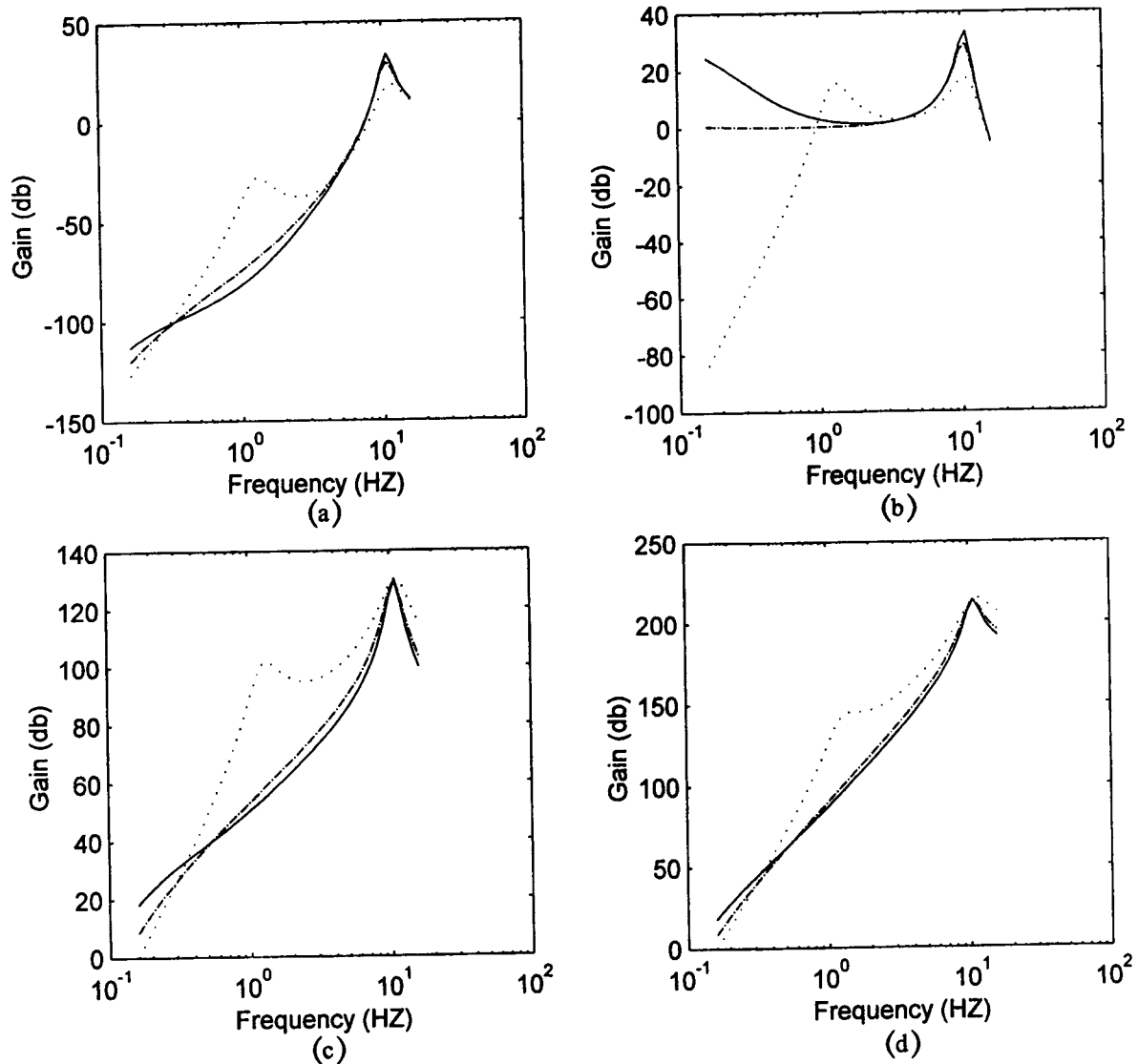


(d)



(e)

شکل ۳: پاسخهای سیستمهای تعلیق JOC (خط ممتد)، FOC (خط چین بزرگ) و غیرفعال (خط چین کوچک) برای ورودی نوع اول (a) ورودی Haversine (b) تغییر شکل دینامیکی تایر (c) جابجایی نسبی سیستم تعلیق (d) شتاب جرم فنر بندی شده (e) جرم فنر بندی شده.



شکل ۴: پاسخهای سیستمهای تعلیق JOC (خط ممتد)، FOC (خط چین بزرگ) و غیرفعال (خط چین کوچک) برای ورودی نوع اول  
 (a): تغییر شکل دینامیکی تایر (b): جابجایی نسبی سیستم تعلیق (c): شتاب جرم فنر بندی شده  
 (d): جرک جرم فنربندی شده.

## ۲- پاسخ فرکانسی سیستم

نمودارهای (۴-c) و (۴-d) مربوط به شتاب و جرک است. همانطور که مشاهده می شود در محدوده فرکانسی کمتر از ۱ HZ تا ۱۰ HZ عملکرد روش JOC بهتر از روش FOC و این هر دو بسیار بهتر از عملکرد سیستم تعلیق غیرفعال است.

## جمع بندی

همانطور که در این بررسی مشاهده شده است، بین خواسته های راحتی سفر و فرمان پذیری تضاد وجود

نمودار Bode مربوط به پاسخ فرکانسی سه روش FOC، JOC و تعلیق غیرفعال در شکل (۴) نشان داده شده است. در شکل (۴-a) پاسخ فرکانسی تغییر شکل دینامیکی تایر ارائه شده است. همانطور که در شکل دیده می شود در محدوده فرکانسی ۱ HZ، روش JOC بهتر از روش FOC و غیرفعال عمل می کند. در شکل (۴-b) که مربوط به پاسخ فرکانسی جابجایی نسبی سیستم تعلیق است این محدوده فرکانسی کوچکتر است.

دارد به این معنی که کاهش میزان شتاب و جرک باعث افزایش تغییر دینامیکی تایر و جابجائی نسبی سیستم تعلیق می گردد ( عکس این قضیه نیز درست است ). اما با استفاده از روش کنترل بهینه جرک پیشرفت قابل ملاحظه ای صورت گرفته است به این ترتیب که با افزایش ۱۴٪ در تغییر مکان دینامیکی تایر و ۲۳٪ در جابجائی نسبی سیستم تعلیق ، ۱۸٪ مقدار شتاب و ۲۱٪ مقدار جرک کاهش می یابد . باید توجه نمود که با تغییر نسبی ضرایب وزنی در مشخصه عملکرد می توان مقادیر  $ims$  ذکرشده را تغییر داد . همچنین با توجه به اینکه در روش JOC بکار رفته جملات مربوط به شتاب و جرک در تابع هدف وجود دارد ، می توان بطور مستقیم ضریب وزنی آنها را تغییر داده و با مشاهده اثر آنها به طراحی مطلوب دست یافت .

### فهرست علائم

|  |
|--|
| A : ماتریس حالت سیستم                  |
| B : ماتریس کنترل سیستم                 |
| C : ماتریس ضرایب خروجی                 |
| $C_2$ : ضریب میرایی سیستم تعلیق        |
| D : ماتریس ضرایب خروجی نیروی عملگر     |
| G : ماتریس ضرایب خروجی اغتشاش جاده     |
| H : تابع همپلتونین                     |
| $K_1$ : بردار ضرایب پسخوردهای حالت FOC |
| $K_2$ : بردار ضرایب پسخوردهای حالت JOC |
| $k_1$ : سختی معادل تایر                |
| $k_2$ : سختی فنر سیستم تعلیق           |
| L : ماتریس ورودی اغتشاش جاده           |
| M : ماتریس ضرایب وزنی متغیرهای خروجی   |

### مراجع

- 1 – Miller, L. R. and Nobles, C. M. (1990). "Methods for eliminating jerk and noise in semi-active suspensions." *SAE Transactions*, Vol. 99, Sect. 2, PP. 943-951.
- 2 – Rutledge, D. C., Hubbard M. and Hrovat D. (1996). " Two DOF model for jerk optimal vehicle dynamics." *Vehicle System Dynamics*, Vol. 25, PP. 113-136.
- 3 – Esmailzadeh, E. and Fahimi, F. (1997). "Optimal adaptive active suspension for a full car model." *Vehicle System Dynamics*, Vol. 27, PP. 89-107.



- 4 – Langlois, R. G. and Anderson, R. J. (1995). "Preview control algorithms for active suspension of an off-road vehicle." *Vehicle System Dynamics*, Vol. 24, PP. 65-67.
- 5 – Hrovat, D. and Hubbard, M. (1987). "A comparison between jerk optimal and acceleration optimal vibration." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 112, No. 2, PP. 201-210.
- 6 – Shahian, B. and Massul, M. (1993). *Control system design using MATLAB*. Prentice-Hall.
- 7 – Lewis, F. L. (1992). *Applied optimal control & estimation*. Prentice Hall Inc.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1 – Jerk                       | 2 – Ride Comfort               |
| 3 – Handling                   | 4 – Jerk Optimal Control       |
| 5 – Optimal Active Suspension  | 6 – Force Optimal Control      |
| 7 – Passive Suspensions System | 8 – Algebraic Ricatti Equation |
| 9 – Hamiltonian                | 10 – Actuator                  |
| 11 – Semi-Active               | 12 – Damper                    |
| 13 – Cost Function             |                                |

### ضمیمه ۱ – روش بدست آوردن معادلات کنترلی برای روش JOC

$$P.I. = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\dot{Y}^T M \dot{Y} + \ddot{X}^T S \ddot{X}) + \ddot{X}^T V \ddot{X} + U^T N U) dt$$

$$P.I. = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T N_1 X + X^T N_2 U + \ddot{X}^T S \ddot{X} + \ddot{X}^T V \ddot{X} + U^T R U) dt$$

(۱۴)

$$H(X, \dot{X}, \ddot{X}, \lambda, U) = \frac{1}{2} (X^T Q X + U^T N_1 X + X^T N_2 U + \ddot{X}^T S \ddot{X} + \ddot{X}^T V \ddot{X} + U^T R U) + \lambda^T (A X + B U - \dot{X})$$

(۱۵)

معادلات زیر باید ارضاء شوند :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial \dot{X}} \right) + \frac{d}{dt^2} \left( \frac{\partial H}{\partial \ddot{X}} \right) - \frac{d}{dt^3} \left( \frac{\partial H}{\partial \ddot{\ddot{X}}} \right) = 0$$

(۱۶)

از معادلات (۱۵) و (۱۶) خواهیم داشت :

$$\dot{X} = A X + B U$$

$$\frac{1}{2} N_1 X + \frac{1}{2} N_2^T X + R U + B^T \lambda = 0$$

$$Q X + \frac{1}{2} N_1^T U + \frac{1}{2} N_2 U + A^T \lambda + \dot{\lambda}$$

$$+ S X^{(4)} - V X^{(6)} = 0$$

(۱۷)

با فرض اینکه :

$$U = -K_2 X(t)$$

$$\lambda = P X(t)$$

و با توجه به اینکه :

$$N_1^T = N_2$$

از معادلات (۱۷) خواهیم داشت :

$$N_2 - PK_2 + B^T P = 0 \Rightarrow$$

$$K_2 = R^{-1}(B^T P + N_2)$$

$$Q - N_2 K_2 + A^T P + P(A - BK_2) +$$

$$S(A - BK_2)^{(4)} - V(A - BK_2)^{(6)} = 0$$

(۱۸)

با حل همزمان معادلات (۱۸) ضرایب پسخورد  $K$  محاسبه می شوند.