

# مدلسازی ریاضی و تحلیل رفتار یک نوع محرک SMA مرکب از آلیاژ حافظه دار و الاستومر در شرایط ایستا

نصراله تابنده

دانشیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

اسداله قاضوی

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

منصور محی الدین قمشه ای

دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۸/۱۱/۶، تاریخ تصویب ۸۰/۸/۵)

## چکیده

محرک های SMA<sup>۱</sup> نوع جدیدی از کاراندازه های نیرو-جابجائی هستند که در آنها از ویژگی بازیافت شکل آلیاژهای حافظه دار بمنظور تولید نیرو و جابجائی بهره گرفته میشود. در این مقاله برای پاسخ سازه ای ایستای یک نوع محرک SMA به تحریک حرارتی یک مدل ریاضی ارائه گردیده است. این محرک دارای ساختار تیر لایه ای مرکب با مقطع مستطیل توخالی متشکل از لایه های آلیاژ حافظه دار و الاستومر<sup>۲</sup> میباشد و قابلیت حرکت و اعمال نیرو در سه بعد را دارد. در این مدلسازی رفتار ترمومکانیکی لایه های SMA بوسیله یک معادله مشخصه ارائه شده توسط دو نفر بنامهای Rogers و Liang، به همراه یک معادله سینتیک تبدیل فاز خطی، بیان گردیده است. رفتار ترموالاستیک لایه های الاستومر بوسیله معادله هوک و با احتساب تغییرات مدول الاستیسیته آن با درجه حرارت، بیان شده است. روابط نیرو-تغییر شکل در محرک توسط فرم کلی معادلات کلاسیک تیرها با احتساب کرنش صفحه میانی در آنها، بیان گردیده است. این مدل ریاضی در نهایت جوابهای صریحی برای پاسخ سازه ای محرک، شامل کرنش صفحه میانی و انحناء آن بدست می دهد. در آخر، نتایج کلی بدست آمده در این مدلسازی بر روی حالت خاصی از این محرک که بورت یک تیر یکسر گیردار با مقطع مربع بوده و در انتهای آزاد خود یک نیروی متمرکز عرضی را حمل مینماید، اعمال گردیده و نتایج عددی آن توسط یک برنامه کامپیوتری محاسبه و در نمودارهایی ارائه شده است. این نتایج نشان می دهند که وقتی تبدیل فاز در لایه SMA گرمایش داده شده آغاز می شود، تغییرات زیادی در پاسخ سازه بوجود می آید، که ناشی از ایجاد بازیافت کرنش در این لایه است.

**واژه های کلیدی:** آلیاژ حافظه دار، تبدیل فاز، بازیافت شکل، محرک SMA، تیر لایه ای مرکب

## مقدمه

به آن اصطلاحاً "اثر حافظه شکل"<sup>۳</sup> گویند. اثر حافظه شکل عبارتست از قابلیت بازیافت یک شکل معین وقتی که به آلیاژ تا دمای معینی حرارت داده شود. در درجه حرارتهای پائین که آلیاژ در فاز مارتنزیت<sup>۴</sup> (فاز M) قرار داشته و در این فاز دارای حد جاری شدن پائینی است، بسادگی تغییر شکل یافته و در شکل جدید باقی میماند. اما اگر در این حالت به آن حرارت داده شود بطوریکه دمای آن از حد معینی فراتر رود در آن تبدیل فاز ایجاد

در دهه اخیر سیستمها و سازه های هوشمند که در ساختار آنها نوعی ماده هوشمند بکار رفته است اهمیت زیادی در کاربردهای نظامی و غیر نظامی یافته اند. بر اساس این مواد تکنولوژیهای جدیدی پا گرفته و تا کنون نوآوریهای زیادی بیار آمده است. یکی از مهمترین انواع مواد هوشمند آلیاژهای حافظه دار میباشد. آلیاژهای حافظه دار یا باختصار SMA خانواده جدیدی از آلیاژها هستند که دارای نوعی خاصیت تعلیم پذیری میباشد که

ارائه کردند. آنها همچنین برای پاسخ دینامیکی یک صفحه کامپوزیتی مرکب از دو لایه SMA و الاستومر یک فرمولاسیون ریاضی بر اساس روش اجزاء محدود پیشنهاد نمودند [۱۴].

در مقاله حاضر یک مدل ریاضی جهت پاسخ سازه ای ایستای یک نوع محرک SMA به تحریک حرارتی پیشنهاد گردیده است. این مدل سازی برای شرایط مرزی و بارگذاری دلخواه بر روی محرک بانجام رسیده است. این محرک SMA دارای ساختار تیر لایه ای مرکب با مقطع مستطیل توخالی متشکل از لایه های آلیاژ حافظه دار و الاستومر میباشد و قابلیت حرکت و اعمال نیرو در فضای سه بعدی را داراست. مدل سازی برای حالت تحریک محرک در صفحه xz انجام گرفته است، اما بسادگی با تغییر نام چند پارامتر برای حالت تحریک در صفحه xy نیز صادق خواهد بود. بدین ترتیب این مدل ریاضی قادر است پاسخ تغییر شکل و جابجائی غیر همزمان محرک در دو صفحه عمود بر هم xz و xy در فضای سه بعدی را بصورت مستقل از یکدیگر پیشبینی نماید. لازم به ذکر است که اگرچه این سازه مرکب بدلیل غیر خطی بودن رفتار لایه های SMA و نیز ایجاد کرنش های نسبتا بزرگ در آن، از نظر مادی و هندسی غیرخطی<sup>۱</sup> است، اما در این مقاله هدف ما تعیین یک تقریب خطی برای پاسخ این سازه بصورت حل صریح<sup>۱</sup> می باشد.

## مدلسازی ریاضی

### توزیع دما در مقطع محرک

در شکل (۱) شمای کلی محرک SMA مورد مطالعه، به همراه جزئیات مقطع و توزیع دما در آن نمایش داده شده است. سطوح خارجی محرک در تماس با یک چاه حرارتی با دمای ثابت  $T_0$  میباشد. فرض می کنیم که فقط دو لایه SMA فوقانی و تحتانی (شماره ۲ و ۴) تحت گرمایش اهمی با دو توان ثابت  $P_2$  و  $P_4$  قرار می گیرند و لایه های SMA جانبی همواره در درجه حرارت چاه حرارتی باقی می مانند. درجه حرارتهای تعادل لایه های فوقانی و تحتانی SMA تحریک شده بسادگی از تساوی

شده و به فاز آستنیت<sup>۵</sup> (فاز P) تبدیل میگردد و به همراه آن یک تغییر ساختار کریستالی در آلیاژ رخ میدهد که باعث میشود آلیاژ به شکل و ابعاد اولیه اش بازگردد. اگر آلیاژ در هنگام تغییر فاز تحت بار خارجی قرار داشته باشد قادر است نیروهای نسبتا بزرگی ایجاد نماید. این فرآیند در واقع اساس مکانیزم عمل محرک های SMA را تشکیل میدهد [۱۲، ۹].

تاکنون تحقیقات بسیاری در زمینه آلیاژهای حافظه دار و کاربردهای عملی از آنها بعمل آمده است. حجم قابل ملاحظه ای از این تحقیقات بمنظور یافتن مدل های ریاضی مبین رفتار این آلیاژ و سازه ها و سیستم های متشکل از آنها بوده است و درصد قابل توجهی از این مدل های ریاضی در ارتباط با طراحی محرک های SMA و تحلیل رفتار و عملکرد آنها میباشد. انواع مختلف محرک های SMA با هندسه و ساختارهای متفاوتی تاکنون پیشنهاد گردیده است. یک دسته از آنها که از تعبیه تارها یا ورقه های SMA در یک ماده ماتریس که معمولا از جنس مواد ترموست<sup>۶</sup> و یا ترموپلاستیک<sup>۷</sup> میباشد را "محرک SMA با ساختار مرکب" می نامند [۴، ۱۳].

در سال ۱۹۹۰م شخصی بنام Howkins مطالعات تئوری خود را بر روی پاسخ گذرای یک تیر کامپوزیتی با مفتولهای SMA تعبیه شده در آن ارائه نمود. دو نفر بنامهای Jia و Rogers در سال ۱۹۹۲ یک مدل ریاضی جهت تعیین سختی متغیر کامپوزیتهای مسلح شده<sup>۸</sup> با تارهای SMA پیشنهاد کردند. در همان سال اشخاص دیگری بنامهای Baz و Ro تحقیقات خود را بر روی کنترل مشخصه های دینامیک تیرهای مرکب انعطاف پذیر بوسیله گرمایش تارهای SMA تعبیه شده در صفحه خنثی آنها ارائه نمودند. همچنین در سال ۱۹۹۳ دو محقق بنامهای Lagoudas و Tadjbakhsh یک فرمولاسیون سه بعدی جهت تبیین رفتار میله های انعطاف پذیر با مفتولهای SMA کار گذاشته شده در آنها پیشنهاد کردند. دو نفر بنامهای Gordaninejad و Wu در سال ۱۹۹۶ یک مدل ریاضی برای تعیین پاسخ تنش-کرنش-درجه حرارت یک نوع محرک SMA با ساختار مرکب متشکل از یک لایه نازک SMA چسبیده شده به یک لایه الاستومری را



سختی کوبلینگ، و سختی خمشی تیر (محرک) بوده و از انتگرالهای زیر که بر حسب مدول یانگ و ضخامت تعریف شده است قابل تعیین میباشند [۲]:

$$(A, B, D) = \int_{A_T} E(1, z, z^2) dA \quad (7)$$

در محاسبه انتگرالهای فوق باید توجه داشت که در ناحیه الاستومری از مقطع، مدول الاستومر با درجه حرارت متغیر است [۴]، که با فرض خطی بودن این تغییرات میتوان نوشت:

$$\begin{aligned} E_{mi} &= S(T_{mi} - T_0) + E_{m0}, & i &= 2, 4 \\ E_{mi} &= E_{m0}, & i &= 1, 3 \end{aligned} \quad (8a)$$

اما برای ناحیه مربوط به لایه های SMA مدول الاستیسیته مقدار ثابت  $E_n$  فرض میشود. با جایگزینی از تساویهای (۲) در معادلات (۸a) تغییرات مدول لایه های فوقانی و تحتانی بصورت تابعی از مختصه  $z$  تعیین می گردد:

$$\begin{aligned} E_{m2}(z) &= m'_2(z - b/2 - t_{m2}) + E_{m0}, \\ E_{m4}(z) &= m'_4(z + b/2 + t_{m2}) + E_{m0} \end{aligned} \quad (8b)$$

که در آنها  $m'_2 = Sm_2$  و  $m'_4 = Sm_4$  است. اکنون با جایگزینی از تساویهای (۸b) در (۷) و انجام انتگرال گیری ها برای ضرائب  $A$ ،  $B$  و  $D$  عبارات زیر بر حسب پارامترهای مسئله بدست می آیند:

$$\begin{aligned} A &= 2(at_{n2} + bt_{n1} - 2t_{n1}t_{n2})E_n + \\ & 2(a't_{m2} + bt_{m1} + t_{m1}t_{m2})E_{m0} + \\ & (m'_4 - m'_2)a't_{m2}^2, \\ B &= -\frac{1}{12}a't_{m2}^2(2t_{m2} + 3b)(m'_2 + m'_4), \\ D &= \frac{1}{12}E_n[ab^3 - (a - 2t_{n1})(b - 2t_{n2})^3] + \\ & \frac{1}{12}a'(m'_2 - m'_4)[-(b/2 + t_{m2})^4 + (b/2)^3 \\ & (b/2 + 4t_{m2})] + \frac{2}{3}E_{m0}[(b/2 + t_{m2})^3 \\ & (t_{m1} + a') + (b/2)^3(t_{m1} - a')] \end{aligned} \quad (9)$$

زیر قابل تعیین است [۵]:

$$T_{ni} = T_0 + \frac{P_i t_{m2}}{k_m a' L}; \quad i = 2, 4 \quad (1)$$

تساوی فوق از بیان معادله بالانس انرژی برای یک لایه SMA تحریک شده بدست آمده است. همچنین توزیع دما در لایه های الاستومر فوقانی و تحتانی با فرض تغییرات خطی آن در این لایه ها، از تساویهای زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} T_{m2}(z) &= m_2(z - \frac{b}{2} - t_{m2}) + T_0 \\ T_{m4}(z) &= m_4(z + \frac{b}{2} + t_{m2}) + T_0 \end{aligned} \quad (2)$$

که در آنها شیب تغییرات دما در ضخامت لایه الاستومر شماره ۲ و ۴ از تساویهای زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} m_2 &= (T_0 - T_{n2})/t_{m2}, \\ m_4 &= (T_{n4} - T_0)/t_{m2} \end{aligned} \quad (3)$$

لازم به ذکر است که تغییرات دما در طول و پهنای محرک ناچیز و قابل اغماض فرض می شود.

#### معادلات کلی نیرو-تغییر شکل

در این مدلسازی از تئوری تیر اولر-برنولی با احتساب کرنش صفحه میانی تیر استفاده بعمل می آید. بدین ترتیب میدان کرنش از تساوی زیر قابل تعیین است:

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + z\kappa \quad (4)$$

که در آن کرنش نرمال صفحه میانی در امتداد محور  $x$  ها و انحنا محرک در صفحه  $xz$  از تساویهای زیر بر حسب مشتق جابجایی های محوری و عرضی بدست می آیند:

$$\varepsilon^0 = u_{,x}^0, \quad \kappa = \psi_{,x} = -w_{,xx} \quad (5)$$

این کمیت های سینماتیکی توسط معادلات کلی نیرو-تغییر شکل مطابق زیر به نیروی محوری و ممان خمشی مؤثر وارده بر محرک مربوط میشوند [۲]:

$$N^E = A\varepsilon^0 + B\kappa, \quad M^E = B\varepsilon^0 + D\kappa \quad (6)$$

که در آن ضرائب  $A$ ،  $B$  و  $D$  بترتیب سختی کششی،

$$(N^P, M^P) = \int_{A_n} \Omega(1-\xi)(1,z)dA \quad (14)$$

در تساوی (۱۳) برای نواحی SMA از سطح مقطع  $E\alpha = -\Theta$  جایگزین می گردد. همچنین، منتهی های تنش مکانیکی ناشی از بارگذاری خارجی، یعنی  $N^M$  و  $M^M$  برای هر حالت بارگذاری و شرایط مرزی، از معادلات تعادل استاتیکی تعیین می شوند.

#### محاسبه منتهی های تنش حرارتی

با محاسبه انتگرالهای معادله (۱۳) بر روی کل سطح مقطع محرک، شامل سطح مقطع لایه های الاستومری (با احتساب تغییرات مدول با دما) و سطح مقطع لایه های SMA، عباراتی برای منتهی های تنش حرارتی بر حسب پارامترهای مسئله مطابق زیر حاصل می گردد:

$$N^T = N_n^T + N_m^T \quad (15)$$

که در آن:

$$N_n^T = \Theta [-at_{n2}(T_{n2} + T_{n4} - 2T_f)] + 2t_{n1}(b - 2t_{n2})(T_f - T_0)$$

$$N_m^T = 2\alpha_m E_{m0} \Delta T_0 t_{m1}(b + t_{m2}) + \frac{1}{6} \alpha_m a' t_{m2} \times \{12E_{m0} \Delta T_0 + 3t_{m2}[(m'_4 - m'_2) \Delta T_0 + (m_4 - m_2)E_{m0}] + 2(m_2 m'_2 + m_4 m'_4) t_{m2}^2\}$$

(۱۶)

و نیز:

$$M^T = M_n^T + M_m^T \quad (17)$$

که در آن:

$$M_n^T = -\frac{1}{2} \Theta at_{n2}(b - t_{n2})(T_{n2} - T_{n4}),$$

$$M_m^T = \frac{1}{48} \alpha_m a' t_{m2}^2 (3b + 2t_{m2}) \times [(m_2 m'_2 - m_4 m'_4)(b + 2t_{m2}) - 4E_{m0}(m_2 + m_4) - 4\Delta T_0(m'_2 + m'_4)] + \frac{1}{16} \alpha_m a' t_{m2}^2 b^2 (m_4 m'_4 - m_2 m'_2)$$

(۱۸)

#### تعیین نیروی محوری و لنگر خمشی مؤثر

سه عامل مختلف در ایجاد نیروی محوری و ممان خمشی در محرک مؤثر میباشند که عبارتند از: ۱- بارگذاری خارجی ۲- تنش های حرارتی ناشی از تغییر درجه حرارت ۳- تنش های ناشی از تبدیل فاز و بازیافت کرنش در لایه های SMA تحریک شده. بدین ترتیب تساویهای (۶) بشکل زیر قابل بیان اند:

$$N^E = N^M + N^T + N^P = A\varepsilon^0 + B\kappa, \\ M^E = M^M + M^T + M^P = B\varepsilon^0 + D\kappa \quad (10)$$

اکنون با توجه به اینکه کرنش های قابل ایجاد در این سازه بمراتب کوچکتر از دامنه کرنش الاستیک در الاستومر است، می توان رابطه تنش-کرنش در لایه های الاستومری را با قانون هوک تقریب نمود، یعنی:

$$\sigma = E_m \varepsilon - E_m \alpha_m \Delta T \quad (11)$$

اما رفتار مکانیکی لایه های SMA در حالت کلی از قانون هوک تبعیت نمی کنند و ما در اینجا از یک معادله مشخصه ارائه شده توسط دو نفر بنامهای Tanaka و Nagaki، مطابق تساوی زیر استفاده بعمل می آوریم [۷]:

$$\sigma = E_n e + \Theta \Delta T + \Omega(\xi - 1) \quad (12)$$

که در آن  $e$  کرنش نسبی در لایه های SMA است و از تفاضل کرنش اولیه مارتنزیتی از کرنش کل بدست می آید، یعنی  $e = \varepsilon - \varepsilon_r$ . همچنین در تساویهای (۱۱) و (۱۲)،  $\Delta T$  تغییر درجه حرارت نسبت به دمای ساخت محرک میباشد، یعنی  $\Delta T = T - T_f$ .

اکنون با استفاده از معادلات مشخصه فوق میتوان بسادگی نشان داد که منتهی های تنش (شامل نیروی محوری و لنگر خمشی) ناشی از تغییر دما و تبدیل فاز از تساویهای زیر قابل محاسبه اند:

$$(N^T, M^T) = \int_{A_T} E\alpha \Delta T(1,z)dA, \quad (13)$$



$$N_u^P = \begin{cases} N_u^{P1} = 0 \\ N_u^{P2} = \Lambda_u \varepsilon^0 + \Delta_u \kappa + \Gamma_u \\ N_u^{P3} = \Omega A_{n2} \end{cases} \quad (21)$$

در این معادلات ضرائب  $\Lambda_u$ ،  $\Delta_u$  و  $\Gamma_u$  از تساویهای زیر محاسبه می شوند:

$$\Lambda_u = -\frac{jE_n A_{n2} \Omega}{C_A (A_f - A_s) - j\Omega},$$

$$\Delta_u = -\frac{jE_n L_{n2} \Omega}{C_A (A_f - A_s) - j\Omega},$$

$$\Gamma_u = \left[ \frac{C_A (T_{n2} - A_s) - j\Theta \Delta T_{n2}}{C_A (A_f - A_s) - j\Omega} \right] A_{n2} \Omega \quad (22)$$

در تساویهای فوق  $j = \text{sgn}(\sigma)$  است که مبین علامت تنش در لایه SMA میباشد. همچنین ضرائب  $\Lambda_d$ ،  $\Delta_d$ ،  $\Gamma_d$  از عباراتی مشابه تساویهای فوق بدست می آیند با این تفاوت که در آنها بجای پارامترهای  $T_{n2}$ ،  $A_{n2}$  و  $L_{n2}$  بایستی به ترتیب  $T_{n4}$ ،  $A_{n4}$  و  $L_{n4}$  را جایگزین نمود. همچنین برای لنگر خمشی ناشی از تبدیل فاز خواهیم داشت:

$$M^P = M_u^{Pi} + M_d^{Pj} \quad (i=1 \text{ or } 2 \text{ or } 3), (j=1 \text{ or } 2 \text{ or } 3) \quad (23)$$

که در آن:

$$M_d^P = \begin{cases} M_d^{P1} = 0 \\ M_d^{P2} = \Lambda'_d \varepsilon^0 + \Delta'_d \kappa + \Gamma'_d, \\ M_d^{P3} = \Omega L_{n4} \end{cases}$$

$$M_u^P = \begin{cases} M_u^{P1} = 0 \\ M_u^{P2} = \Lambda'_u \varepsilon^0 + \Delta'_u \kappa + \Gamma'_u \\ M_u^{P3} = \Omega L_{u4} \end{cases} \quad (24)$$

در این معادلات ضرائب  $\Lambda'_u$ ،  $\Delta'_u$  و  $\Gamma'_u$  از عبارات زیر بدست می آیند:

$$\Lambda'_u = -\frac{jE_n L_{n2} \Omega}{C_A (A_f - A_s) - j\Omega},$$

### محاسبه نتیجه های تنش ناشی از تبدیل فاز

قبل از آنکه بتوانیم انتگرالهای تساویهای (۱۴) را محاسبه نمائیم لازمست که چگونگی تغییرات کسر مارتنزیت در لایه های SMA تحریک شده را بدانیم. بدین منظور از یک معادله سینتیک تبدیل فاز پیشنهاد شده در سال ۱۹۹۱ توسط Lin و Rogers بهره می گیریم. این معادله برای فرآیند تبدیل فاز  $M \rightarrow A$  (فرآیند گرمایش) بصورت زیر بیان می شود [۱۴،۷]:

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{for } T \leq A_s + |\sigma|/C_A, \\ 1 - \frac{T - A_s}{A_f - A_s} + \frac{|\sigma|}{C_A (A_f - A_s)} & \text{for } A_s + |\sigma|/C_A < T < A_f + |\sigma|/C_A, \\ 0 & \text{for } T \geq A_f + |\sigma|/C_A \end{cases} \quad (19)$$

ملاحظه می شود که بر حسب آنکه درجه حرارت تحریک  $T$  در کدامیک از نواحی سه گانه قرار داشته باشد،  $\xi$  از تساوی متفاوتی بدست می آید. با جایگزینی از تساویهای فوق در معادله (۱۴) و توجه به اینکه لایه های SMA فوقانی و تحتانی در حالت کلی درجه حرارتهای تحریک متفاوتی دارند، و نیز در لایه های SMA جانبی هیچگونه تغییر فازی رخ نمی دهد، تساویهای زیر برای نتیجه های تنش ناشی از تبدیل فاز بدست می آیند. باید توجه داشت که بدلیل وجود حالات سه گانه در سینتیک تبدیل فاز مطابق معادله (۱۹)، و نیز امکان تحریک لایه SMA فوقانی و تحتانی با دو درجه حرارت متفاوت  $T_{n2}$  و  $T_{n4}$ ، تعداد ۹ ترکیب مختلف از حالات برای محاسبه نتیجه های تنش ناشی از تبدیل فاز در کل مقطع محرک، امکانپذیر است، یعنی:

$$N^P = N_u^{Pi} + N_d^{Pj} \quad (i=1 \text{ or } 2 \text{ or } 3), (j=1 \text{ or } 2 \text{ or } 3) \quad (20)$$

که در آن:

$$N_d^P = \begin{cases} N_d^{P1} = 0 \\ N_d^{P2} = \Lambda_d \varepsilon^0 + \Delta_d \kappa + \Gamma_d, \\ N_d^{P3} = \Omega A_{n4} \end{cases}$$

که از حل آنها نتیجه می شود:

$$\varepsilon^0 = \frac{1}{\det C} \begin{vmatrix} N^M + N^T + \Gamma & B - \Delta \\ M^M + M^T + \Gamma' & D - \Delta' \end{vmatrix}$$

$$\kappa = \frac{1}{\det C} \begin{vmatrix} A - \Lambda & N^M + N^T + \Gamma \\ B - \Lambda' & M^M + M^T + \Gamma' \end{vmatrix}$$

(۲۹)

که در آن:

$$\det C = (A - \Lambda)(D - \Delta') - (B - \Delta)(B - \Lambda')$$

(۳۰)

تساویهای (۲۹) کرنش صفحه میانی و انحناء محرک را بر حسب پارامترهای قابل تغییر مسئله، شامل درجه حرارتهای تحریک، خواص هندسی و فیزیکی بدست می دهند. در اینجا بمنظور رعایت اختصار از ارائه فرم بسط یافته تساویهای (۲۹) بر حسب این پارامترها، خودداری می شود.

پس از تعیین  $\varepsilon^0$  و  $\kappa$ ، می توان جابجائی محوری  $u^0$  و خیز عرضی  $w$  محرک را از حل معادلات دیفرانسیل (۵) تعیین نمود.

### نتایج عددی

مدل ریاضی پیشنهاد شده در بخش قبل بر روی یک مثال خاص از این نوع محرک SMA اعمال گردید. ابعاد مقطع و شرایط مرزی و بارگذاری این محرک در شکل (۲) نمایش داده شده است. در این مثال فرض بر آنستکه فقط لایه SMA فوقانی تحت گرمایش اهمی قرار گرفته است. نیتروژن مایع با نقطه جوش  $T_0 = 77^K$  بعنوان چاه حرارتی در نظر گرفته شده، و پارامترهای هندسی این محرک بصورت زیر اختیار گردیده است:

$$b/a=1, \quad L/a=15,$$

$$t_n/a=1/20 \quad (t_{n1}=t_{n2}=t_n),$$

$$t_m/a=\tau_m$$

(۳۱)

(بجز در مواردیکه تصریح شود)  $= 6/20$

$$\Delta'_u = -\frac{jE_n I_{n2} \Omega}{C_A (A_f - A_s) - j\Omega}$$

$$\Gamma'_u = \left[ \frac{C_A (T_{n2} - A_s) - j\Theta \Delta T_{n2}}{C_A (A_f - A_s) - j\Omega} \right] L_{n2} \Omega$$

(۲۵)

همچنین ضرائب  $\Delta'_d, \Lambda'_d, \Gamma'_d$  از عباراتی مشابه فوق بدست می آیند با این تفاوت که در آنها پارامترهای  $I_{n2}, L_{n2}, T_{n2}$  بترتیب با  $I_{n4}, L_{n4}, T_{n4}$  جایگزین می شوند.

لازم به ذکر است که در صورتیکه کرنش باقیمانده مارتنزیتی ( $\varepsilon_r$ ) ایجاد شده در لایه های SMA کمتر از مقدار حدی  $\varepsilon_L$  باشد، در تساویهای (۲۱) تا (۲۵) بایستی بجای  $\Omega$  مقدار تصحیح شده آنرا از رابطه  $\Omega_c = \Omega \varepsilon_r / \varepsilon_L$  محاسبه و جایگزین نمود [۱]. اکنون میتوان منتجه های کل ناشی از تبدیل فاز را در تمام حالات با عبارات زیر بیان نمود:

$$N^P = \Lambda \varepsilon^0 + \Delta \kappa + \Gamma,$$

$$M^P = \Lambda' \varepsilon^0 + \Delta' \kappa + \Gamma'$$

(۲۶)

که در آنها:

$$\Lambda = \Lambda_u + \Lambda_d, \quad \Delta = \Delta_u + \Delta_d, \quad \Gamma = \Gamma_u + \Gamma_d,$$

$$\Lambda' = \Lambda'_u + \Lambda'_d, \quad \Delta' = \Delta'_u + \Delta'_d,$$

$$\Gamma' = \Gamma'_u + \Gamma'_d$$

(۲۷)

باید توجه داشت که برای هر یک از لایه های SMA فوقانی و تحتانی، در بازه های اول و سوم گرمایش ضرائب  $\Lambda, \Delta$  و نیز  $\Lambda', \Delta'$  برابر با صفر خواهند بود.

### حل معادلات نیرو-تغییر شکل

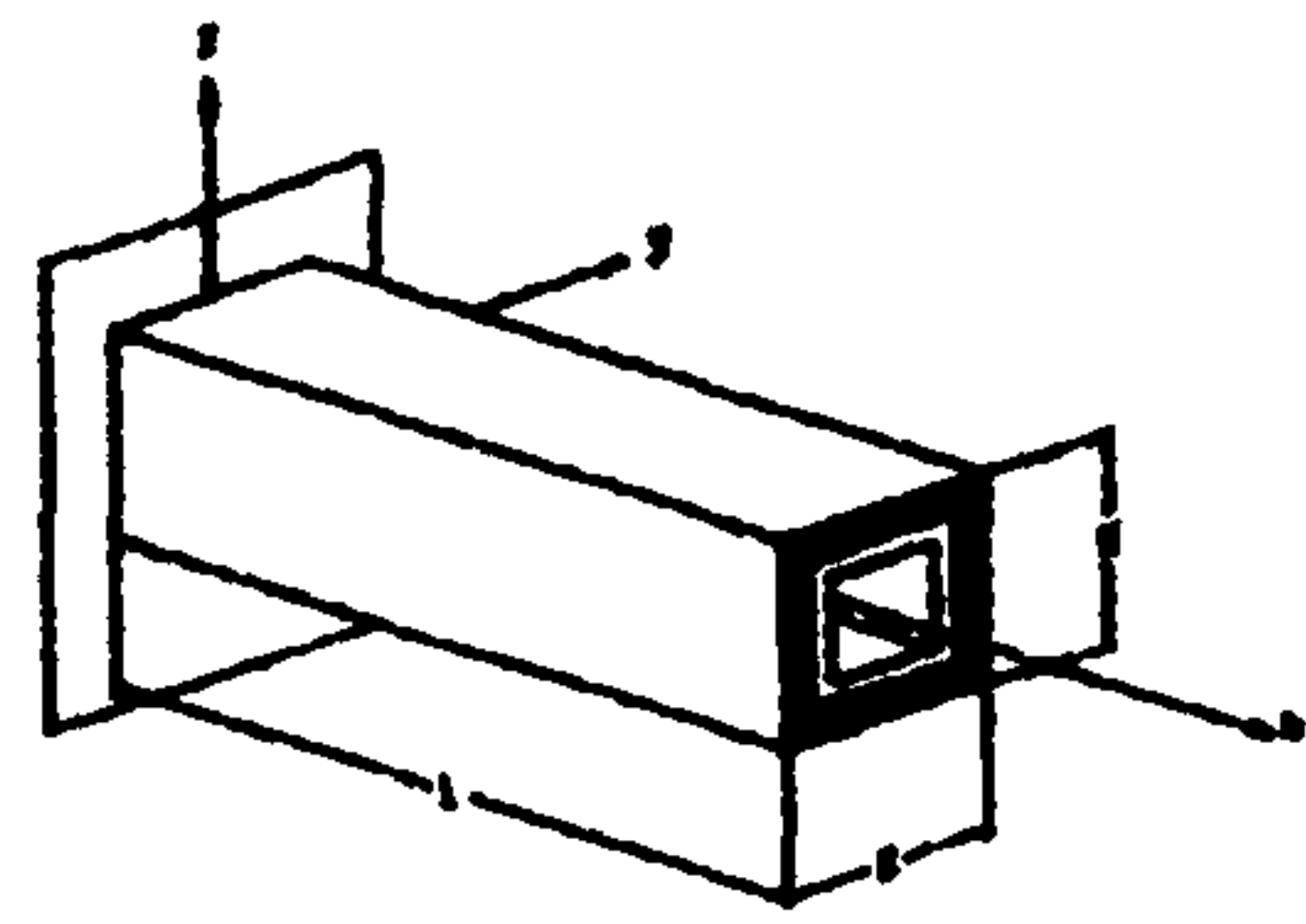
پس از تعیین مؤلفه های مختلف منتجه های تنش در محرک، و با جایگزینی آنها در تساویهای (۱۰) به دو معادله جبری خطی بر حسب مجهولات  $\varepsilon^0$  و  $\kappa$  دست می یابیم:

$$N^E = N^M + N^T + (\Lambda \varepsilon^0 + \Delta \kappa + \Gamma) = A \varepsilon^0 + B \kappa,$$

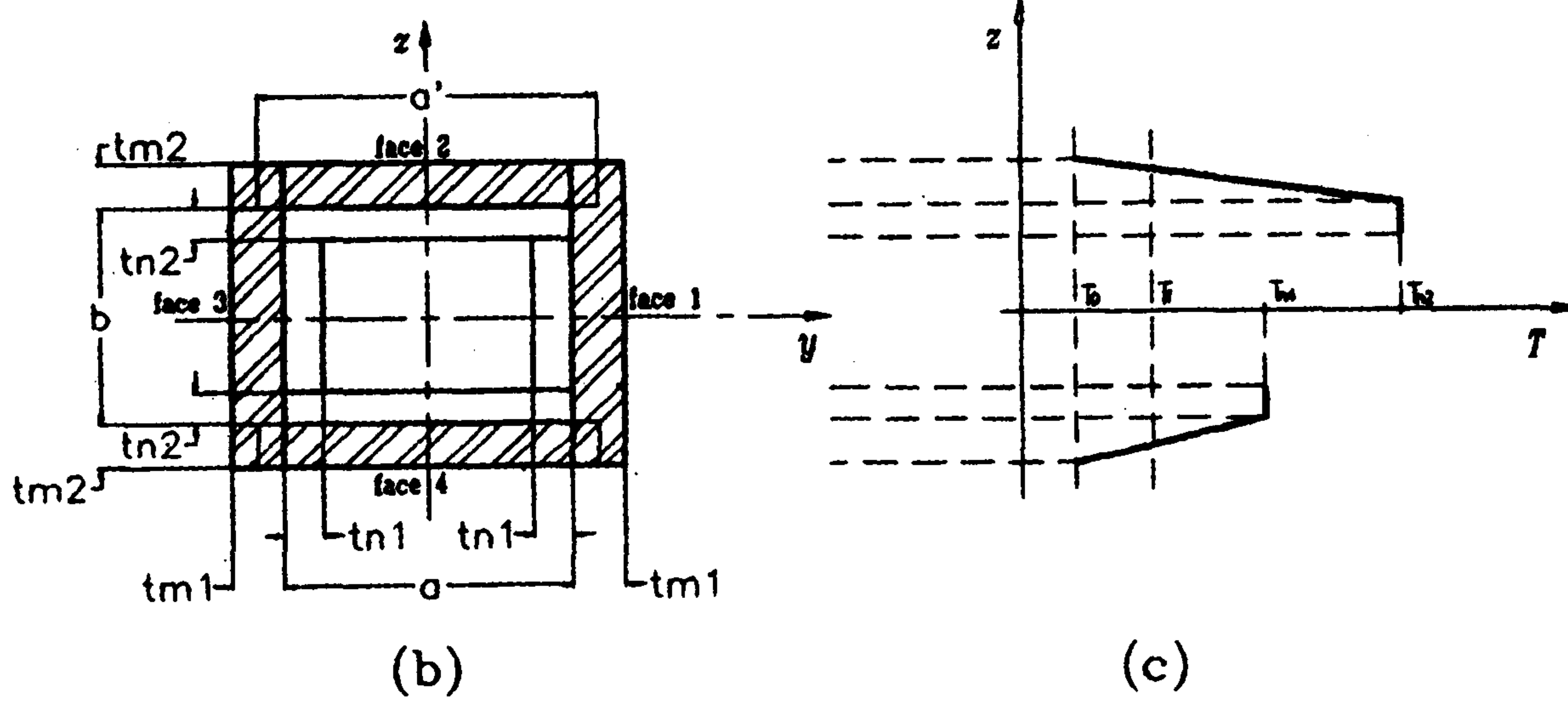
$$M^E = M^M + M^T + (\Lambda' \varepsilon^0 + \Delta' \kappa + \Gamma') = B \varepsilon^0 + D \kappa$$

(۲۸)

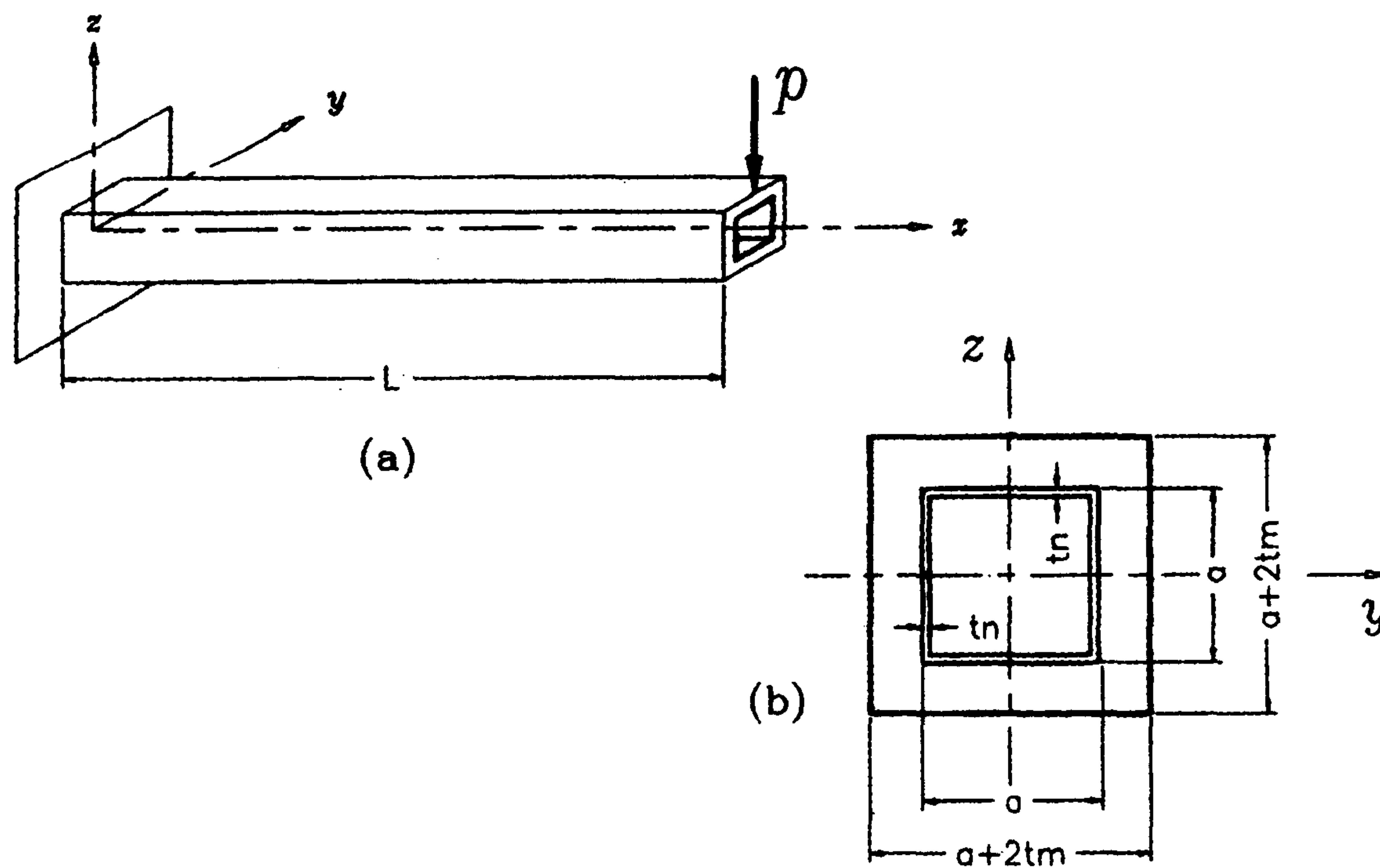
$$(t_{m1} = t_{m2} = t_m)$$



(a)



شکل ۱: (a) شماء کلی محرک SMA مورد مطالعه. (b) جزئیات و ابعاد مقطع محرک. (c) توزیع دما در وجوه فوقانی و تحتانی محرک.



شکل ۲: حالت خاصی از محرک SMA مورد مطالعه، با مقطع مربع و شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد.



جدول ۱: خواص فیزیکی نایتینول-۵۵ و سیلگارد [۳، ۱۰، ۱۴].

سیلگارد (SYLGARD)	نایتینول-۵۵ (55-Nitinol)	واحد	خواص فیزیکی
0.146		$W/m^{\circ}C$	ضریب هدایت حرارتی، $k$
$2.15^*$	26300 (Mar)	Mpa	مدول الاستیسیته، $E$
$27 \times 10^{-5}$		$1/^{\circ}C$	ضریب انبساط حرارتی، $\alpha$
—	0.55	$Mpa/^{\circ}C$	ضریب ترموالاستیک، $\Theta$
—	6.7	%	حد کرنش بازیافتی، $\epsilon_T$
—	13.8	$Mpa/^{\circ}C$	ضریب تاثیر تنش بر تبدیل فاز، $C_A$
—	34.5	$^{\circ}C$	دمای شروع تبدیل به فاز
—	49	$^{\circ}C$	دمای خاتمه تبدیل به فاز
$-2.08 \times 10^{-3}$	0	$Mpa/^{\circ}C$	شیب تغییرات مدول یانگ الاستومر

\* مدول الاستیسیته سیلگارد در دمای جوش نیتروژن مایع ( $-195/8^{\circ}C$ ).

مدول الاستومر با درجه حرارت، و کرنش اولیه مارتنزیتی در لایه های آلیاژ حافظه دار، بدست می آیند. در اینجا بمنظور رعایت اختصار از ارائه جزئیات محاسبات این ضرائب خودداری می کنیم. محاسبات این مثال توسط یک برنامه کامپیوتری به انجام رسیده و اثر تغییرات هر یک از پارامترهای فوق الذکر بر روی پاسخهای جابجائی محرک بررسی شده و نتایج آن در نمودارهای اشکال (۳) تا (۸) ارائه گردیده است. کلیه این نتایج عددی برای یک بارگذاری خارجی برابر  $\bar{p} = p/a^2 = 1$  بدست آمده است.

نتایج بدست آمده برای پارامتر درجه حرارت تحریک مبین آنستکه وقتی  $T_{n2}$  به دمای تبدیل فاز مکانیکی رسیده و تبدیل فاز ونتیجتا بازیافت کرنش در این لایه آغاز می شود، تغییرات هنگفتی در پاسخ سازه بوجود آمده و محرک بمقدار قابل ملاحظه ای نقطه اثر بار خارجی را جابجا می نماید، و بر ضد آن کار مکانیکی انجام میدهد (شکل (۳)). همچنین نتایج عددی نشان میدهند که اثر تنش های حرارتی در مقایسه با اثر تنش های تبدیل فاز بر روی پاسخ محرک ناچیز است. نکته دیگر آنکه درجه حرارت های شروع و خاتمه تبدیل فاز، بمیزان قابل توجهی بر اثر تنش تغییر می نمایند. شکل (۴) توزیع تنش نرمال و کسر مارتنزیت در صفحه میانی لایه SMA فوقانی را

همچنین خواص فیزیکی لایه های SMA و الاستومر مطابق جدول (۱) انتخاب شده، و مقدار ضریب تبدیل فاز  $\Omega$  از تساوی زیر محاسبه می شود:

$$\Omega = -E_n \epsilon_L = -1762 \text{ Mpa}$$

(۳۲)

اگر روابط کلی بدست آمده در مدلسازی را برای این مثال خاص استخراج نمائیم، نهایتاً به جوابهای زیر برای انحنای بی بعد شده در صفحه  $xz$  و کرنش نرمال صفحه میانی بر حسب مختصه  $x$  بی بعد شده نائل می شویم:

$$\epsilon^0 = G_1 \bar{x} + G_2,$$

$$\bar{\kappa} = H_1 \bar{x} + H_2$$

(۳۳)

و نیز برای جابجائیهای بی بعد شده خواهیم داشت:

$$\bar{u}^0 = \frac{1}{2} G_1 \bar{x}^2 + G_2 \bar{x};$$

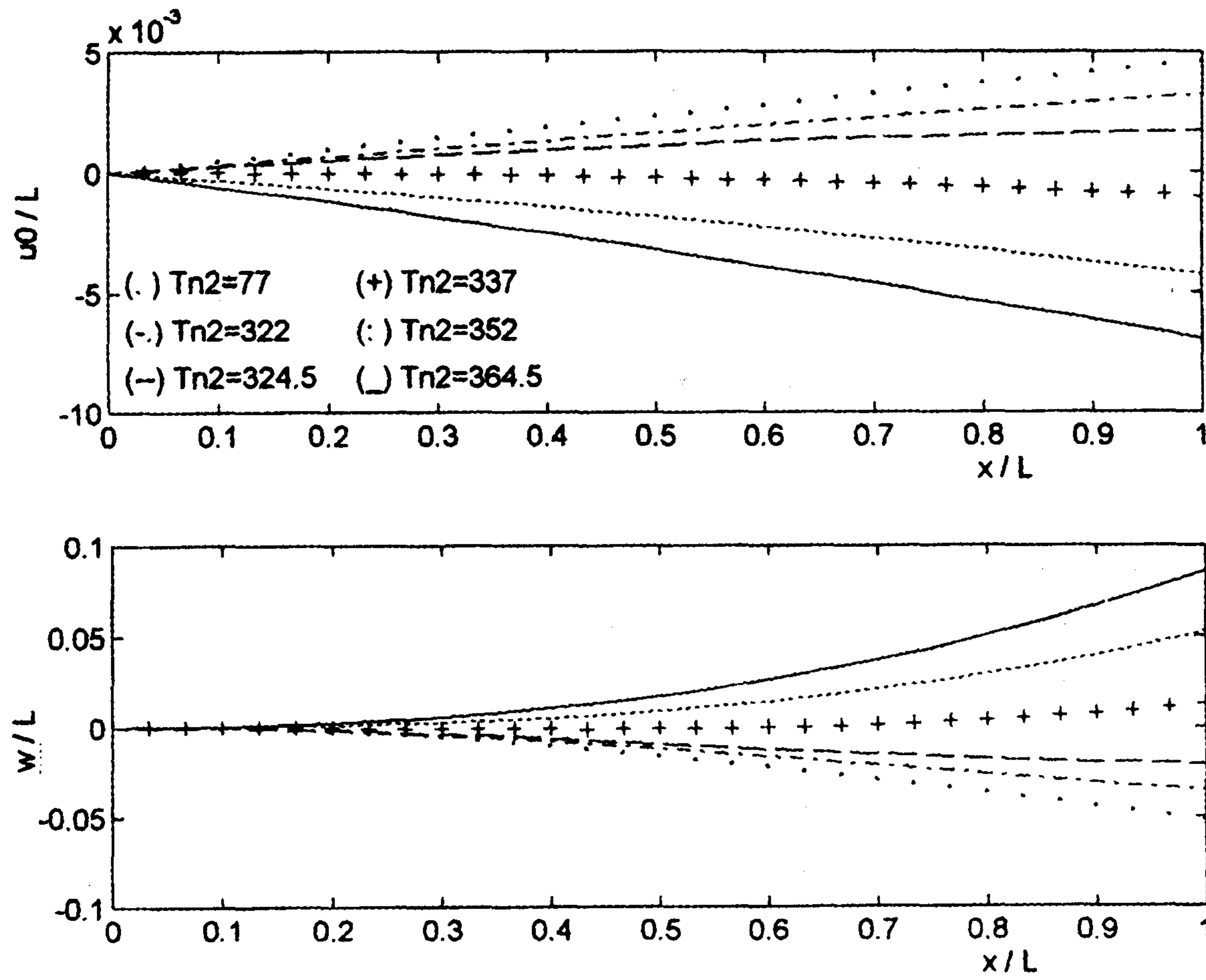
$$\bar{w} = -\frac{5}{2} H_1 \bar{x}^3 - \frac{15}{2} H_2 \bar{x}^2$$

(۳۴)

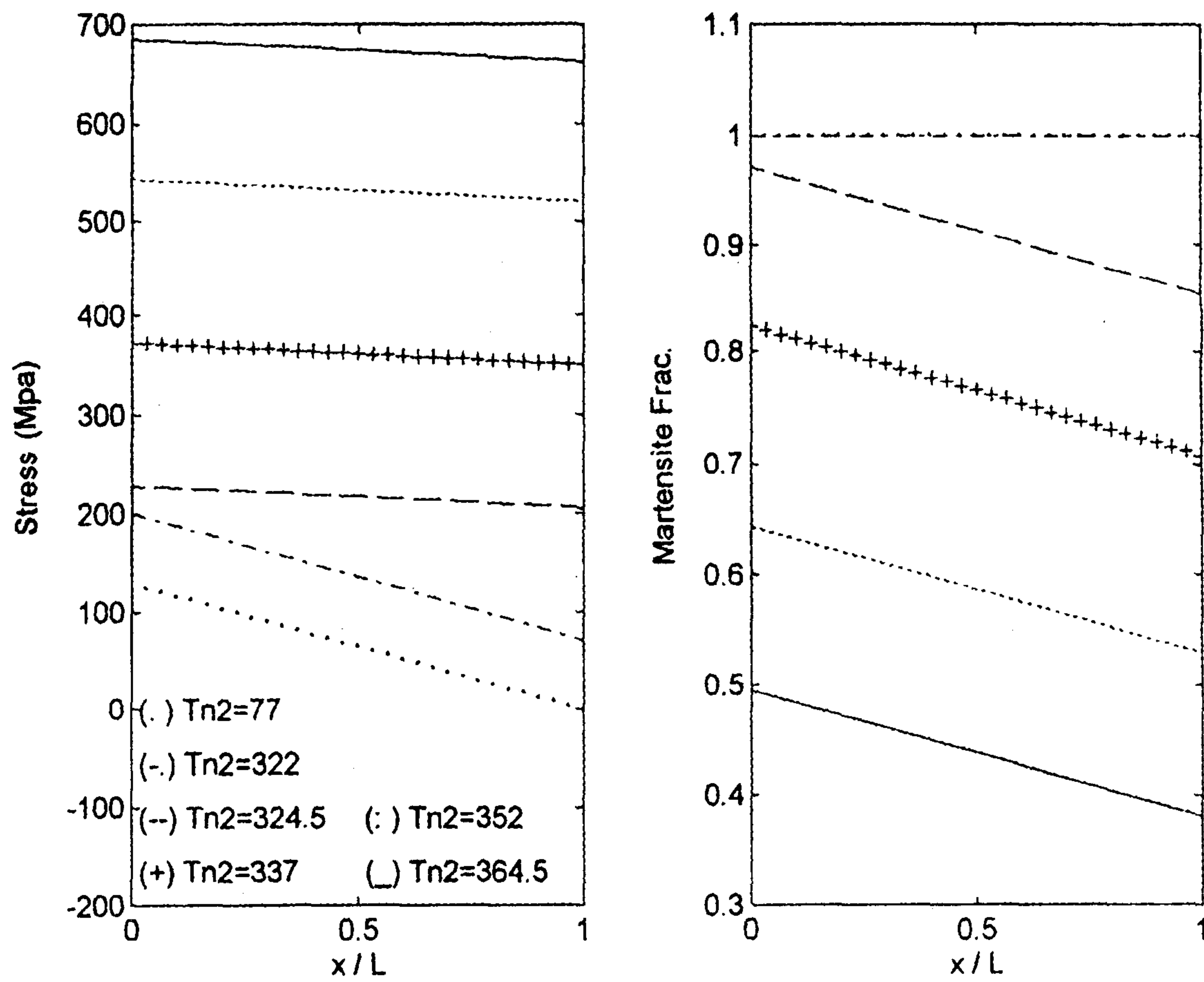
که در آنها ضرائب  $G_1$ ،  $G_2$ ،  $H_1$  و  $H_2$  بر حسب پارامترهای قابل تغییر شامل درجه حرارت تحریک، ضخامت و مدول یانگ لایه های الاستومر، نرخ تغییر



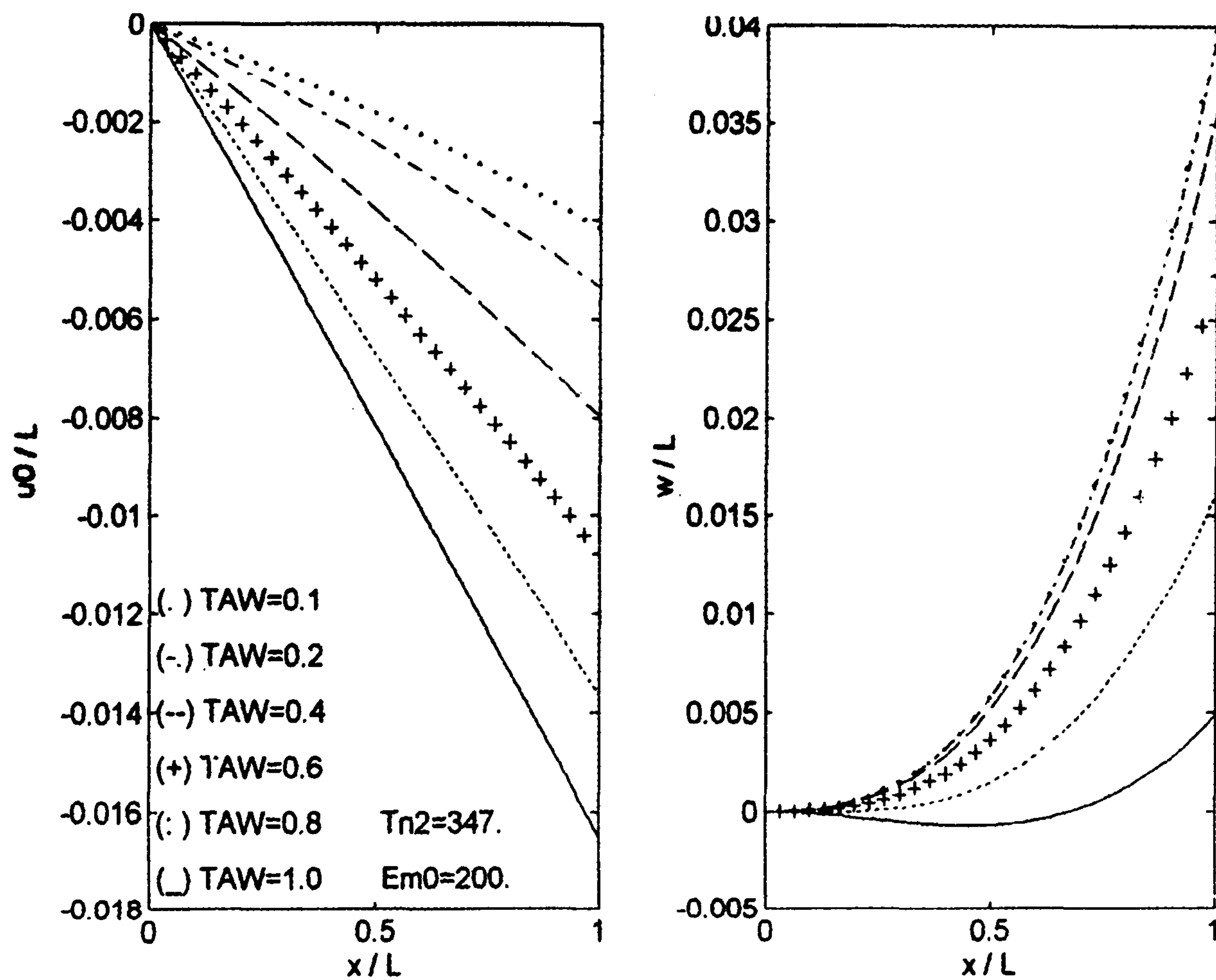
بازاء درجه حرارت‌های تحریک مختلف، نمایش میدهد. در این نمودار مشاهده می شود که مقدار تنش در لایه SMA



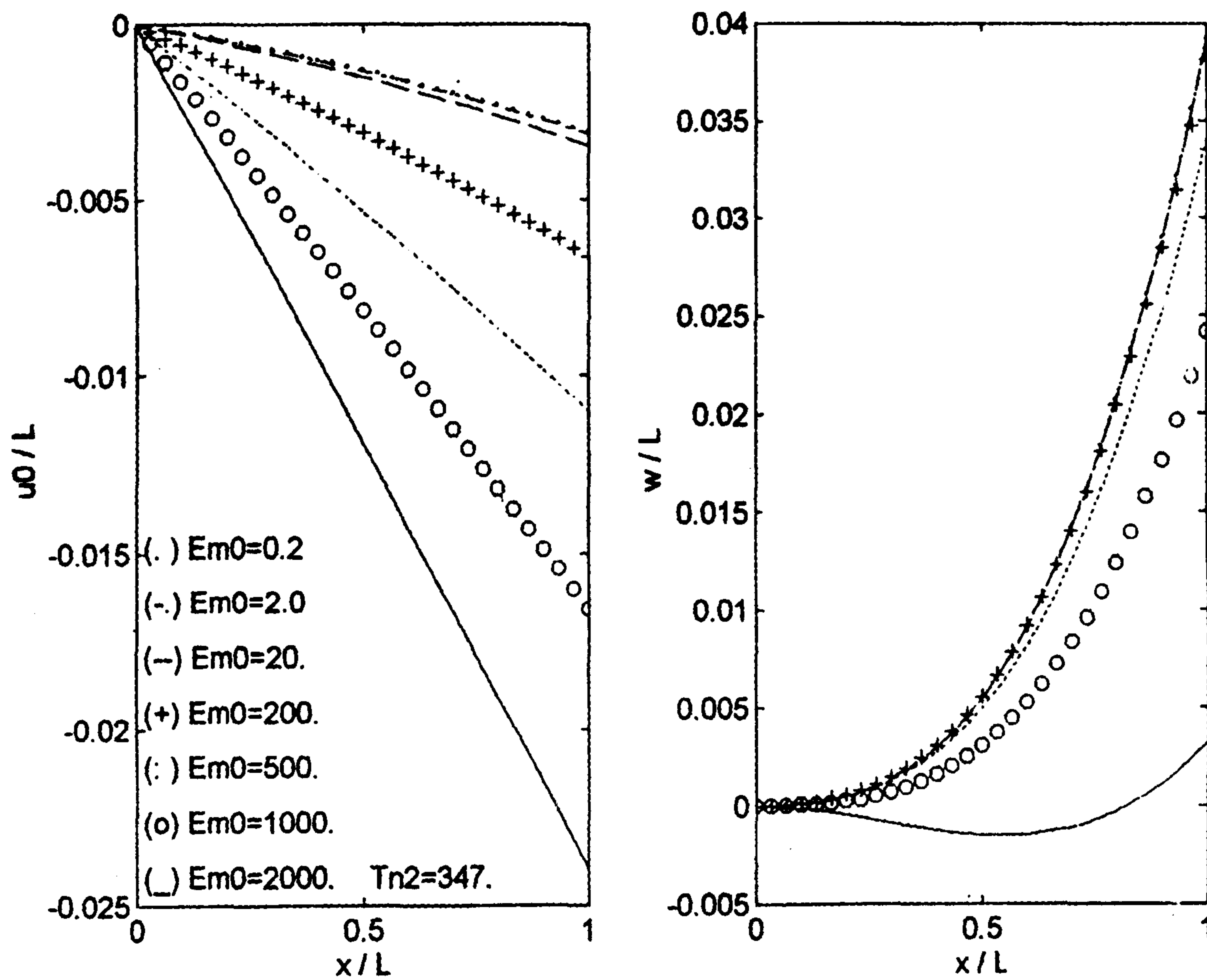
شکل ۳: اثر درجه حرارت تحریک ( $T_{n2}$ ) بر پاسخ های جابجایی.



شکل ۴: منحنی های توزیع تنش نرمال و کسر مارتنزیت در صفحه میانی لایه SMA فوقانی برای  $T_{n2}$  های مختلف.

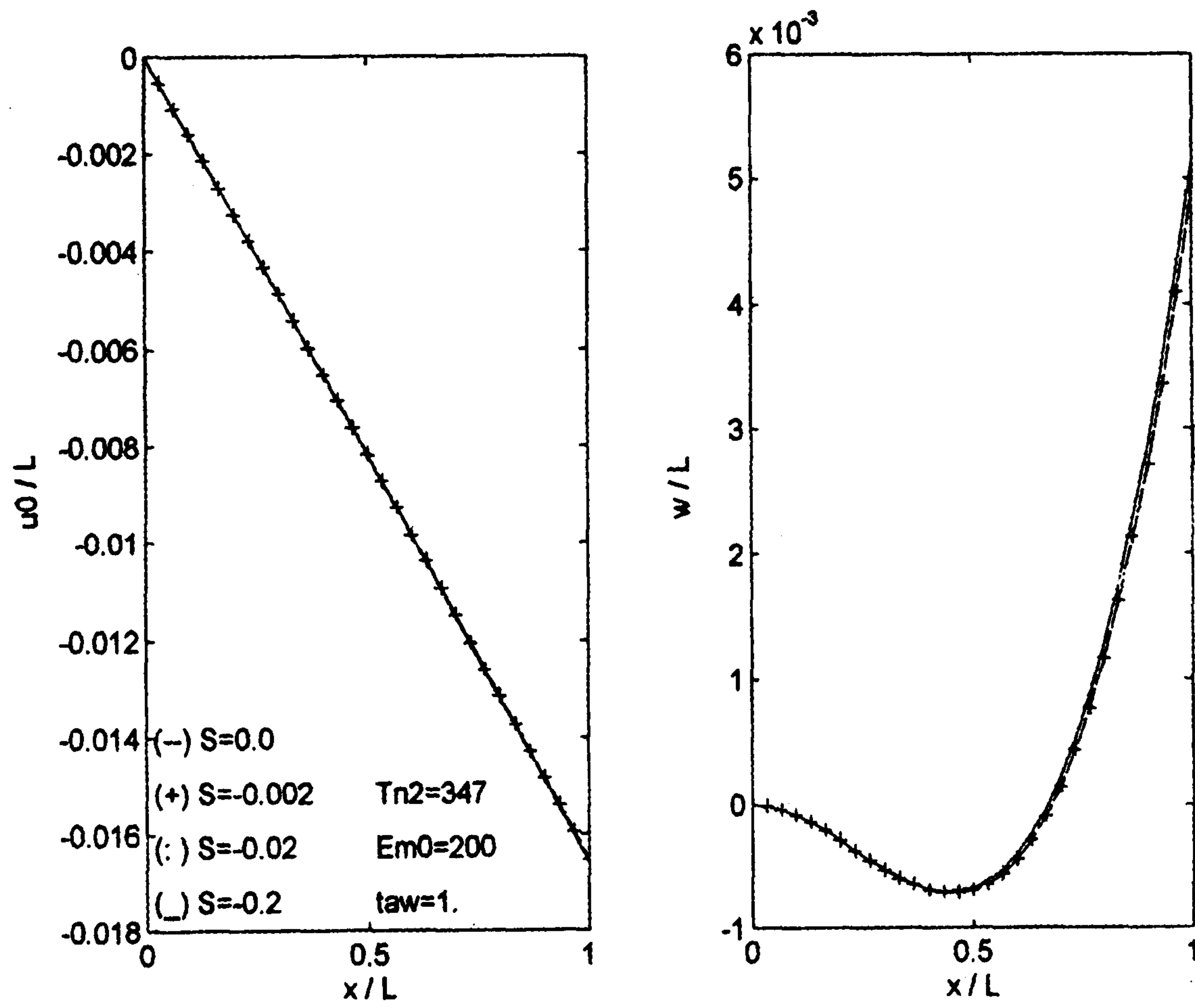


شکل ۵: اثر ضخامت لایه های الاستومر ( $\tau_m$ ) بر پاسخ های جابجائی محرک.

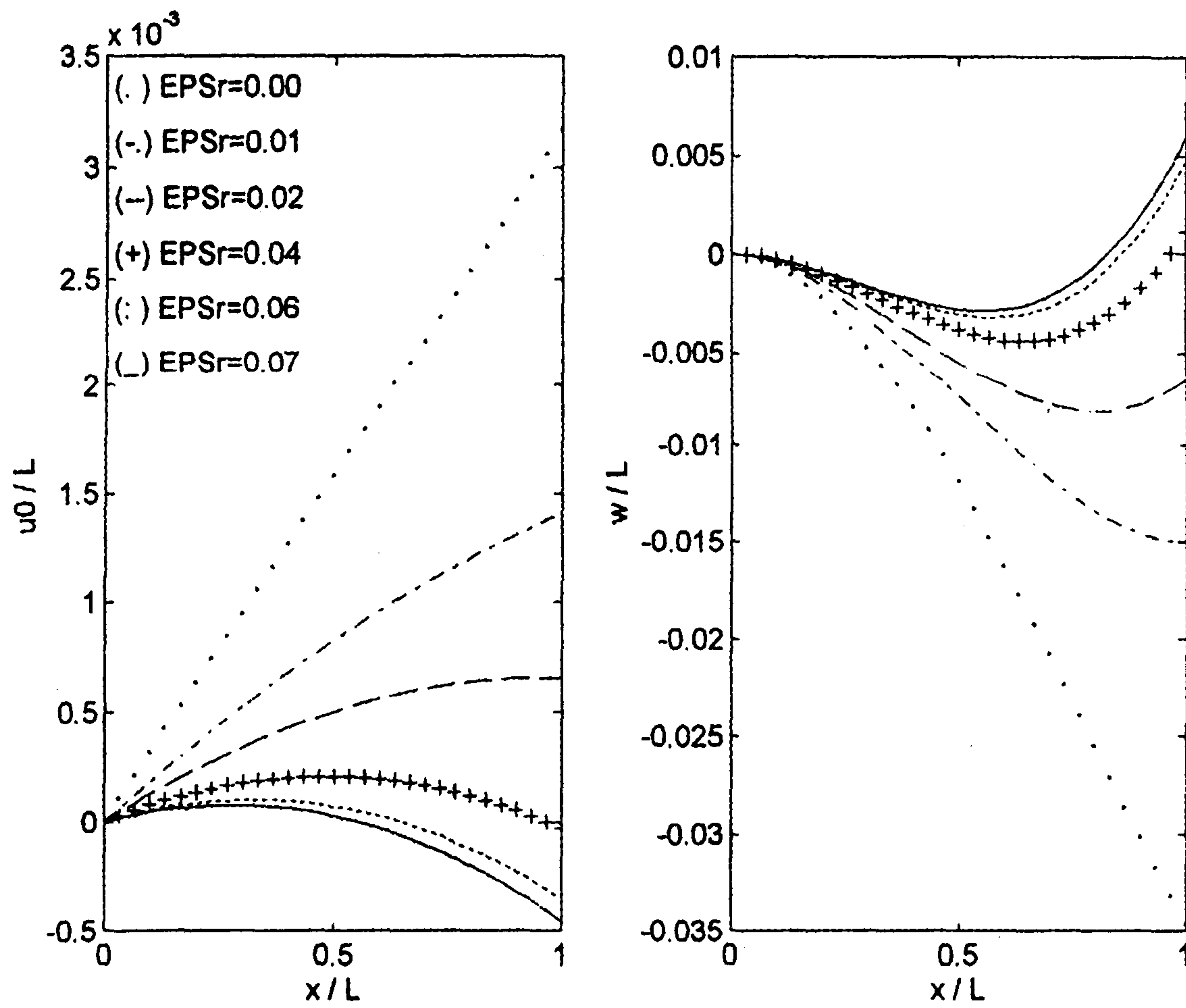


شکل ۶: اثر مدول یانگ الاستومر ( $E_m$ ) بر پاسخ های جابجائی محرک.





شکل ۷: اثر شیب تغییرات مدول با دما ( $S$ ) بر پاسخ های جابجائی محرک.



شکل ۸: اثر کرنش اولیه مارتنزیتی ( $\epsilon_r$ ) بر پاسخ های جابجائی محرک.

مطالعه قرار گرفته و نتایج عددی آن بصورت دسته منحنی هایی ارائه شده است. بطور کلی، بررسی نتایج عددی بدست آمده برای این مثال نشانگر آنستکه پاسخ های پیش بینی شده برای محرک و حساسیت این پاسخ ها به پارامترهای مختلف، با رفتارهای مورد انتظار از این محرک همخوانی دارند. بر این اساس، شاید بتوان نتیجه گیری نمود که مدل تئوری پیشنهاد شده ابزار محاسباتی مؤثر و قابل اعتمادی جهت تحلیل تقریبی رفتار این نوع محرک SMA می باشد. قابل ذکر است که اگر چه این مدل ریاضی برای یک شکل خاص از مقطع این محرک ارایه شده است اما متد پیشنهادی برای تحلیل محرک ها با هر شکل مقطع قابل بکارگیری است. میزان دقت این مدل تئوری را میتوان با تهیه یک فرمولاسیون اجزاء محدود برای پاسخ گذرای محرک به تحریک حرارتی، و مقایسه نتایج عددی آن در زمان رسیدن به وضعیت پایدار، با نتایج عددی حاصل از مدل ایستای ارائه شده در این مقاله، تعیین و ارزیابی نمود. تهیه چنین فرمولاسیونی خود موضوع پژوهش دیگری را تشکیل می دهد.

### تشکر و قدردانی

این تحقیق بخشی از یک طرح پژوهشی است. لذا بدینوسیله از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه تهران و دانشکده فنی جهت ایجاد زمینه لازم برای انجام این تحقیق تشکر و قدر دانی می شود. همچنین از راهنمائیهای ارزشمند جناب آقای دکتر فرامرز گردانی نژاد استاد دانشگاه نوادا قدردانی و تشکر می گردد.

### فهرست علائم

- a : عرض مقطع محرک بدون لایه های الاستومر
- b : ارتفاع مقطع محرک بدون لایه های الاستومر
- a' : عرض مؤثر لایه های الاستومر در انتقال حرارت
- A, B, D : ضرایب سختی تیر (محرک):
- A<sub>s</sub>, A<sub>f</sub> : درجه حرارت های شروع و خاتمه تبدیل به فاز آستنیت در شرایط بی تنش
- A<sub>m</sub> : سطح مقطع کل لایه های الاستومر
- A<sub>n</sub> : سطح مقطع کل لایه های SMA

بمیزان قابل ملاحظه ای با درجه حرارت تحریک تغییر می کند. در شکل های (۵) و (۶) تاثیر ضخامت و مدول یانگ لایه های الاستومر بر پاسخ های محرک بررسی شده اند. در اینجا نیز تغییرات شدیدی در پاسخ جابجایی کارانداز با تغییرات این دو پارامتر مشاهده می شود. نتایج حاصله برای پارامتر شیب تغییرات مدول یانگ الاستومر با دما (S) بیانگر آنستکه در حالتیکه الاستومر نسبت به آلیاژ SMA دارای مدول یانگ نسبتاً کوچکی باشد، تاثیر پارامتر S بر پاسخ محرک ناچیز و قابل صرفنظر کردن است (شکل (۷)). مطالعه بر روی پارامتر  $\epsilon_r$  یعنی کرنش باقیمانده مارتنزیتی در لایه های SMA، مبین آنستکه تغییرات این پارامتر تاثیر زیادی بر پاسخ محرک دارد، و می توان گفت که  $\epsilon_r$  پارامتری اساسی در مکانیزم عمل محرک های SMA است (شکل (۸)). اما با نزدیک شدن مقدار آن به مقدار حدی  $\epsilon_L$ ، حساسیت پاسخ محرک به تغییرات این پارامتر کم می شود.

### بحث و نتیجه گیری

در این مقاله برای پاسخ سازه ای ایستای نوعی محرک SMA به تحریک حرارتی، و تحت بارگذاری و شرایط مرزی اختیاری یک مدل تئوری ارائه گردید. این محرک دارای ساختار تیر لایه ای مرکب با مقطع مستطیل توخالی، متشکل از لایه های آلیاژ حافظه دار و الاستومر می باشد، و قابلیت حرکت و اعمال نیرو در سه بعد را دارد. در این مدلسازی از یک معادله مشخصه ارائه شده توسط Liang و Rogers استفاده بعمل آمده است که در آن متغیر کسر مارتنزیت بعنوان یک متغیر حالت جدید در نظر گرفته شده است. این مدل تئوری جوابهای صریحی برای پاسخ سازه ای محرک، شامل کرنش صفحه میانی و انحناء بر حسب پارامترهای قابل تغییر بدست می دهد. همچنین توزیع تنش و کسر مارتنزیت در لایه های SMA قابل محاسبه اند. معادلات و روابط کلی بدست آمده در مرحله مدلسازی بر روی یک مثال خاص از این نوع محرک SMA اعمال گردیده و محاسبات مربوطه بکمک یک برنامه کامپیوتری به انجام رسید. اثر پارامترهای مختلف در پاسخ های جابجایی محرک مورد



$T_0$ : درجه حرارت چاه حرارتی	$A_T$ : سطح مقطع کل محرک
$T_f$ : درجه حرارت ساخت محرک	$C_A$ : ثابت ماده مربوط به اثر تنش بر تبدیل فاز
$T_{mi}$ : توزیع دما در لایه الاستومر $i$ ام	$e$ : کرنش محوری نسبی در لایه های SMA
$T_{ni}$ : درجه حرارت لایه SMA شماره $i$ ام	$E_m$ : مدول یانگ الاستومر
$u, w$ : جابجایی محوری و عرضی کل	$E_{m0}$ : مدول یانگ الاستومر در دمای چاه حرارتی
$u^0$ : جابجایی محوری صفحه میانی تیر	$E_n$ : مدول یانگ آلیاژ حافظه دار
$\bar{u}^0, \bar{w}$ : جابجایی محوری و عرضی بی بعد شده	$I_{ni}$ : لنگر ماند سطح مقطع لایه SMA شماره $i$ ام
$x, y, z$ : مؤلفه های دستگاه مختصات دکارتی	حول محور $Y$ ها
$\bar{x}$ : مختصه $x$ بی بعد شده	$k_m$ : ضریب هدایت حرارتی الاستومر
$\alpha_m$ : ضریب انبساط حرارتی الاستومر	$L$ : طول محرک
$\varepsilon$ : کرنش نرمال در امتداد محور $x$ ها	$L_{ni}$ : لنگر اول سطح مقطع لایه SMA شماره $i$ ام حول
$\varepsilon^0$ : کرنش نرمال صفحه میانی در امتداد محور $x$ ها	محور $Y$ ها
$\varepsilon_L$ : حد کرنش بازیافتی در آلیاژ حافظه دار	$m_i$ : شیب تغییرات دما در ضخامت لایه الاستومر $i$ ام
$\varepsilon_r$ : کرنش باقیمانده مارتنزیتی در لایه های SMA	$m'_i$ : شیب تغییرات مدول یانگ در ضخامت لایه
$\Theta$ : ضریب ترموالاستیک SMA	الاستومر $i$ ام
$\kappa$ : انحناء محرک در صفحه $xz$	$M^E$ : لنگر خمشی مؤثر
$\bar{\kappa}$ : انحناء بی بعد شده محرک در صفحه $xz$	$M^M$ : لنگر خمشی مکانیکی
$\Omega$ : ضریب تبدیل فاز	$M^P$ : لنگر خمشی ناشی از تبدیل فاز
$\Omega_c$ : ضریب تبدیل فاز تصحیح شده	$M^T$ : لنگر خمشی ناشی از تنش های حرارتی
$\sigma$ : تنش نرمال در امتداد محور $x$ ها	$N^E$ : نیروی محوری مؤثر
$\tau_m$ : ضخامت بی بعد شده لایه الاستومر	$N^M$ : نیروی محوری مکانیکی
$\psi$ : شیب خمشی	$N^P$ : نیروی محوری ناشی از تبدیل فاز
$\xi$ : کسر مارتنزیت	$N^T$ : نیروی محوری ناشی از تنش های حرارتی
$( )_{m,n}$ : زیر نویس های $m$ و $n$ بترتیب بمعنای	$P_i$ : توان اهمی تحریک لایه SMA شماره $i$ ام
الاستومر و SMA می باشند.	$S$ : شیب تغییرات مدول یانگ الاستومر با دما
$( )_{u,d}$ : زیر نویس های $u$ و $d$ بترتیب اشاره به لایه	$t_{m1}$ : ضخامت لایه های الاستومر جانبی
فوقانی و تحتانی دارند.	$t_{m2}$ : ضخامت لایه های الاستومر فوقانی و تحتانی
	$t_{n1}$ : ضخامت لایه های SMA جانبی
	$t_{n2}$ : ضخامت لایه های SMA فوقانی و تحتانی

## مراجع

- 1 - Brinson, L. C. (1992). "Constitutive behavior of shape memory alloys: One-dimensional thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable." *Proc. of the Conference on Recent Advances in Adaptive and Sensory Materials and their Applications*, April.
- 2 - Gibson, R.F., (1994). *Principles of composite material mechanics*, McGraw-Hill International Edition.
- 3 - Harper, C.A., (1975). *HandBook of plastics and elastomers*, McGraw-Hill Book Company.

- 4 - Hebda, D.A. and White, S. R. (1995). "Structural behavior of SMA composite beams", AMD-Vol.2061 MD-Vol.58, *Adaptive Material Systems, ASME*.
- 5 - Holman, J.P. (1981). *Heat Transfer*. McGraw-hill Book Company.
- 6 - Lagoudas, D. C. and Tadjbakhsh, I. G. (1993). "Deformations of active flexible rods with embedded line actuators." AMD-Vol.167, *Recent Developments in Stability, Vibration, and Control of Structural Systems*, PP .89-105.
- 7 - Liang, C. and Rogers, C. A. (1990). "One-dimensional thermo-mechanical constitutive relations for shape memory materials." *AIAA-90-1027-CP*.
- 8 - Liang, C. and Rogers, C. A. (1992). "A multi-dimensional constitutive model for shape memory alloys." *J. of Engineering Mathematics*, Vol. 26, PP. 429-443.
- 9 - Lu., A., Grant D. and Hayvard, V. (1997). "Design and comparison of high strain shape memory alloy actuators." *Proc. of the 97 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, New Mexico.
- 10 - Malafeew, E., et al. (1992). "Distributed electro-thermo-mechanical analysis of shape memory alloy actuators." *Proc. of the conference on Recent Advances in Adaptive and Sensory Materials and their Applications*, April.
- 11 - O'Connor, L., (1995). "Memory alloys remember two shapes." *J. of Mechanical Engineering*, Dec., PP. 78-81.
- 12 - Schetky, L. and Mc, D. (1979). "Shape memory alloys." *ScientificAmerican*, Vol. 241, PP. 74-93.
- 13 - Schetky, L. and Wu, H. (1991). "The properties and processing of shape memory alloys for use as actuators in intelligent composite materials." Ad-Vol.24/AMD-Vol.123, *Smart Struct. and Materials, ASME*, PP. 65-71.
- 14 - Wu, W. (1996). "Modeling and analysis of one and two dimensional shape memory alloy-elastomer actuators." *Ph.D. Dissertation*, Department of Mech. Eng., Univ. of Nevada.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 – Shape Memory Alloys
- 2 – Elastomer
- 3 - Shape Memory Effect
- 4 – Martensite
- 5 – Austnite
- 6 – Thermoset
- 7 – Thermoplastic
- 8 – Reinforced Composite
- 9 – Material & Geometrical Nonlinearly
- 10 – Closed-Form Solution