وجود جواب تناوبی معادله دیفرانسیل رسته سوم غیرخطی یک مدل ریاضی برای ترمز خودروهای سنگین

غلامرضا شهریار حشمتی
استادیار گروه علوم پایه مهندسی - دانشکده فنی - دانشگاه تهران
بهمن مهری
استاد دانشکده ریاضی - دانشگاه صنعتی شریف
دارا معظمی
استادیار گروه علوم پایه مهندسی - دانشکده فنی - دانشگاه تهران
علیرضا ذکائی
استادیار دانشکده ریاضی - دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی
(تاریخ دریافت ۷۷/۳/۱۶، تاریخ تصویب ۷۷/۸/۹)

چکیده

در این مقاله ما شرط لازم و کافی برای وجود جواب تناوبی غیربدیهی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سوم غیرخطی را مطالعه نموده و با استفاده از قضیه نقطه ثابت شادر[۱] ، وجود این جواب را ثابت می‌کنیم. سپس بااستفاده از کامپیوتر جواب تناوبی را در حالات خاص تقریب نموده و آن را در صفحات xt ; xx′ و x′x′′ رسم می‌نمائیم. مطلب جالب در این مقاله ، کاربرد این مسئله در ترمز خودروهای سنگین است، یعنی ما بااستفاده از فرمول به دست آمده در [۳]، مدل ریاضی ترمز خودروهای سنگین را به صورت معادله دیفرانسیل مرتبه سوم در آورده و آن را حل می‌نمائیم.

کلید واژه‌ها: جواب تناوبی ، قضیه نقطه ثابت شادر ، تابع گرین ، عملگر فشرده

مقدمه

مدل ریاضی بسیاری از پدیده های فیزیکی و مهندسی به معادلات دیفرانسیل (معمولی یا با مشتقات جزئی) منجر می شود. از اولین کسانی که این مسئله را مورد توجه قرار داد گالیه بود که یک مدل ریاضی برای آونگ‌های ساده ارائه داد. واضح است که از حل و به دست آوردن جواب معادله دیفرانسیل ، حرکت سیستم مشخص خواهد شد.

در این مقاله مدل ریاضی ترمز خودروهای سنگین با فرضیاتی قابل قبول تبدیل به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه سوم می شود که تقریب بهتری از مدل خطی کلاسیک آن است.

در حقیقت کار اصلی این مقاله اثبات وجود جواب تناوبی معادله به دست آمده با استفاده از قضیه نقطه ثابت شادر است ، پس از آن این جواب تناوبی را به صورت عددی تقریب نموده ایم.

مدل ریاضی برای ترمز خودروهای سنگین

در این بخش درباره یک مدل ریاضی برای ترمز یک چرخ خودرو سنگین صحبت خواهیم کرد. معادله دیفرانسیل حرکت چرخ ماشین و نیروی ترمز و اصطکاک جاده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M_p x'' = -K_1(x-y) - K_2(x-z) \qquad (1)$$

$$K_2(x-z) = C(z' - y')$$

که در آن M_p جرم کل سیستم ترمز، x تغییرات حرکت چرخ

---

1 - Schauder

پس از ترمزکردن ، y نیروی خارجی (اصطکاک) که از جاده به چرخ وارد می‌شود و z تغییرات فنر پس از ترمز کردن است (به [۳] رجوع شود). در کتاب های کلاسیک اغلب اوقات معادلات فوق را با در نظر گرفتن K_1 , K_2 و C ثابت و در نتیجه به عنوان یک معادله دیفرانسیل خطی در نظر گرفته و حل می‌نمایند. برای این منظور با حذف z بین دو معادله به دست می آید :

$$x''' + \frac{K_2}{C} x'' + \frac{K_1+K_2}{M_p} x' + \frac{K_1K_2}{CM_p} x = \frac{K_1+K_2}{M_p} y' + \frac{K_1K_2}{CM_p} y \qquad (۲)$$

معادله (۲) با فرض C و K_2 و K_1 ثابت یک معادله خطی است و چون y را تابعی تناوبی از زمان فرض می‌کنند به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x''' + \frac{K_2}{C} x'' + \frac{K_1+K_2}{M_p} x' + \frac{K_1K_2}{CM_p} x = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

که با بسط x به سری فوریه $x=\sum_{k=0}^{\infty}(A_k \cos k\omega t+B_k \sin k\omega t)$ و مساوی قرار دادن ضرایب جواب تناوبی معادله به دست می‌آید. البته اغلب اوقات برای بدست آوردن جواب تقریبی از یک یا دو جمله سری فوق استفاده می‌شود.

ما در این مقاله با فرض ثابت نبودن ضرایب K_1 , K_2 و C دستگاه (۱) را تبدیل به یک معادله غیرخطی نموده و آن را در چند حالت بررسی می‌نماییم.

با حذف z بین دو معادله مانند حالت قبل ولی بدون فرض ثابت بودن ضرایب به دست می‌آید:

$$\frac{M_p}{K_2} x''' + \frac{K_1}{K_2}(x'-y') + x' + \left(\frac{M_p}{K_2}\right)' x'' + \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'(x-y) = -\frac{M_p}{C} x'' - \frac{K_1}{C}(x-y) + y'$$

یا

$$x''' + \left[\frac{K_2}{C} + \frac{K_2}{M_p}\left(\frac{M_p}{C}\right)'\right]x'' + \frac{K_1+K_2}{M_p} x' + \frac{K_2}{M_p}\left[\frac{K_1}{C} + \left(\frac{K_1}{C}\right)'\right]x = e(t) \qquad (*)$$

که طرف دوم را که تابعی از y و y' است با $e(t)$ نشان داده‌ایم.

حال فرض کنیم: $\frac{K_2}{C} + \frac{K_2}{M_p}\left(\frac{M_p}{C}\right)' = g_1(x')$ و $\frac{K_1+K_2}{M_p} = g_2(x)$ و $\frac{K_2}{M_p}\left[\frac{K_1}{C} + \left(\frac{K_1}{C}\right)'\right]x = g_3(t,x)$ که در نتیجه معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$x''' + g_1(x')x'' + g_2(x)x' + g_3(t,x) = e(t) \qquad (۳)$$

ابتدا با بدست آوردن یک تابع گرین ، معادله دیفرانسیل (۳) را تبدیل به یک معادله انتگرال کرده و بااستفاده از قضیه نقطه ثابت شادر وجود جواب تناوبی معادله را ثابت خواهیم کرد و سپس با روشهای عددی جواب تناوبی معادله را به صورت تقریبی به دست خواهیم آورد.

ناگفته نماند که وجود جواب تناوبی کارکرد خوب ترمز را نشان می دهد و در صوت عدم وجود جواب تناوبی ترمز بعد از یک بارکار به کلی خراب خواهد شد (رجوع شود به [۳]).

فرض کنیم g_3 و $e(t)$ تناوبی با دوره تناوب ω باشند. در این صورت اگر بخواهیم برای معادله (۳) جوابی تناوبی با دوره تناوب ω به دست آوریم کافی است جوابی برای معادله پیدا کنیم که در شرایط مرزی زیر صدق کند:

$$x(0) = x(\omega),\ x'(0) = x'(\omega),\ x''(0) = x''(\omega) \qquad (۴)$$

تابع گرین برای معادله $x''' = f(t)$ با شرایط مرزی $x(0) = x(\omega)$ و $x'(0) = x'(\omega)$ به صورت زیر است:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{s(s-\omega)}{2\omega} t + \frac{\omega-s}{2\omega} t^2 & 0 \le t \le s \le \omega \\ -\frac{s^2}{2} + \frac{s(s+\omega)}{2\omega} t - \frac{s}{2\omega} t^2 & 0 \le s \le t \le \omega \end{cases}$$

و در نتیجه ، باتوجه به تعریف تابع گرین، معادله دیفرانسیل (۳) به صورت معادله انتگرال زیر در می‌آید:

$$x(t) = \int_0^{\omega} G(t,s)\{e(s) - g_3(s,x(s)) - g_2(x(s))x'(s) - g_1(x'(s))x''(s)\}\, ds \qquad (۵)$$

و به علاوه $G(0,s) = G(\omega,s)$ و $G_t(0,s) = G_t(\omega,s)$ نتیجه

می دهند $x(0) = x(\omega)$ و $x'(0) = x'(\omega)$. پس اگر نشان دهیم که معادله انتگرال (۵) دارای جوابی غیرصفر است به طوری که :

$$\int_0^{\omega} g_3(s,x(s))ds = 0 \qquad (6)$$

آنگاه با انتگرال گیری از معادله (۳) به فرض آنکه $\int_0^{\omega} e(t)dt = 0$ و G_1 و G_2 توابع اولیه g_1 و g_2 باشند، $G_i(x) = \int_0^x g_i(T)dT$ به ازای $i = 1,2$ به دست می‌آید:

$$x''(\omega)-x''(0) + G_1(x'(s))]_0^{\omega} + G_2(x(s))]_0^{\omega}+ \int_0^{\omega} g_3(s,x(s))ds = \int_0^{\omega} e(t)dt = 0$$

و در نتیجه چون $G_1(x'(s))]_0^{\omega}= G_1(x'(\omega))-G_1(x'(0))=0$

و $G_2(x(s))]_0^{\omega}=G_2(x(\omega))-G_2(x(0))=0$ پس

$$x''(\omega) = x''(0)$$

یعنی $x(t)$ در معادلات (۴) صدق می‌کند و در نتیجه جواب تناوبی معادله (۳) است.

حال نشان می‌دهیم که معادله انتگرال (۵) دارای جوابی است که در رابطه (۶) صدق می‌کند. معادله (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$x(t)=\int_0^{\omega} G(t,s)\{e(s) - g_3(s,x(s))ds - \int_0^{\omega} G(t,s)\frac{d}{ds}[G_1(x'(s)) + G_2(x(s))]ds$$

که با انتگرال گیری جزء به جزء و باتوجه اینکه $G(0, s) = G(\omega,s)$ و $x'(0) = x'(\omega)$ و $x(0) = x(\omega)$ بصورت زیر درمی‌آید :

$$x(t)=\int_0^{\omega} G(t,s)\{e(s) - g_3(s,x(s))ds + \int_0^{\omega} G_s(t,s)[G_1(x'(s)) + G_2(x(s))]ds \qquad (7)$$

فرض کنیم که $C([0,\omega])$ فضای توابع پیوسته روی فاصله $[0,\omega]$ با نرم ماکزیمم است : $\|x\|_{\infty} = \max_{0\le t\le\omega}|x(t)|$

R مجموعه اعداد حقیقی و $B = C([0,\omega])\times C([0,\omega])\times R$

با نرم :

$$\|(x,y,a)\| = \|x\|_{\infty} + \|y\|_{\infty} + |a|$$

چون R و $C([0,\omega])$ فضاهای باناخ هستند به سهولت می‌توان نشان داد که B با نرم تعریف شده یک فضای باناخ است.

اپراتور $T : B \to B$ را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(x,y,a) = (x^*, y^*, a^*)$$

$$x^*(t) = a + \int_0^{\omega} G(t,s)[e(s)-g_3(s,x(s))]ds + \int_0^{\omega} G_s(t,s)[G_1(y(s)) + G_2(x(s))]ds;$$

$$y^*(t) = \frac{dx^*}{dt} = \int_0^{\omega} G_t(t,s)[e(s)-g_3(s,x(s))]ds + \int_0^{\omega} G_{ts}(t,s)[G_1(y(s)) + G_2(x(s))]ds;$$

$$a^* = a - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} g_3(s,x(s))ds; \qquad (8)$$

اگر ثابت کنیم که T دارای یک نقطه ثابت (x,y,a) است آنگاه $x^* = x$ و $y^* = \frac{dx^*}{dt} = \frac{dx}{dt} = x'(t)$، روابطی که نشان می‌دهند که $x(t)$ جواب معادله (۷) است و به علاوه $a^*=a$ نتیجه می‌دهد که $\int_0^{\omega} g_3(s, x(s))\, ds = 0$. چون هر اپراتور انتگرال با هسته پیوسته فشرده است، T یک اپراتور فشرده است پس اگر یک زیرمجموعه محدب و بسته و کراندار غیرتهی مانند $K\subset B$ پیدا کنیم به طوری که $T(K) \subset K$ قضیه نقطه ثابت شادر نتیجه می‌دهد که T دارای یک نقطه ثابت در K است.

به سهولت دیده می‌شود که تابع گرین مسئله یعنی

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{s(s-\omega)}{2\omega}\, t + \dfrac{\omega-s}{2\omega}\, t^2 & 0 \le t \le s \le \omega \\[2mm] -\dfrac{s^2}{2} + \dfrac{s(s+\omega)}{2\omega}\, t - \dfrac{s}{2\omega}\, t^2 & 0 \le s \le t \le \omega \end{cases}$$

در روابط زیر صدق می‌کند:

$$|G(t,s)| \le \frac{\omega^2}{54} \quad , \quad |G_s(t,s)| \le \frac{\omega}{8} \quad , \quad |G_t(t,s)| \le \frac{\omega}{8}$$

$$|G_{st}(t,s)| \le \frac{1}{2} \quad , \quad |G_{tt}(t,s)| \le 1 \quad , \quad |G_{stt}(t,s)| \le \frac{1}{\omega}$$

قضیه : اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱) یک ثابت $b>0$ وجود دارد. به طوری که برای $|x| \ge b$

و هر $t\in[0\,,\,\omega]$ داشته باشیم

$$x g_3(t,x)\ge 0$$

۲) یک ثابت D وجود دارد به طوری که $b+3m\le D$ که در آن :

$$m=\max\{[\frac{\omega^2}{54}(E+M_1)+\frac{\omega^2}{8}M_2],\ \frac{\omega}{2}[\frac{\omega}{4}(E+M_1)+M_2],\ M_1\}$$

$$M_1=\max_{\substack{t\in[0,\omega]\\|x|\le D}}|g_3(t,x)|,\quad M_2=\max_{\substack{|x|\le D\\|x'|\le D}}\{|G_1(x')|+|G_2(x)|\}$$

آنگاه عملگر T دارای یک نقطه ثابت است و در نتیجه معادله غیرخطی مرتبه سوم مسئله دارای یک جواب تناوبی با دوره تناوب ω است.

اثبات : زیر مجموعه محدب بسته و کراندار $K\subset B$ را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$K=\{(x,y,a)\in B:|x|\le D,\ |y|\le D,\ |a|\le b+2m\}$$

ثابت کنیم $T(K)\subset K$

$$|x^*(t)|\le|a|+\int_0^\omega|G(t,s)|\,|e(s)-g_3(s,x(s))ds+\int_0^\omega|G_s(t,s)|\,|G_1(y(s))+G_2(x(s))|ds$$

$$\le|a|+\omega\frac{\omega^2}{54}(E+M_1)+\omega\frac{\omega}{8}M_2\le|a|+m\le b+3m\le D$$

$$|y^*(t)|\le\int_0^\omega|G_t(t,s)|\,|e(s)-g_3(s,x(s))|ds+\int_0^\omega|G_{ts}(t,s)|\,|G_1(y(s))+G_2(x(s))|ds$$

$$\le\omega\frac{\omega}{8}(E+M_1)+\omega\frac{1}{2}M_2=\frac{\omega}{2}[\frac{\omega}{4}(E+M_1)+M_2]\le m\le D$$

برای این که نشان دهیم $T(K)\subset K$، کافی است ثابت کنیم $|a^*|\le b+2m$.

سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول : $|a|\le b+m$.

در این حالت:

$$|a^*|\le|a|+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega|g_3(s,x(s))|ds\le|a|+\frac{1}{\omega}\omega M_1=|a|+M_1\le b+2m$$

حالت دوم: $b+m\le a\le b+2m$

در این حالت باتوجه به عبارت x^* در (۸) : $x^*\ge a-m\ge b>0$

و در نتیجه طبق فرض (۱) قضیه $g_3(t,x^*)\ge 0$ که نتیجه می‌دهد:

$$a^*\ge a-M_1\ge(b+m)-M_1\ge b$$

به علاوه $a^*\le a\le b+2m$ و در نتیجه $|a^*|\le b+2m$

حالت سوم: $-(b+2m)\le a\le -(b+m)$.

در این صورت :

$$x^*\le a+m\le -b-m+m=-b\le 0\Rightarrow g_3(t,x^*)\le 0$$

و در نتیجه

$$a^*=a+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega g_3(s,x(s))ds\le a\le -b-m$$

و به علاوه

$$a^*\ge a+m\ge -b-2m+m=-b-m$$

که اثبات قضیه کامل می‌گردد.

روش عددی

در بخش ۱، وجود جواب تناوبی معادله را ثابت کردیم. در این بخش این جواب تناوبی را به صورت عددی تقریب می‌نماییم.

معادله دیفرانسیل

$$x'''+f(t,x,x',x'')=0 \qquad (9)$$

را در نظر می‌گیریم. طبق قضایای معادلات دیفرانسیل، اگر تابع f نسبت به t تناوبی با دوره تناوب ω باشد، شرط لازم و کافی برای وجود جواب تناوبی معادله (۹) آن است که جواب غیربدیهی از (۹) وجود داشته باشد که در شرایط مرزی

$$\begin{aligned} x(0)&=x(\omega)\\ x'(0)&=x'(\omega)\\ x''(0)&=x''(\omega) \end{aligned} \qquad (10)$$

صدق نماید. (وجود چنین جوابی در بخش ۱ با شرایطی به

اثبات رسید)

اکنون فرض کنیم $x = x(t,\xi,\eta,\zeta)$ جوابی از معادله (۹) باشد که در شرایط اولیه

$$x(0) = x(0,\xi,\eta,\zeta)=\xi$$
$$x'(0) = x'(0,\xi,\eta,\zeta)=\eta$$
$$x''(0) = x''(0,\xi,\eta,\zeta)=\zeta \qquad (۱۱)$$

صدق نماید. برای بدست آوردن جوابی از معادله (۹) که در شرایط مرزی (۱۰) صدق نماید، کافی است که ξ,η,ζ را طوری پیدا کنیم که :

$$x(\omega,\xi,\eta,\zeta)-\xi = 0,\ x'(\omega,\xi,\eta,\zeta) -\eta = 0,\ x''(\omega,\xi,\eta,\zeta)-\zeta=0$$

برای این منظور، قرار می‌دهیم:

$$F(\xi,\eta,\zeta) = x(\omega,\xi,\eta,\zeta) - \xi$$
$$G(\xi,\eta,\zeta) = x'(\omega,\xi,\eta,\zeta) - \eta$$
$$H(\xi,\eta,\zeta) = x''(\omega,\xi,\eta,\zeta) - \zeta \qquad (۱۲)$$

و دستگاه معادلات جبری غیرخطی زیر را حل می‌نمائیم:

$$F(\xi,\eta,\zeta) = 0$$
$$G(\xi,\eta,\zeta) = 0$$
$$H(\xi,\eta,\zeta) = 0 \qquad (۱۳)$$

با استفاده از فرمول تیلور:

$$F(\xi,\eta,\zeta)= F(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)+ (\xi-\xi_0)\ F_\xi(\xi_0,\eta_0,\zeta_0) +(\eta-\eta_0)\ F_\eta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0) + (\zeta-\zeta_0)\ F_\zeta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)+\dots= 0$$

$$G(\xi,\eta,\zeta)= G(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)+ (\xi-\xi_0)\ G_\xi(\xi_0,\eta_0,\zeta_0) +(\eta-\eta_0)\ G_\eta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0) + (\zeta-\zeta_0)\ G_\zeta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)+\dots= 0$$

$$H(\xi,\eta,\zeta)= H(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)+ (\xi-\xi_0)\ H_\xi(\xi_0,\eta_0,\zeta_0) +(\eta-\eta_0)\ H_\eta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0) + (\zeta-\zeta_0)\ H_\zeta(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)+\dots= 0$$

(۱۳-۱)

با تقریب توابع F, G, H با قسمت خطی آنها و استفاده از فرمول کرامر، به دست می‌آید.

$$\xi-\xi_0 = \frac{\begin{vmatrix} -F & F_\eta & F_\zeta \\ -G & G_\eta & G_\zeta \\ -H & H_\eta & H_\zeta \end{vmatrix}_{(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}}{\begin{vmatrix} F_\xi & F_\eta & F_\zeta \\ G_\xi & G_\eta & G_\zeta \\ H_\xi & H_\eta & H_\zeta \end{vmatrix}_{(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}}$$

$$\eta-\eta_0 = \frac{\begin{vmatrix} F_\xi & -F & F_\zeta \\ G_\xi & -G & G_\zeta \\ H_\xi & -H & H_\zeta \end{vmatrix}_{(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}}{\begin{vmatrix} F_\xi & F_\eta & F_\zeta \\ G_\xi & G_\eta & G_\zeta \\ H_\xi & H_\eta & H_\zeta \end{vmatrix}_{(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}}$$

$$\zeta-\zeta_0 = \frac{\begin{vmatrix} F_\xi & F_\zeta & -F \\ G_\xi & G_\zeta & -G \\ H_\xi & H_\zeta & -H \end{vmatrix}_{(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}}{\begin{vmatrix} F_\xi & F_\eta & F_\zeta \\ G_\xi & G_\eta & G_\zeta \\ H_\xi & H_\eta & H_\zeta \end{vmatrix}_{(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}}$$

حال باید مشتقات جزئی مرتبه اول F_ξ , F_η , F_ζ , G_ξ , G_η , G_ζ و H_ξ , H_η , H_ζ را محاسبه نمائیم. با مشتق‌گیری از معادلات (۱۲) به دست می‌آید:

$$F_\xi(\xi,\eta,\zeta) = x_\xi(\omega,\xi,\eta,\zeta) - 1;\ F_\eta(\xi,\eta,\zeta) = x_\eta(\omega,\xi,\eta,\zeta),$$
$$F_\zeta(\xi,\eta,\zeta) = x_\zeta(\omega,\xi,\eta,\zeta)$$

$$G_\zeta(\xi,\eta,\zeta) = x'_\zeta(\omega,\xi,\eta,\zeta);\ G_\eta(\xi,\eta,\zeta) = x'_\eta(\omega,\xi,\eta,\zeta)- 1$$
$$G_\zeta(\xi,\eta,\zeta) = x'_\zeta(\omega,\xi,\eta,\zeta)$$

$$H_\xi(\xi,\eta,\zeta)= x''_\xi(\omega,\xi,\eta,\zeta);\ H_\eta(\xi,\eta,\zeta)= x''_\eta(\omega,\xi,\eta,\zeta),$$
$$H_\zeta(\xi,\eta,\zeta) = x''_\zeta(\omega,\xi,\eta,\zeta)- 1$$

با مشتق‌گیری نسبت به ξ از معادله :

$$x''(t,\xi,\eta,\zeta) + f(t,x(t,\xi,\eta,\zeta), x'(t,\xi,\eta,\zeta), x''(t,\xi,\eta,\zeta))=0 \qquad (۱۴)$$

به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)''' + f_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + f_{x'}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)' + f_{x''}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)'' = 0$$

که با قرار دادن $Z = \frac{\partial x}{\partial \xi}$ تبدیل می‌شود به معادله :

$$Z''' + f_{x''}Z'' + f_{x'}Z' + f_x Z = 0 \qquad (15)$$

با شرایط اولیه :

$$Z(0) = 1 ,\ Z'(0) = 0 ,\ Z''(0) = 0 \qquad (16)$$

که از شرایط اولیه (۱۱) نتیجه می‌شوند.

با حل معادله (۱۵) با شرایط اولیه (۱۶) مقادیر $F_\xi(\xi,\eta,\zeta)=Z(\omega)-1, G_\xi(\xi,\eta,\zeta)=Z'(\omega), H_\xi(\xi,\eta,\zeta)=Z''(\omega)$ به دست می‌آیند.

همینطور با مشتق‌گیری از معادله (۱۴) نسبت به η و با فرض $W = \frac{\partial x}{\partial \xi}$، مسئله با مقادیر اولیه،

$$W''' + f_{x''}W'' + f_{x'}W' + f_x W = 0$$
$$W(0) = 0,\ W'(0) = 1,\ W''(0) = 0 \qquad (17)$$

و با مشتق از معادله (۱۴) نسبت به ζ و با فرض $U = \frac{\partial x}{\partial \xi}$، مسئله با مقادیر اولیه :

$$U''' + f_{x''}U'' + f_{x'}U' + f_x U = 0$$
$$U(0) = 0,\ U'(0) = 0,\ U''(0) = 1 \qquad (18)$$

به دست می‌آیند، که با حل آنها مقادیر :

$F_\eta(\xi,\eta,\zeta) = W(\omega),\ G_\eta(\xi,\eta,\zeta) = W'(\omega) - 1,$
$H_\eta(\xi,\eta,\zeta) = W''(\omega)$
$F_\zeta(\xi,\eta,\zeta) = U(\omega),\ G_\zeta(\xi,\eta,\zeta) = U'(\omega),$
$H_\zeta(\xi,\eta,\zeta) = U''(\omega) - 1$

حاصل می‌شوند. ابتدا ξ_0, η_0, ζ_0 را به طور دلخواه انتخاب نموده، معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه را از روش رونگ کوتاه تا $t = \omega$ حل نموده. x, x', x'' را به دست می‌آوریم. اگر $x(\omega) = \xi_0$ و $x'(\omega) = \eta_0$ و $x''(\omega) = \zeta_0$ شد. مسئله حل گردیده است. در غیر این صورت معادله دیفرانسیل (۱۵) با شرایط اولیه (۱۶) و مسائل با مقادیر اولیه (۱۷) و (۱۸) را حل نموده و سپس مقادیر جدید ζ_n و η_n و ξ_n را به دست آورده و عمل را تکرار می‌کنیم. در حقیقت از نمودار جریان صفحه بعد استفاده می‌کنیم.

مثال عددی

$$x''' - 0.1x'^3.x'' + 0.1x^2.x' + 0.1x^5 = -0.1\cos\pi t \qquad (19)$$

در این حالت $\omega = 1$ و $g = 0.1x^5$ در آن صورت $b = 0$ و $m = 0.1\times[1 + D^3(1 + D + D^2)]$ که شرط اساسی یعنی $b + 3m \le b$ برای $D \le 0.3\times[1+D^3(1+D+D^2)]$ مثلاً برای $D = 0.4$ برقرار است.

محاسبات کامپیوتری در این حالت به نتایج زیر منجر می‌شود.

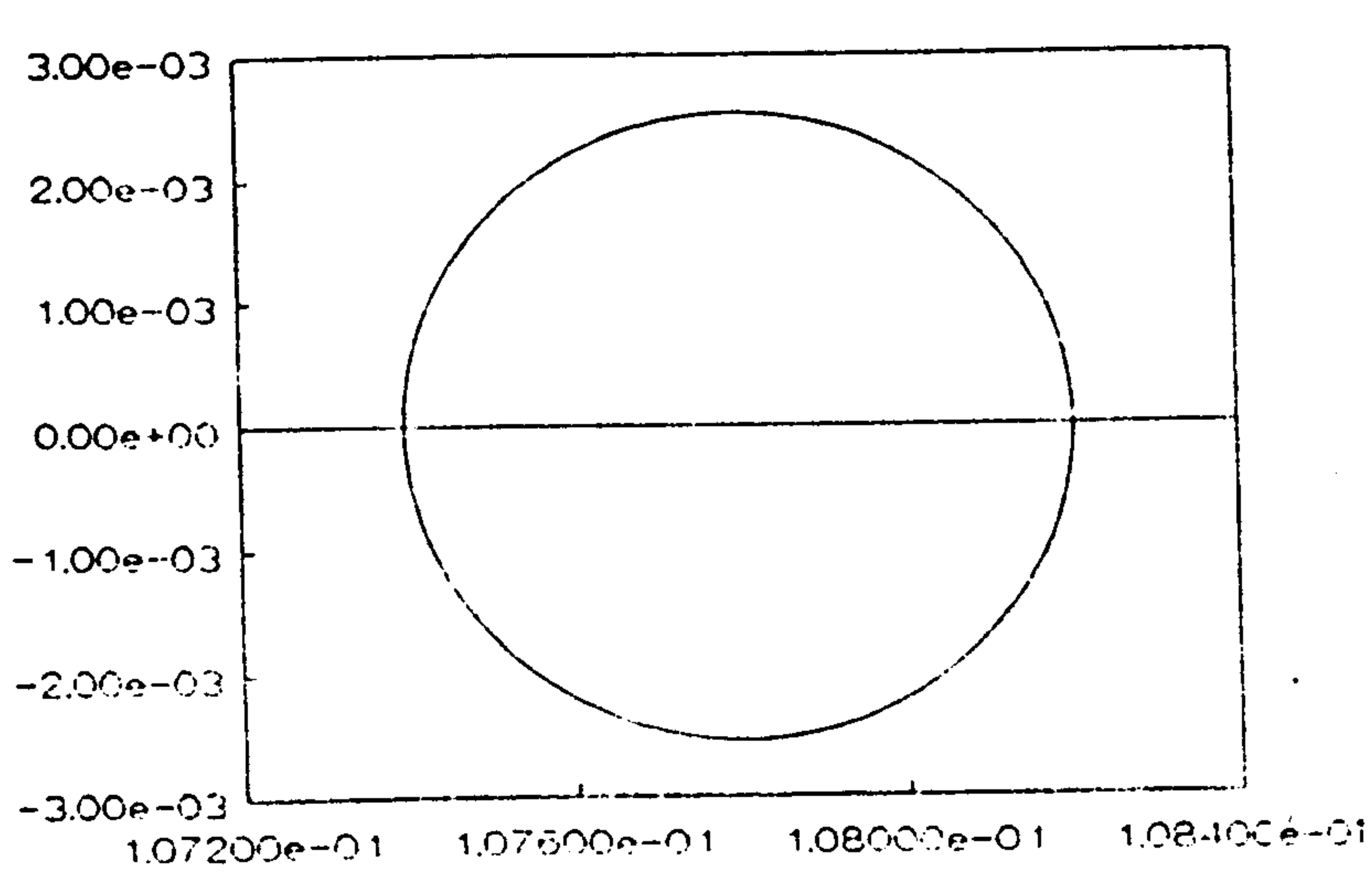
$$x(0) = 0.1078$$
$$x'(0) = 2.5332e-3$$
$$x''(0) = 7.1700e-7$$
$$x(1) = 0.1078$$
$$x'(1) = 2.5332e-3$$
$$x''(1) = 7.1700e-7$$

نتیجه گیری

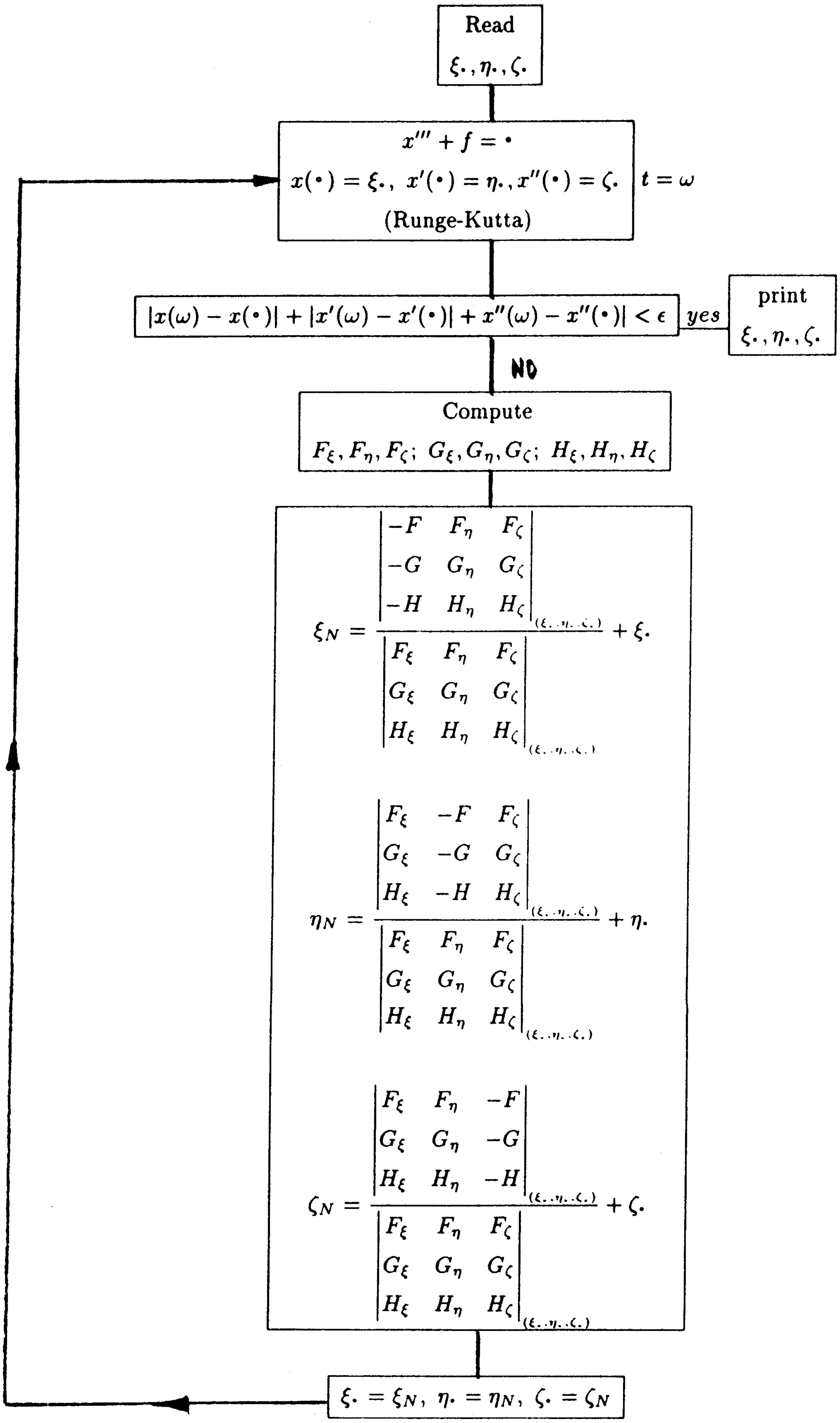
وجود جواب تناوبی یک معادله دیفرانسیل رسته سوم غیرخطی که دارای کاربرد در ترمز خودروهای سنگین است به اثبات رسیده است. سپس این جواب تناوبی با روش های عددی تقریب شده است.

تقدیر و تشکر

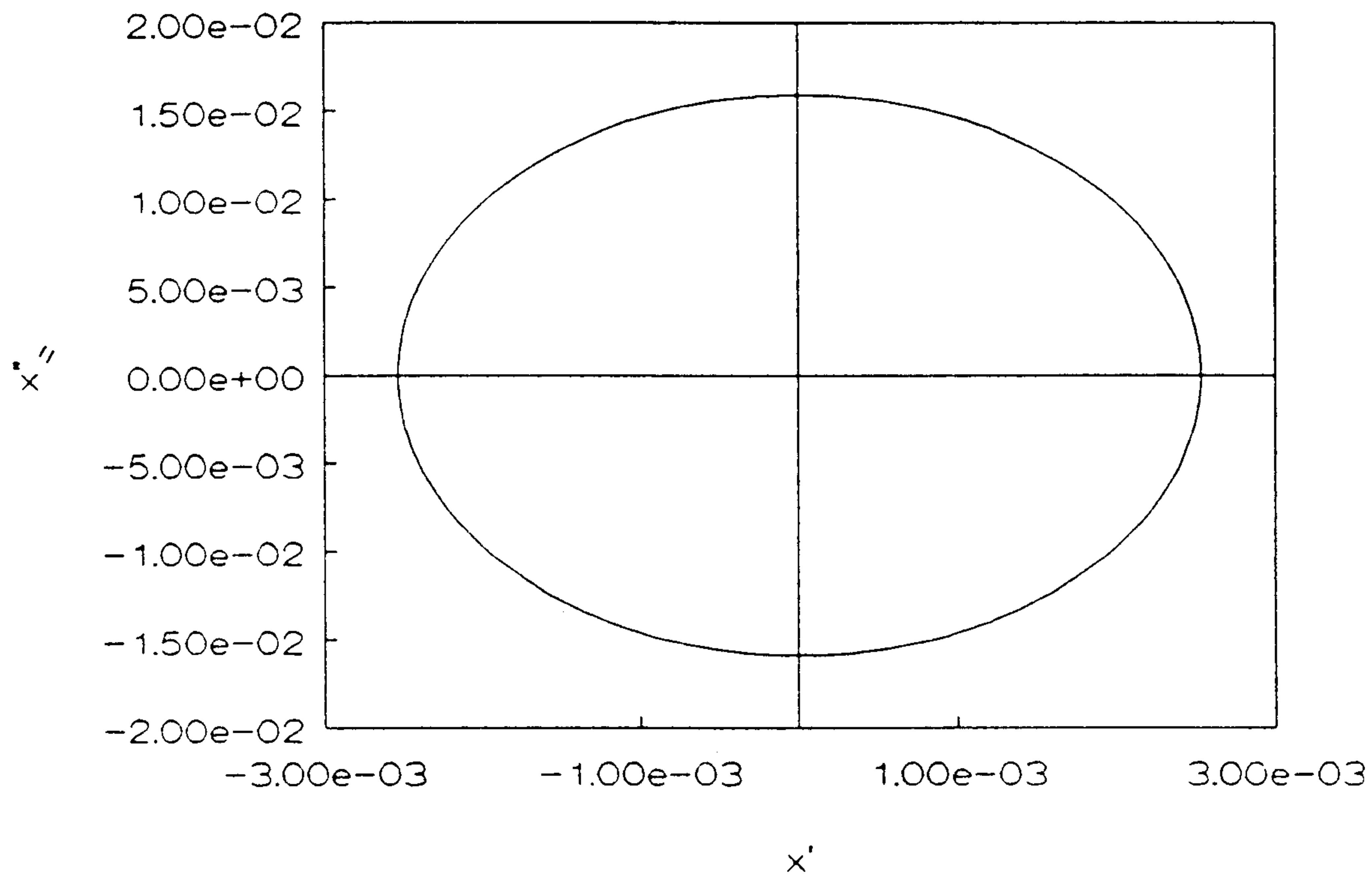
این مقاله تحقیقی با پشتیبانی مالی و معنوی دانشکده فنی و دانشگاه تهران میسر گردید. لذا، لازم می دانیم که از مسئولین محترم دانشکده فنی و معاونت محترم پژوهشی دانشگاه تهران تشکر و قدردانی نماییم که بدون کمک آنها این کار میسر نمی گردید.



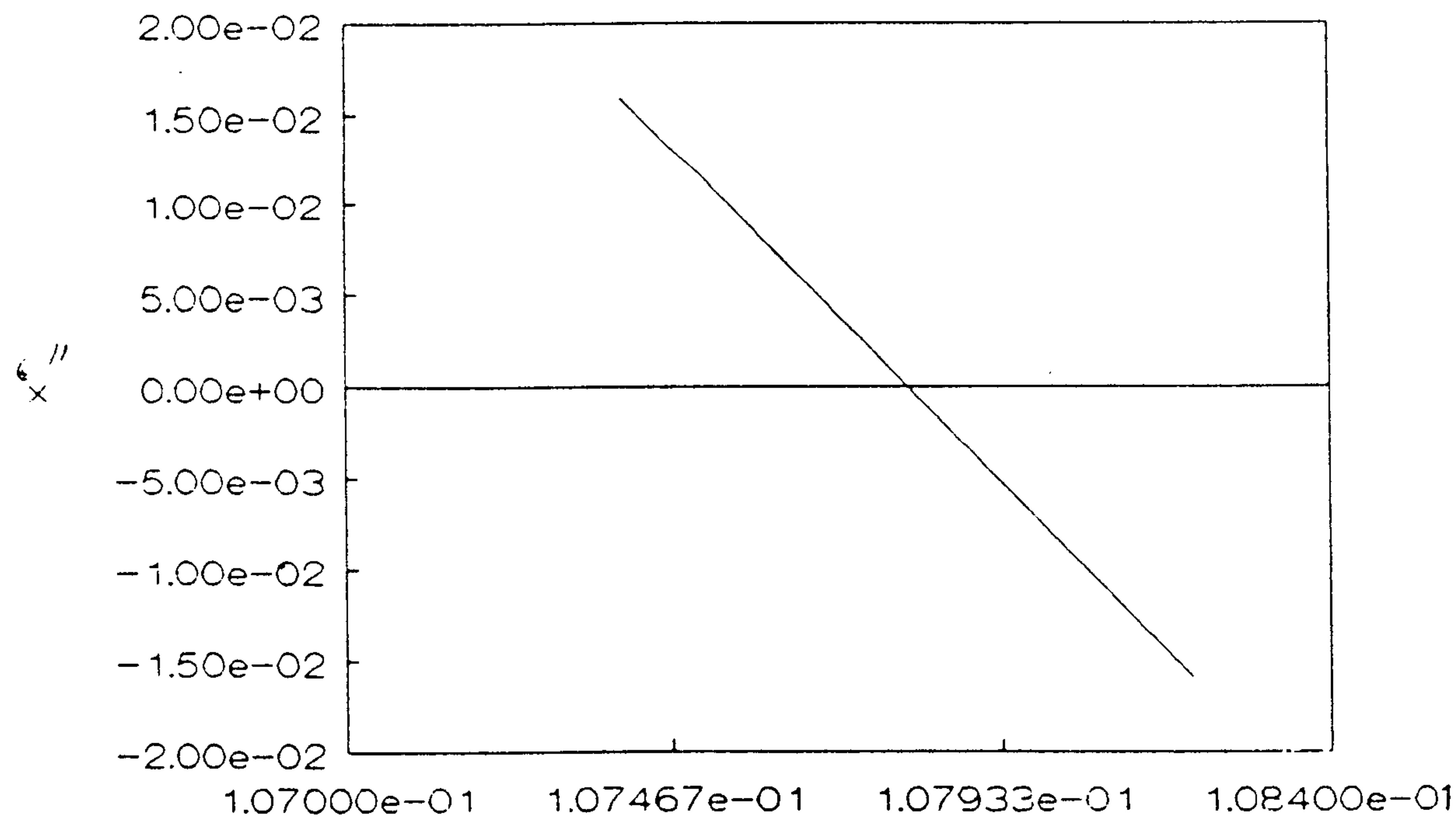
شکل ۱: منحنی صفحه فاز برای جواب تناوبی معادله (۱۹).



روند نمای محاسبه جواب تناوبی .



شکل ۲: x''-x' نمودار برای جواب تناوبی معادله (۱۹).



شکل ۳: x''-x نمودار برای جواب تناوبی معادله (۱۹).

مراجع

1 - Mehri, B. (1970). "Periodic solution for certain nonlinear third order differential equation." *Indian fue, Appl. Math. 21,* 3, 203-210.

2 - Mehri, B., and Emamirad, H. A. (1979). "On the existence of periodic solution for autonomous second order systems." *Nonlinear Analysis, Theory, Method and Applications,* 3, 577-583.

3 - Pacejka, H. B. (1986), "Non linearities in road vehicle dynamics vehicle system, dynamics." 15, 237-254.

4 - Shadman, D. (1996). "Some nonlinear problems in servomechanisms." *Archive of Applied Mechanics,* 66, 427-433.

5 - Zokaei, A. (1995). "Some boundary value problems for nonlinear third order ordinary diff. eqs." *Proceeding I.C.A.H.* 493-501.