

# تحلیل سه بعدی محیط نیمه بینهایت با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت اثر بار مماس بر سطح در فضای فرکانسی

علی خجسته

دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

محمد رحیمیان\*

دانشیار دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

مرتضی اسکندری قادی

استادیار گروه مهندسی عمران - دانشگاه علوم و فنون مازندران

(تاریخ دریافت ۸۴/۶/۲۶، تاریخ تصویب ۸۵/۴/۳)

## چکیده

در این مقاله پاسخ محیط نیمه بینهایت با رفتار ایزوتروپ جانبی<sup>۱</sup> تحت اثر تحریک هارمونیک مماس بر سطح آزاد محیط در حالت سه بعدی بدست می آید. این پاسخ مربوط به امواج منتشر شونده از محل تحریک به سمت محیط می باشد. معادلات تعادل دینامیکی حاکم بر مسئله در دستگاه مختصات استوانه ای  $(r, \theta, z)$  بصورت یک سری معادلات درگیر<sup>۲</sup> می باشد. با استفاده از دو تابع پتانسیل<sup>۳</sup> که توسط اسکندری قادی در سال ۲۰۰۵ برای مسائل الاستودینامیک<sup>۴</sup> ارائه گردیده است، این معادلات بطور کامل مجزا سازی می شوند. با نوشتن توابع پتانسیل بصورت سری مختلط فوری<sup>۵</sup> در امتداد  $\theta$  و استفاده از تبدیل هنکل<sup>۶</sup> در امتداد شعاعی جواب تحلیلی برای توابع پتانسیل در فضای هنکل بدست می آید. میدان تغییر مکان با استفاده از ارتباط مولفه های بردار تغییر مکان و توابع پتانسیل در فضای هنکل بدست می آید. در انتها نتایج در محدوده وسیع فرکانسی و بصورت گرافیکی ارائه می شود. نتایج برای محیط های ایزوتروپ با استفاده از نتایج بدست آمده برای محیط های ایزوتروپ جانبی بدست آمده و با نتایج موجود برای محیط های ایزوتروپ مقایسه می گردد. نتایج عددی مختلف برای مولفه های تغییر مکان به منظور نشان دادن تأثیر فرکانس تحریک و میزان نالیوتروپی مصالح بر پاسخ ارائه گردیده است. میدان تغییر مکان بدست آمده برای حل بسیاری از مسائل الاستودینامیک و همچنین به عنوان هسته<sup>۷</sup> برای حل معادلات انتگرال مرزی کاربرد دارد.

**واژه های کلیدی:** توابع پتانسیل - تغییر مکان - انتشار امواج - محیط ایزوتروپ جانبی - تبدیل هنکل - بسط فوری - نقاط شاخه ای<sup>۸</sup> - قطب<sup>۹</sup>

## مقدمه

می توان بر شمرد: Achenbach در سال ۱۹۷۳ [۱]، Aki و Richards در سال ۱۹۸۰ [۲]، Apse و Luco در سال ۱۹۸۳ [۳] و Pak در سال ۱۹۸۷ [۱۰]. انتشار امواج در محیط های ناهمسان<sup>۱۰</sup> نیز در گذشته مورد توجه قرار گرفته است. در حال حاضر با توجه به استفاده روز افزون از مواد ناهمسان نیاز به تحقیقات در زمینه انتشار امواج در این محیط ها بیشتر احساس می شود. برای مثال مواد کامپوزیت که در سال های اخیر در زمینه علوم و مهندسی کاربرد گسترده ای یافته اند دارای خاصیت ناهمسانی می باشند. از سوی دیگر در زمین هایی که خاک تحت اثر نیروی ثقل رسوب کرده است و نهشته های طبیعی سربار شده روی هم تشکیل

انتشار امواج در یک محیط ناشی از بارگذاری خارجی از جمله مباحثی بوده است که در قرن گذشته بسیاری از محققان و مهندسان در زمینه ریاضیات کاربردی و مکانیک مهندسی را به خود جلب کرده است. مقاله پایه ای در زمینه انتشار امواج مربوط به لمب (Lamb) و در سال ۱۹۰۴ [۷] می باشد. او در این مقاله، انتشار امواج ناشی از یک بار هارمونیک وارد بر یک محیط ایزوتروپ و ارتجاعی نیمه بینهایت را بررسی کرده است و میدان تغییر مکان را در دو حالت دو بعدی و سه بعدی بدست آورده است. بعد از لمب محققان زیادی در زمینه انتشار امواج در محیط های ایزوتروپ تحقیق کرده اند و تحقیقات گسترده ای را ارائه کرده اند که از آن جمله

با برآیند واحد در جهت افقی (مماس بر سطح) موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع  $a$  در محدوده وسیع فرکانسی و بصورت گرافیکی ارائه می‌شود.

### بیان مسئله و معادلات حاکم

محیط نیمه متناهی ارتجاعی با رفتار ایزوتروپ جانبی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  چنان در نظر می‌گیریم که محور  $z$  عمود بر صفحه ایزوتروپی باشد. در اینصورت معادلات تعادل دینامیکی بر حسب تنش‌ها بصورت زیر نوشته می‌شوند [۸].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = r, \theta, z$ ) تانسور تنش<sup>۱۶</sup> و  $U, V, W$  مولفه‌های بردار تغییر مکان به ترتیب در امتدادهای  $r, \theta, z$  می‌باشند.  $\rho$  جرم مخصوص محیط و  $t$  معرف زمان می‌باشد. رابطه تنش - کرنش در مصالح ایزوتروپ جانبی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= A_{11} \varepsilon_{rr} + A_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= A_{12} \varepsilon_{rr} + A_{11} \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= A_{13} \varepsilon_{rr} + A_{13} \varepsilon_{\theta\theta} + A_{33} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{rz} &= 2A_{44} \varepsilon_{rz}, \sigma_{\theta z} = 2A_{44} \varepsilon_{\theta z}, \\ \sigma_{r\theta} &= 2A_{66} \varepsilon_{r\theta} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن  $A_{ij}$  ( $i, j = r, \theta, z$ ) ثابت های ارتجاعی بوده و داریم:

$$A_{66} = \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \quad (3)$$

برای حالت مصالح ایزوتروپ ضرایب ارتجاعی  $A_{11}$  تا  $A_{66}$  بر حسب ضرایب لامه<sup>۱۷</sup>  $\lambda$  و  $\mu$  عبارتند از

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{33} = \lambda + 2\mu, \quad A_{12} = A_{13} = \lambda, \\ A_{44} &= A_{66} = \mu \end{aligned} \quad (4)$$

اگر  $E$  معرف مدول یانگ در صفحه ایزوتروپی،  $E'$  معرف مدول یانگ عمود بر صفحه ایزوتروپی،  $\nu$  معرف ضریب پواسون در صفحه ایزوتروپی (جمع شدگی در صفحه

داده است خاصیت ناهمسانی وجود دارد. اما با توجه به ملاحظات کاربردی در زمینه مهندسی محیط‌های ناهمسان معمولاً بصورت ایزوتروپ جانبی و یا ارتوتروپ<sup>۱۱</sup> مدل می‌شوند. یکی از بررسی‌های اولیه در زمینه انتشار امواج در محیط‌های ایزوتروپ جانبی توسط Stonely و در سال ۱۹۴۹ [۱۵] انجام گرفته است. او نشان داد که وجود مواد با خاصیت ایزوتروپ جانبی می‌تواند منجر به تفاوت‌های قابل توجهی در زمینه انتشار امواج نسبت به مواد ایزوتروپ گردد. Syngge در سال ۱۹۵۷ [۱۶]، انتشار امواج ریلی<sup>۱۲</sup> در محیط‌های ایزوتروپ جانبی را بررسی کرده است و نتیجه گرفته که این امواج فقط در صورتی در این محیط‌ها منتشر می‌شوند که محور ایزوتروپی محیط یا عمود بر سطح آزاد و یا موازی این سطح باشد. همچنین او بیان داشته است که امواج ریلی معمولی (در محیط‌های ایزوتروپ) موازی سطح آزاد محیط منتشر می‌شوند در حالی که امواج ریلی کلی (در محیط‌های ناهمسان) می‌توانند با شیب نسبت به سطح آزاد منتشر شوند. Wang و Rajapakse در سال ۱۹۹۱ [۱۲] تغییر مکان‌ها و تنش‌های ناشی از ارتعاش هارمونیک یک جسم صلب در یک محیط ارتوتروپ دو بعدی را بدست آورده‌اند. همچنین آنها تغییر مکان‌ها و تنش‌های ناشی از ارتعاش هارمونیک نیروی موثر بر پیرامون یک دایره مدفون در یک محیط ایزوتروپ جانبی را در حالت سه بعدی تعیین کرده‌اند [۱۳]. آنها دستگاه معادلات حرکت را با استفاده از سه تابع پتانسیل به دو معادله درگیر و یک معادله مستقل تبدیل کرده و معادلات بدست آمده را با استفاده از تبدیلات انتگرالی<sup>۱۳</sup> حل کرده‌اند. در این مقاله این محیط تحت اثر نیروی هارمونیک مماس بر سطح مورد توجه قرار گرفته است و با استفاده از دو تابع پتانسیل که توسط اسکندری قادی و در سال ۲۰۰۵ [۶] ارائه گردیده است معادلات تعادل دینامیکی به طور کامل مجزا سازی می‌شوند. با استفاده از بسط فوریه در امتداد  $\theta$  و استفاده از تبدیل هنکل در امتداد شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای، مسئله تبدیل به حل دو معادله دیفرانسیل معمولی کاملاً مجزا از هم برای توابع پتانسیل در فضای تبدیل یافته<sup>۱۴</sup> هنکل می‌شود. برای بدست آوردن جواب‌ها در فضای واقعی<sup>۱۵</sup> باید از جواب‌های تحلیلی بدست آمده در فضای تبدیل یافته بصورت عددی انتگرال‌گیری کنیم. در انتها پاسخهای مختلف ناشی از بار گسترده یکنواخت

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z}\right) + (A_{13} + A_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial z} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (7)$$

### توابع پتانسیل

معادلات حرکت (7) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزئی می‌باشند. به منظور مجزا سازی این معادلات از دو تابع پتانسیل  $F$  و  $\chi$  استفاده شده است. مولفه‌های بردار تغییر مکان بر حسب توابع پتانسیل  $F$  و  $\chi$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت دینامیکی به صورت زیر نوشته می‌شوند [6]

$$\begin{aligned} U &= -\alpha_3 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ V &= -\alpha_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \\ W &= (1 + \alpha_1) \left[ \nabla_{r\theta}^2 + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho_0}{1 + \alpha_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] F \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1}, \rho_0 = \frac{\rho}{A_{66}}, \nabla_{r\theta}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \alpha_1 &= \frac{A_{66} + A_{12}}{A_{66}}, \alpha_2 = \frac{A_{44}}{A_{66}}, \alpha_3 = \frac{A_{13} + A_{44}}{A_{66}} \end{aligned} \quad (9)$$

اما با فرض هارمونیک بودن حرکت می‌توان توابع پتانسیل و مولفه‌های بردار تغییر مکان را به شرح زیر نوشت

$$\begin{aligned} U, V, W(r, \theta, z, t) &= [u, v, w(r, \theta, z)] e^{i\omega t} \\ F, \chi(r, \theta, z, t) &= [F, \chi(r, \theta, z)] e^{i\omega t}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (10)$$

بطوری که  $\omega$  فرکانس زاویه ای حرکت هارمونیک و  $v, u$  و  $w$  دامنه‌های مولفه‌های بردار تغییر مکان به ترتیب در امتدادهای  $r, \theta$  و  $z$  می‌باشند. با جایگزینی روابط (10) در (8) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} u &= -\alpha_3 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ v &= -\alpha_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \\ w &= (1 + \alpha_1) \left[ \nabla_{r\theta}^2 + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\rho_0}{1 + \alpha_1} \omega^2 \right] F \end{aligned} \quad (11)$$

ایزوتروپی به علت کشش در همین صفحه)،  $v'$  معرف ضریب پواسون عمود بر صفحه ایزوتروپی (جمع شدگی عمود بر صفحه ایزوتروپی به علت کشش در این صفحه)،  $G$  معرف مدول برشی در صفحه ایزوتروپی و  $G'$  معرف مدول برشی در صفحات عمود بر صفحه ایزوتروپی باشد در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E(1 - \frac{E}{E'} v'^2)}{(1 + \nu)(1 - \nu - 2 \frac{E}{E'} v'^2)}, A_{13} = \frac{E \nu'}{1 - \nu - 2 \frac{E}{E'} v'^2}, \\ A_{33} &= \frac{E'(1 - \nu)}{1 - \nu - 2 \frac{E}{E'} v'^2}, \\ A_{44} &= G', A_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \end{aligned} \quad (5)$$

همچنین رابطه کرنش - تغییر مکان در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شرح زیر است [9]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U}{\partial r}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} + U \right), \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right), \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V}{r} \right) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

با قرار دادن رابطه (6) در رابطه (2)، تنش‌ها بر حسب تغییر مکان‌ها بدست می‌آیند. با قرار دادن روابط تنش - تغییر مکان در معادلات (1)، معادلات تعادل دینامیکی بر حسب مولفه‌های بردار تغییر مکان به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} A_{11} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right) + \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + A_{44} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{A_{11} + A_{12}}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) - 2A_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} \right) + A_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + A_{44} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{A_{11} + A_{12}}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + 2A_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ + (A_{13} + A_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial z} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, A_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \\ A_{44} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + (A_{13} + A_{44}) \end{aligned}$$

با قرار دادن روابط (۱۷) و (۱۸) به ترتیب در معادلات (۱۲) و (۱۳) این معادلات بصورت زیر نوشته می‌شوند

$$\left[ \nabla_{1m}^2 \nabla_{2m}^2 + \varepsilon \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] F_m(r, z) = 0 \quad (20)$$

$$\nabla_{0m}^2 \chi_m(r, z) = 0 \quad (21)$$

که در آن

$$\nabla_{im}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{S_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu_i} \rho_0 \omega^2, \quad i = (0, 1, 2) \quad (22)$$

با توجه به هندسه و شرایط مرزی مسئله بسیار مناسب می باشد که از تبدیل هنکل مرتبه m ام نسبت به امتداد شعاعی r به شرح زیر استفاده شود [۱۴]

$$F_m^m, \chi_m^m(\xi, z) = \int_0^\infty [F_m, \chi_m(r, z)] r J_m(\xi r) dr \quad (23)$$

که تبدیل معکوس<sup>۱۸</sup> هنکل آن عبارتست از

$$F_m, \chi_m(r, z) = \int_0^\infty [F_m^m, \chi_m^m(\xi, z)] \xi J_m(\xi r) d\xi \quad (24)$$

که در آن  $J_m$  تابع بسل<sup>۱۹</sup> نوع اول از مرتبه m می‌باشد. با قرار دادن رابطه (۲۳) در معادلات (۲۰) و (۲۱) این معادلات بصورت زیر درمی‌آیند :

$$\left[ \bar{\nabla}_{1m}^2 \bar{\nabla}_{2m}^2 + \varepsilon \omega^2 \frac{d^2}{dz^2} \right] F_m^m(\xi, z) = 0 \quad (25)$$

$$\bar{\nabla}_{0m}^2 \chi_m^m(\xi, z) = 0 \quad (26)$$

که در آن

$$\bar{\nabla}_{im}^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{\mu_i} - \xi^2 + \frac{1}{S_i^2} \frac{d^2}{dz^2}, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (27)$$

معادله (۲۵) یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه چهارم با ضرایب ثابت می‌باشد و جواب آن به شکل زیر می‌باشد

$$F_m^m(\xi, z) = e^{\lambda_m z} \quad (28)$$

با قرار دادن (۲۸) در (۲۵) می‌توان بدست آورد

$$(\lambda_m^4 + a_2 \lambda_m^2 + a_0) e^{\lambda_m z} = 0 \quad (29)$$

با قرار دادن روابط (۱۰) و (۱۱) در معادلات حرکت (۷) ، دو معادله دیفرانسیل کاملاً مستقل از هم حاکم بر توابع پتانسیل F و  $\chi$  بصورت زیر درمی‌آیند

$$\left[ \nabla_1^2 \nabla_2^2 + \varepsilon \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] F = 0 \quad (12)$$

$$\nabla_0^2 \chi = 0 \quad (13)$$

که در آن

$$\nabla_i^2 = \nabla_{i\theta}^2 + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu_i} \rho_0 \omega^2 \quad (i=0,1,2) \quad (14)$$

و

$$\mu_0 = 1, \mu_1 = \alpha_2 = \frac{A_{44}}{A_{66}}, \mu_2 = 1 + \alpha_1 = \frac{A_{11}}{A_{66}}$$

$$\frac{\varepsilon}{\rho_0} = \left[ \frac{A_{66}}{A_{11}} \left( 1 + \frac{A_{33}}{A_{44}} \right) - \frac{1}{\mu_1 S_2^2} - \frac{1}{\mu_2 S_1^2} \right]$$

$$S_0^2 = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{A_{66}}{A_{44}} \quad (15)$$

پارامترهای  $S_1^2$  و  $S_2^2$  ریشه های معادله زیر هستند

$$A_{33} A_{44} S^4 + (A_{13}^2 + 2A_{13} A_{44} - A_{11} A_{33}) S^2 + A_{11} A_{44} = 0 \quad (16)$$

$S_2$  و  $S_1$  می‌توانند اعداد مختلط باشند اما نمی‌توانند اعداد موهومی خالص باشند [۸]. به منظور حل معادلات (۱۲) و (۱۳)، می‌توان توابع F و  $\chi$  را نسبت به  $\theta$  به صورت سری فوریه نوشت. سری فوریه مختلط این توابع بصورت زیر هستند

$$F(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(r, z) e^{im\theta} \quad (17)$$

$$\chi(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_m(r, z) e^{im\theta} \quad (18)$$

که در آن  $F_m$  و  $\chi_m$  ضرایب m ام سری فوریه توابع F و  $\chi$  هستند [۱۴]

$$F_m, \chi_m(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [F, \chi(r, \theta, z)] e^{-im\theta} d\theta \quad (19)$$

می‌شود. نقاط شاخه ای متناظر با توابع  $\lambda_{mi}$  ( $i=1, 2, 3$ ) توسط معادله زیر بدست می‌آیند.

$$\lambda_{mi} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (36)$$

با قراردادن روابط (۳۲) و (۳۵) در رابطه (۳۶) نقاط شاخه ای متناظر با توابع  $\lambda_{mi}$  ( $i=1, 2, 3$ ) به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\xi_{\lambda_{m1}} = \frac{\sqrt{\rho\omega}}{\sqrt{A_{11}}}, \xi_{\lambda_{m2}} = \frac{\sqrt{\rho\omega}}{\sqrt{A_{44}}},$$

$$\xi_{\lambda_{m3}} = \frac{\sqrt{\rho\omega}}{\sqrt{A_{66}}} \quad (37)$$

به منظور تک مقداری کردن توابع  $\lambda_{mi}$  ( $i=1, 2, 3$ ) بریدگی های شاخه به گونه ای انتخاب می‌شوند که  $\text{Re}(\lambda_{mi}) \geq 0$  باشد (شکل ۱). با انتخاب بریدگی های شاخه به صورت فوق و به منظور ارضای شرط تشعشع<sup>۲۴</sup> جملات  $e^{\lambda_{m1}z}$  و  $e^{\lambda_{m2}z}$  در رابطه (۳۱) و جمله  $e^{\lambda_{m3}z}$  در رابطه (۳۴) حذف شده‌اند.

### جواب کلی معادلات حرکت

مطابق شکل (۲) فرض می‌شود که نیروی هارمونیک

دلخواه به شدت  $f(r, \theta)e^{i\omega t}$  روی صفحه  $\pi_s$  در سطح  $z=0$  اعمال می‌گردد. بر این اساس شرایط مرزی در سطح  $z=0$  به صورت زیر می‌باشد

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z=0, t) = P(r, \theta)e^{i\omega t},$$

$$\sigma_{z\theta}(r, \theta, z=0, t) = Q(r, \theta)e^{i\omega t},$$

$$\sigma_{zz}(r, \theta, z=0, t) = R(r, \theta)e^{i\omega t}, \quad (r, \theta) \in \pi_s \quad (38)$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{zz} = 0, \quad z=0, (r, \theta) \notin \pi_s \quad (39)$$

که در آن  $P(r, \theta)$  و  $Q(r, \theta)$  و  $R(r, \theta)$  مولفه‌های بردار بارگذاری  $f(r, \theta)$  به ترتیب در امتدادهای  $z, \theta, r$  می‌باشند. همانطور که قبلاً گفته شد با فرض هارمونیک بودن حرکت و با استفاده از رابطه (۱۰) می‌توان شرایط مرزی را بصورت زیر نوشت

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z=0) = P(r, \theta),$$

$$\sigma_{z\theta}(r, \theta, z=0) = Q(r, \theta),$$

که در آن

$$a_2 = S_1^2 \left( \frac{\rho_0 \omega^2}{\mu_1} - \xi^2 \right) + S_2^2 \left( \frac{\rho_0 \omega^2}{\mu_2} - \xi^2 \right) + \varepsilon \omega^2 S_1^2 S_2^2$$

$$a_0 = S_1^2 \left( \frac{\rho_0 \omega^2}{\mu_1} - \xi^2 \right) S_2^2 \left( \frac{\rho_0 \omega^2}{\mu_2} - \xi^2 \right) \quad (30)$$

بنابراین  $F_m^m(\xi, z)$  همانگونه که در رابطه (۲۸) نشان داده شده به صورت زیر درمی‌آید

$$F_m^m(\xi, z) = A_m(\xi)e^{-\lambda_{m1}z} + B_m(\xi)e^{-\lambda_{m2}z} \quad (31)$$

که در آن

$$\lambda_{m1} = \sqrt{a\xi^2 + b + \frac{1}{2}\sqrt{c\xi^4 + d\xi^2 + e}},$$

$$\lambda_{m2} = \sqrt{a\xi^2 + b - \frac{1}{2}\sqrt{c\xi^4 + d\xi^2 + e}} \quad (32)$$

در اینجا

$$a = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2), b = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 \left( \frac{1}{A_{33}} + \frac{1}{A_{44}} \right),$$

$$c = (S_2^2 - S_1^2)^2, d = -2\rho\omega^2 \left[ \left( \frac{1}{A_{33}} + \frac{1}{A_{44}} \right) (S_1^2 + S_2^2) - 2 \frac{A_{11}}{A_{33}} \left( \frac{1}{A_{11}} + \frac{1}{A_{44}} \right) \right],$$

$$e = \rho^2 \omega^4 \left( \frac{1}{A_{33}} - \frac{1}{A_{44}} \right)^2 \quad (33)$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که جواب معادله (۲۶) عبارتست از

$$\chi_m^m(\xi, z) = C_m(\xi)e^{-\lambda_{m3}z} \quad (34)$$

که در آن

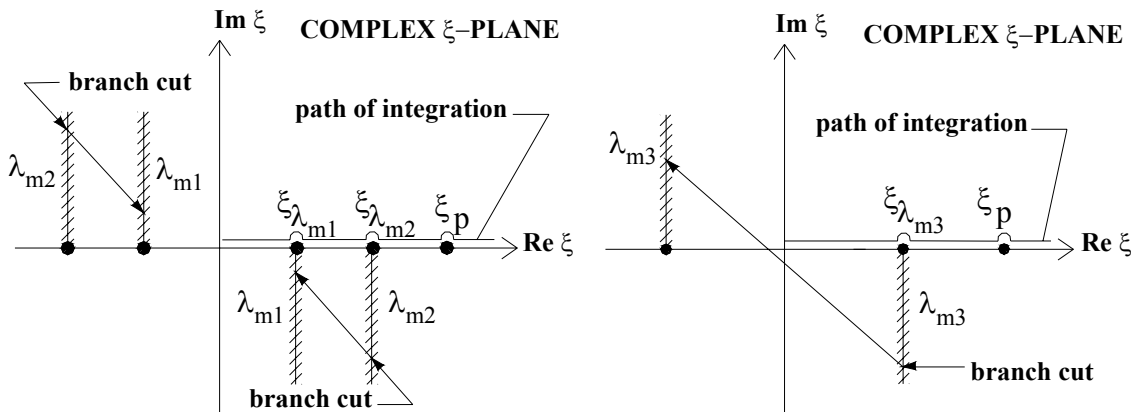
$$\lambda_{m3} = \sqrt{S_0^2(\xi^2 - \rho_0\omega^2)} \quad (35)$$

$A_m(\xi)$ ,  $B_m(\xi)$ ,  $C_m(\xi)$  در معادلات (۳۱) و (۳۴) توابعی مجهول می‌باشند که با نوشتن شرایط مرزی بایستی بدست آیند. توابع  $\lambda_{m3}(\xi)$ ,  $\lambda_{m2}(\xi)$  و  $\lambda_{m1}(\xi)$  توابعی چند مقدار<sup>۲۰</sup> هستند. هر تابع چند مقدار در واقع مجموعه‌ای از توابع تک مقداری<sup>۲۱</sup> است. هر یک از اعضای این مجموعه یک بریدگی شاخه<sup>۲۲</sup> از تابع چند مقدار نامیده می‌شود. نقطه تکین<sup>۲۳</sup> مشترک بین همه بریدگی های شاخه برای تابع چند مقدار یک نقطه شاخه ای نامیده

تابع بارگذاری و مولفه‌های تانسور تنش را می‌توان بر حسب سری فوریه نوشت که در این صورت شرایط مرزی (۴۰) و (۴۱) بر حسب مولفه‌های تابع بارگذاری در فضای فوریه بصورت زیر در می‌آید

$$\sigma_{zz}(r, \theta, z=0) = R(r, \theta), \quad (r, \theta) \in \pi_s \quad (40)$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{zz} = 0, \quad z=0, (r, \theta) \notin \pi_s \quad (41)$$



شکل ۱: بریدگی‌های شاخه برای  $\lambda_{m1}$ ,  $\lambda_{m2}$  و  $\lambda_{m3}$ .

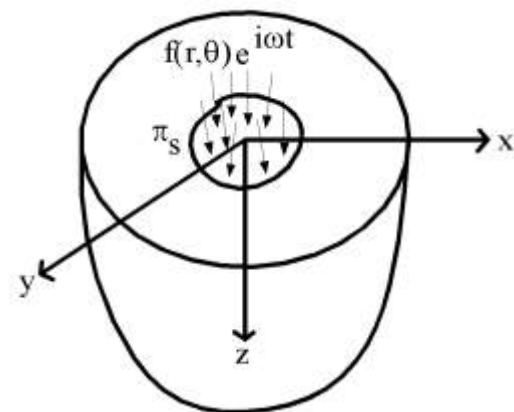
فضای فوریه می‌باشند. حال به منظور بدست آوردن توابع مجهول  $A_m(\xi)$ ,  $B_m(\xi)$ ,  $C_m(\xi)$  در معادلات (۳۱) و (۳۴) باید تبدیل هنکل ضرایب سری فوریه تنش‌ها را بدست آورد. می‌توان نشان داد روابط زیر برای ضرایب سری فوریه تغییر مکانها در فضای تبدیل یافته هنکل برقرار است

$$u_m^{m-1} - i v_m^{m-1} = -\alpha_3 \xi \frac{dF_m^m}{dz} - i \xi \chi_m^m$$

$$u_m^{m+1} + i v_m^{m+1} = \alpha_3 \xi \frac{dF_m^m}{dz} - i \xi \chi_m^m$$

$$w_m^m = (1 + \alpha_1) \left[ -\xi^2 + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\rho_0 \omega^2}{1 + \alpha_1} \right] F_m^m \quad (44)$$

که در آن  $u_m^{m+1}$ ,  $u_m^{m-1}$  به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه  $m-1$  و مرتبه  $m+1$  تابع  $u_m$  و  $v_m^{m+1}$ ,  $v_m^{m-1}$  به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه  $m-1$  و  $m+1$  تابع  $v_m$  و  $w_m^m$  و  $\chi_m^m$  به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه  $m$  توابع  $F_m$  و  $\chi_m$  و  $W_m$  می‌باشند. حال با توجه به روابط کرنش - تغییر مکان (۶) و روابط تنش - کرنش (۲) می‌توان مولفه‌های تانسور تنش را بر حسب توابع  $F_m^m$  و  $\chi_m^m$  به شرح زیر نوشت:



شکل ۲: محیط نیمه بی نهایت با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت اثر نیروی دلخواه  $f(r, \theta) e^{i\omega t}$  مؤثر بر سطح محدود  $\pi_s$ .

$$\sigma_{rz,m}(r, z=0) = P_m(r)$$

$$\sigma_{z\theta,m}(r, z=0) = Q_m(r),$$

$$\sigma_{zz,m}(r, z=0) = R_m(r), \quad r \in \pi_s \quad (42)$$

$$\sigma_{rz,m} = \sigma_{z\theta,m} = \sigma_{zz,m} = 0, \quad z=0, r \notin \pi_s \quad (43)$$

که در آن  $\sigma_{jzm}$  ( $j=r, \theta, z$ ) مولفه‌های تانسور تنش در فضای فوریه و  $P_m$ ,  $Q_m$ ,  $R_m$  مولفه‌های بردار بارگذاری در

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{1}{\xi I(\xi)} \left[ \frac{-v_2}{2A_{44}} (X_m - Y_m) - \eta_2 \xi \frac{Z_m}{A_{33}} \right], \\
 B_m &= \frac{1}{\xi I(\xi)} \left[ + \frac{v_1}{2A_{44}} (X_m - Y_m) + \eta_1 \xi \frac{Z_m}{A_{33}} \right], \\
 C_m &= \frac{i(X_m + Y_m)}{2\xi \lambda_{m3} A_{44}}
 \end{aligned}
 \tag{۴۹}$$

جایگذاری توابع  $A_m, B_m, C_m$  در معادلات (۴۴) منجر به روابط زیر می شود.

$$\begin{aligned}
 u_m^{m-1} - i v_m^{m-1} &= \Gamma_1(z, \xi) \left( \frac{X_m - Y_m}{2A_{44}} \right) + \\
 &\quad \Gamma_2(z, \xi) \left( \frac{X_m + Y_m}{2A_{44}} \right) + \Gamma_3(z, \xi) \left( \frac{Z_m}{A_{44}} \right), \\
 u_m^{m+1} + i v_m^{m+1} &= -\Gamma_1(z, \xi) \left( \frac{X_m - Y_m}{2A_{44}} \right) + \\
 &\quad \Gamma_2(z, \xi) \left( \frac{X_m + Y_m}{2A_{44}} \right) - \Gamma_3(z, \xi) \left( \frac{Z_m}{A_{44}} \right), \\
 w_m^m &= \Lambda_1(z, \xi) \left( \frac{X_m - Y_m}{2A_{44}} \right) + \Lambda_2(z, \xi) \left( \frac{Z_m}{A_{44}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{۵۰}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1(z, \xi) &= \frac{\alpha_3}{I} (v_1 \lambda_{m2} e^{-\lambda_{m2} z} - v_2 \lambda_{m1} e^{-\lambda_{m1} z}), \\
 \Gamma_2(z, \xi) &= \frac{e^{-\lambda_{m3} z}}{\lambda_{m3}}, \\
 \Gamma_3(z, \xi) &= \frac{\alpha_3 A_{44} \xi}{A_{33} I} (\lambda_{m2} \eta_1 e^{-\lambda_{m2} z} - \lambda_{m1} \eta_2 e^{-\lambda_{m1} z}), \\
 \Lambda_1(\xi, z) &= \frac{(1 + \alpha_1)}{\xi I} \left\{ \left[ \frac{\rho_0 \omega^2}{1 + \alpha_1} - \xi^2 \right] [v_1 e^{-\lambda_{m2} z} - \right. \\
 &\quad \left. v_2 e^{-\lambda_{m1} z}] + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1} [v_1 \lambda_{m2}^2 e^{-\lambda_{m2} z} - v_2 \lambda_{m1}^2 e^{-\lambda_{m1} z}] \right\}, \\
 \Lambda_2(\xi, z) &= \frac{-A_{44}(1 + \alpha_1)}{A_{33} I} \left\{ \left[ \frac{\rho_0 \omega^2}{1 + \alpha_1} - \xi^2 \right] [\eta_2 e^{-\lambda_{m1} z} - \right. \\
 &\quad \left. \eta_1 e^{-\lambda_{m2} z}] + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1} [\eta_2 \lambda_{m1}^2 e^{-\lambda_{m1} z} - \eta_1 \lambda_{m2}^2 e^{-\lambda_{m2} z}] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{۵۱}$$

در اینجا

$$\begin{aligned}
 X_m &= P_m^{m-1}(\xi) - i Q_m^{m-1}(\xi), Y_m = P_m^{m+1}(\xi) + i Q_m^{m+1}(\xi), \\
 Z_m &= R_m^m(\xi), I = \eta_2 v_1 - \eta_1 v_2
 \end{aligned}
 \tag{۵۲}$$

اگر  $A_{11}$  تا  $A_{66}$  برای مصالح ایزوتروپ بر حسب ضرایب لامه  $\lambda$  و  $\mu$  از رابطه (۴) جایگزین شوند، در این صورت روابط (۵۰) به شرح زیر در می آیند.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zr}^{m-1} - i \sigma_{z\theta}^{m-1} &= -A_{44} \xi \left[ (\alpha_3 - \alpha_2) \frac{d^2}{dz^2} + \xi^2 \right. \\
 &\quad \left. (1 + \alpha_1) - \rho_0 \omega^2 \right] F_m^m - A_{44} \xi i \frac{d\chi_m^m}{dz}, \\
 \sigma_{zr}^{m+1} + i \sigma_{z\theta}^{m+1} &= A_{44} \xi \left[ (\alpha_3 - \alpha_2) \frac{d^2}{dz^2} + \xi^2 \right. \\
 &\quad \left. (1 + \alpha_1) - \rho_0 \omega^2 \right] F_m^m - A_{44} \xi i \frac{d\chi_m^m}{dz}, \\
 \sigma_{zz}^m &= \frac{d}{dz} \left[ \alpha_3 A_{13} \xi^2 + A_{33} (\rho_0 \omega^2 - \xi^2 (1 + \alpha_1)) + \right. \\
 &\quad \left. A_{33} \alpha_2 \frac{d^2}{dz^2} \right] F_m^m
 \end{aligned}
 \tag{۴۵}$$

که در آن  $\sigma_{z\theta}^{m+1}$  و  $\sigma_{rzm}^{m-1}$  ... تبدیل هنکل مرتبه  $m-1, m+1$  و ... ضرایب  $m$  ام سری فوریه مولفه های تانسور تنش می باشند. از ترکیب روابط (۴۲) و (۴۵) در سطح  $z=0$  میتوان بدست آورد.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zr}^{m-1} - i \sigma_{z\theta}^{m-1} &= P_m^{m-1} - i Q_m^{m-1}, \\
 \sigma_{zr}^{m+1} + i \sigma_{z\theta}^{m+1} &= P_m^{m+1} + i Q_m^{m+1}, \\
 \sigma_{zz}^m &= R_m^m
 \end{aligned}
 \tag{۴۶}$$

حال اگر توابع  $\chi_m^m$  و  $F_m^m$  و مشتقات آنها در  $z=0$  در رابطه (۴۵) جایگزین شده و نتایج در رابطه (۴۶) قرار داده شود می توان نشان داد.

$$\begin{aligned}
 -A_{44} \xi \eta_1 A_m - A_{44} \xi \eta_2 B_m + \\
 i \xi A_{44} \lambda_{m3} C_m &= P_m^{m-1} - i Q_m^{m-1}, \\
 A_{44} \xi \eta_1 A_m + A_{44} \xi \eta_2 B_m + \\
 i \xi A_{44} \lambda_{m3} C_m &= P_m^{m+1} + i Q_m^{m+1}, \\
 A_{33} [v_1 A_m + v_2 B_m] &= R_m^m
 \end{aligned}
 \tag{۴۷}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 \eta_i &= (\alpha_3 - \alpha_2) \lambda_{mi}^2 + \xi^2 (1 + \alpha_1) - \rho_0 \omega^2 \\
 v_i &= (\eta_i - \alpha_3) \frac{A_{13}}{A_{33}} \xi^2 - \alpha_3 \lambda_{mi}^2
 \end{aligned}
 \tag{۴۸}$$

معادلات (۴۷) یک سیستم معادلات جبری خطی برای توابع مجهول  $A_m, B_m, C_m$  می باشد. اگر این معادلات برای  $A_m, B_m, C_m$  بر حسب ضرایب سری فوریه تابع بارگذاری در فضای تبدیل یافته هنکل حل شوند آنگاه این توابع به شرح زیر بدست می آیند.

(۵۰) تبدیل معکوس هنکل بگیریم در اینصورت ضرایب  $m$  ام سری فوریه مولفه‌های تغییر مکان به شرح زیر بدست می‌آید.

$$u_m(r, z) = -\frac{\alpha_3}{2} \int_0^\infty \xi [J_{m+1}(\xi r) - J_{m-1}(\xi r)] [\xi A_m \lambda_{m1} e^{-\lambda_{m1} z} + \xi B_m \lambda_{m2} e^{-\lambda_{m2} z}] d\xi - \frac{i}{2} \int_0^\infty \xi [J_{m+1}(\xi r) + J_{m-1}(\xi r)] \xi C_m e^{-\lambda_{m3} z} d\xi,$$

$$v_m(r, z) = \frac{i\alpha_3}{2} \int_0^\infty \xi [J_{m+1}(\xi r) + J_{m-1}(\xi r)] [\xi A_m \lambda_{m1} e^{-\lambda_{m1} z} + \xi B_m \lambda_{m2} e^{-\lambda_{m2} z}] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi [-J_{m+1}(\xi r) + J_{m-1}(\xi r)] \xi C_m e^{-\lambda_{m3} z} d\xi,$$

$$w_m(r, z) = \int_0^\infty \left[ \left( \alpha_2 \lambda_{m1}^2 - (1 + \alpha_1) \left( \xi^2 - \frac{\rho_0 \omega^2}{1 + \alpha_1} \right) \right) \xi A_m e^{-\lambda_{m1} z} + \left( \alpha_2 \lambda_{m2}^2 - (1 + \alpha_1) \left( \xi^2 - \frac{\rho_0 \omega^2}{1 + \alpha_1} \right) \right) \xi B_m e^{-\lambda_{m2} z} \right] J_m(\xi r) d\xi$$

(۵۷)

که در آن ضرایب  $A_m, B_m, C_m$  بر اساس روابط (۴۸) می‌باشد. با جایگذاری ضرایب  $m$  ام سری فوریه تغییر مکان در بسط فوریه مربوطه دامنه مولفه‌های تغییر مکان به شرح زیر بدست می‌آید.

$$u(r, \theta, z), v(r, \theta, z), w(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [u_m(r, z), v_m(r, z), w_m(r, z)] e^{im\theta}$$

(۵۸)

بنابراین بر اساس رابطه (۹) مولفه‌های تغییر مکان عبارتند از:

$$U(r, \theta, z, t), V(r, \theta, z, t), W(r, \theta, z, t) = [u(r, \theta, z), v(r, \theta, z), w(r, \theta, z)] e^{i\omega t}$$

(۵۹)

### نتایج برای تحریک هارمونیک مماس برسطح

در تحلیل گذشته جواب کلی معادلات حرکت برای تحریک هارمونیک دلخواه در سطح  $z=0$  بدست آمد. در این جا نتایج بدست آمده قبلی برای بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت افقی (در راستای محور  $x$ ) موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع  $a$ ، بررسی می‌گردد. برای بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت افقی (در راستای محور  $x$ ) موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع  $a$

$$u_m^{m-1} - iv_m^{m-1} = \gamma_1(z, \xi) \left( \frac{X_m - Y_m}{2\mu} \right) + \gamma_2(z, \xi) \left( \frac{X_m + Y_m}{2\mu} \right) + \gamma_3(z, \xi) \left( \frac{Z_m}{\mu} \right),$$

$$u_m^{m+1} + iv_m^{m+1} = -\gamma_1(z, \xi) \left( \frac{X_m - Y_m}{2\mu} \right) + \gamma_2(z, \xi) \left( \frac{X_m + Y_m}{2\mu} \right) - \gamma_3(z, \xi) \left( \frac{Z_m}{\mu} \right),$$

$$w_m^m = \Omega_1(z, \xi) \left( \frac{X_m - Y_m}{2\mu} \right) + \Omega_2(z, \xi) \left( \frac{Z_m}{\mu} \right)$$

(۵۳)

که در آن

$$\gamma_1(z, \xi) = \frac{\beta(2\xi^2 - k_s^2)}{R^-(\xi)} e^{-\beta z} - \frac{2\xi^2 \beta}{R^-(\xi)} e^{-\alpha z}$$

$$\gamma_2(z, \xi) = \frac{1}{\beta} e^{-\beta z},$$

$$\gamma_3(z, \xi) = \frac{2\xi\alpha\beta}{R^-(\xi)} e^{-\beta z} - \frac{\xi(2\xi^2 - k_s^2)}{R^-(\xi)} e^{-\alpha z},$$

$$\Omega_1(z, \xi) = \frac{-\xi(2\xi^2 - k_s^2)}{R^-(\xi)} e^{-\beta z} + \frac{2\xi\alpha\beta}{R^-(\xi)} e^{-\alpha z},$$

$$\Omega_2(z, \xi) = \frac{-2\xi^2\alpha}{R^-(\xi)} e^{-\beta z} + \frac{\alpha(2\xi^2 - k_s^2)}{R^-(\xi)} e^{-\alpha z}$$

(۵۴)

در اینجا

$$\alpha = \sqrt{\xi^2 - k_d^2}, \beta = \sqrt{\xi^2 - k_s^2}, k_d = \frac{\omega}{C_d}, k_s = \frac{\omega}{C_s},$$

$$R^-(\xi) = (2\xi^2 - k_s^2)^2 - 4\xi^2\alpha\beta$$

(۵۵)

بطوری که

$$C_d = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}, C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

(۵۶)

$C_s$  و  $C_d$  به ترتیب سرعت امواج محوری یا طولی<sup>۲۵</sup> و برشی<sup>۲۶</sup> یا عرضی در محیطهای ایزوتروپ می‌باشند. Pak در سال ۱۹۸۷ برای محیط نیمه بی‌نهایت با رفتار ایزوتروپ روابط (۵۳) را برای بارگذاری در عمق  $z=s$  در مرجع شماره [۱۰] بیان کرده است. اگر در نتایج Pak در مرجع شماره [۱۰]،  $s=0$  (بارگذاری در سطح) قرار داده شود، نتایج Pak دقیقاً با روابط (۵۳) معادل می‌گردد. این بدان معنی است که از لحاظ تحلیلی نتایج حاضر در این مقاله کاملاً با نتایج ارائه شده توسط Pak در سال ۱۹۸۷ برای مصالح ایزوتروپ مطابقت دارد. اگر از روابط



مولفه‌های بردار بارگذاری عبارتند از:

$$u(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{2\pi \mu a}$$

$$\left\{ \int_0^\infty \gamma_1(z, \zeta) J_1(\zeta a) [J_0(\zeta r) - J_2(\zeta r)] d\zeta \right. \\ \left. + \int_0^\infty \gamma_2(z, \zeta) J_1(\zeta a) [J_0(\zeta r) + J_2(\zeta r)] d\zeta \right\}$$

$$v(r, \theta, z) = \frac{-\sin \theta}{2\pi \mu a}$$

$$\left\{ \int_0^\infty \gamma_1(z, \zeta) J_1(\zeta a) [J_0(\zeta r) + J_2(\zeta r)] d\zeta \right. \\ \left. + \int_0^\infty \gamma_2(z, \zeta) J_1(\zeta a) [J_0(\zeta r) - J_2(\zeta r)] d\zeta \right\}$$

$$w(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{\pi \mu a} \int_0^\infty \Omega_1(z, \zeta) J_1(\zeta a) J_1(\zeta r) d\zeta \quad (64)$$

که در آن  $\gamma_1$ ،  $\gamma_2$  و  $\Omega_1$  براساس روابط (۵۴) می باشند. رابطه (۶۴) دقیقاً معادل با نتایج ارائه شده توسط Pak در مرجع شماره [۱۰] برای تحریک در سطح ( $s=0$ ) می باشد.

### نتایج عددی

همان طور که ملاحظه شد مولفه‌های بردار تغییر مکان بصورت انتگرال‌های یک بعدی نیمه متناهی با توابع انتگرال<sup>۲۷</sup> (توابع زیر علامت انتگرال) مختلط بدست آمده‌اند. این انتگرال‌ها حتی در حالت‌های ساده مربوط به مصالح ایزوتروپ هم به صورت تحلیلی قابل انتگرال‌گیری نیستند. لذا این انتگرال‌ها به صورت عددی برآورد شده‌اند. توابع انتگرال تابعی پیچیده با رفتار نوسانی به علت وجود توابع بسل می‌باشند. توابع بسل در بی‌نهایت به سمت صفر میل می کنند، اما روند همگرایی این توابع در بی‌نهایت بسیار کند می‌باشد، به همین دلیل یکی از موارد مهم در برآورد انتگرال‌ها تعیین بی‌نهایت فیزیکی است. همچنین توابع انتگرال شامل نقاط تکین محدودی می‌باشند. این نقاط تکین شامل نقاط شاخه ای و قطب می‌باشند. در حالت کلی برای مصالح ایزوتروپ جانبی سه بعدی سه نقطه شاخه ای در مسیر انتگرال‌گیری وجود دارد. این نقاط بر اساس رابطه (۳۷) در  $\lambda_{m_i}$  ( $i=1, 2, 3$ ) واقع شده‌اند. در حالت کلی برای یک ماده ایزوتروپ جانبی سه بعدی سه موج حجمی<sup>۲۸</sup> وجود دارد. نقاط شاخه‌ای فوق در واقع اعداد موج<sup>۲۹</sup> متناظر با این امواج هستند. حرکت متناظر با این امواج نه بطور خالص برشی و نه به طور

در اینصورت می‌توان نشان داد مولفه‌های تابع بارگذاری در فضای فوریه به شرح زیر است:

$$P_1(r) = P_{-1}(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a^2}, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

$$P_m(r) = 0 \quad \text{For } m \neq \pm 1;$$

$$Q_1(r) = -Q_{-1}(r) = \begin{cases} i \frac{1}{2\pi a^2}, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

$$Q_m(r) = 0 \quad \text{For } m \neq \pm 1;$$

$$R_m(r) = 0 \quad \text{For all } m$$

(61)

با جایگذاری روابط (۶۱) در رابطه (۵۲) می‌توان نشان داد.

$$X_m = \begin{cases} \frac{J_1(\zeta a)}{\pi \zeta a}, & m = 1 \\ 0, & m \neq 1 \end{cases}$$

$$Y_m = \begin{cases} \frac{J_1(\zeta a)}{\pi \zeta a}, & m = -1 \\ 0, & m \neq -1 \end{cases}$$

$$Z_m = 0 \quad \text{For all } m$$

(62)

ترکیب روابط (۴۹)، (۵۲)، (۵۷)، (۵۸) و (۶۲) منجر به مولفه‌های بردار تغییر مکان در امتدادهای  $Z, \theta, r$  به شرح زیر می‌شود.

$$u(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{2\pi A_{44} a}$$

$$\left\{ \int_0^\infty \Gamma_1(z, \zeta) J_1(\zeta a) [J_0(\zeta r) - J_2(\zeta r)] d\zeta \right. \\ \left. + \int_0^\infty \Gamma_2(z, \zeta) J_1(\zeta a) [J_0(\zeta r) + J_2(\zeta r)] d\zeta \right\}$$

$$v(r, \theta, z) = \frac{-\sin \theta}{2\pi A_{44} a}$$

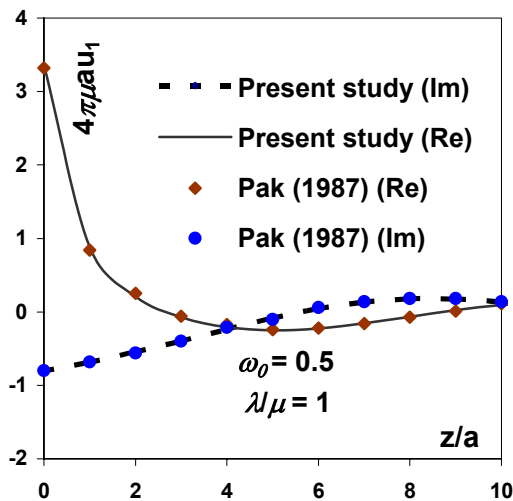
$$\left\{ \int_0^\infty \Gamma_1(z, \zeta) J_1(\zeta a) [J_0(\zeta r) + J_2(\zeta r)] d\zeta \right. \\ \left. + \int_0^\infty \Gamma_2(z, \zeta) J_1(\zeta a) [J_0(\zeta r) - J_2(\zeta r)] d\zeta \right\}$$

$$w(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{\pi A_{44} a} \int_0^\infty \Lambda_1(z, \zeta) J_1(\zeta a) J_1(\zeta r) d\zeta$$

(63)

گر در روابط (۶۳)،  $A_{11}$  تا  $A_{66}$  برای مصالح ایزوتروپ بر حسب ضرایب لامه  $\lambda$  و  $\mu$  از رابطه (۴) جایگزین گردد،

است. جدول (۱) تغییر مکان‌های بی بعد ناشی از بار گسترده یکنواخت  $p_0$  موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع  $a$  را در حالت استاتیک و برای مصالح ایزوتروپ نشان می‌دهد. در این جدول نتایج عددی حاصل از مطالعه حاضر با نتایج عددی ارائه شده توسط Rajapakse در سال ۱۹۹۱ [۱۲] و نتایج عددی ارائه شده توسط Wang در سال ۱۹۹۳ [۱۳] مقایسه شده است. تطابق خوب جواب‌ها معرف صحت نتایج عددی بدست آمده در این بخش می‌باشد. ذکر این نکته ضروری است که نتایج برای حالت استاتیک با قرار دادن  $\omega_0 = 0,001$  برای حالت دینامیک بدست آمده است. شکل (۳) مقایسه نتایج عددی را برای حالت دینامیکی نشان می‌دهد. برای مقایسه نتایج در حالت دینامیکی از نتایج ارائه شده توسط Pak در سال ۱۹۸۷ [۱۰] برای مصالح ایزوتروپ و برای تغییر مکان افقی ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع  $a$  استفاده شده است. در این شکل نتایج تحقیقات Pak به صورت نقاط تو پر نشان داده شده است. تطابق خوب جواب‌ها چه در قسمت حقیقی و چه در قسمت موهومی معرف صحت نتایج بدست آمده در این مقاله می‌باشد.



شکل ۳: مقایسه مولفه تغییر مکان در جهت محور  $x$  برحسب عمق در فضای نیمه منتهای با رفتار ایزوتروپ.

به منظور ارائه نتایج عددی، ۳ نوع مصالح مختلف با رفتار ایزوتروپ جانبی به همراه یک نوع مصالح ایزوتروپ در نظر گرفته شده است. جدول (۲) خصوصیات مکانیکی را برای این مواد ارائه می‌کند. نتایج گرافیکی برای مصالح معرفی شده در جدول (۲) در شکل (۴) نشان داده شده است.

خالص محوری است [۱۰]. اما برای حالت مربوط به مصالح ایزوتروپ تعداد نقاط شاخه‌ای فوق به دو کاهش می‌یابد:

$$\xi_{\lambda_{m1}} = k_d = \frac{\omega}{C_d}, \xi_{\lambda_{m2}} = \xi_{\lambda_{m3}} = k_s = \frac{\omega}{C_s} \quad (65)$$

همانطور که قبلاً بیان شد  $C_s$  و  $C_d$  به ترتیب سرعت امواج محوری یا طولی و برشی یا عرضی می‌باشند. علاوه بر این عبارت  $I(\xi)$  در رابطه (۵۲) قطب‌ها را مشخص می‌کند. قطب‌ها در واقع متناظر با ورود امواج ریلی می‌باشند و مقدار آنها از معادله زیر بدست می‌آید.

$$I(\xi) = \eta_2 v_1 - \eta_1 v_2 = 0 \quad (66)$$

رابطه (۶۶) در مورد مصالح ایزوتروپ به معادله کلاسیک ریلی کاهش می‌یابد [۷]. Stoneley نشان داده است که رابطه (۶) تنها دو ریشه  $\pm \xi_p$  در راستای محور اعداد حقیقی دارد [۱۵]. برای مصالح ایزوتروپ

$$\xi_p = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sqrt{3}} (\sqrt{\rho \omega} / \sqrt{\mu})$$

مصالح مختلف در جدول (۲) آمده است. در روشهای معمول انتگرالگیری عددی مانند روش ذورنقه‌ای یا روش سیمپسون مقدار انتگرال از تقسیم بازه انتگرال‌گیری به فواصل مساوی و محاسبه مقادیر تابع انتگران در نقاط با فاصله مساوی از هم برآورد میگردد. به علت وجود توابع بسط و توابع نمایی توابع انتگران توابعی پیچیده با رفتار نوسانی و بعضاً نواحی با تغییرات سریع می‌باشند. لذا باید روشی اختیار شود که با توجه به تغییرات تابع انتگران در نواحی مختلف بازه انتگرال‌گیری، محاسبه مقادیر تابع انتگران را در نقاط با فاصله نامساوی از هم انجام دهد. با توجه به موارد مهم فوق، باید روش مناسبی جهت برآورد انتگرال‌ها انتخاب کرد. در روش اختیار شده باید توجه خاصی به بینهایت، قطب و نقاط شاخه‌ای نمود. در این جا روش Adaptive quadrature [۵] برای برآورد عددی انتخاب شده است. به منظور ارزیابی میزان دقت نتایج عددی حاصل از این مقاله مقایسه‌هایی با نتایج موجود برای مصالح ایزوتروپ انجام گرفته است. ذکر این نکته ضروری است که کلیه نتایج عددی ارائه شده بصورت بی بعد می‌باشد. همچنین فرکانس بی بعد  $\omega_0 = a\omega\sqrt{\rho/A_{44}}$  برای ارائه نتایج عددی تعریف شده

جدول ۱: مقایسه تغییر مکانهای افقی و قائم محیط نیمه بینهایت ایزوتروپ ناشی از بار گسترده یکنواخت  $p_0$  در راستای محور  $x$  موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع  $a$  ( $\nu = 0,25$ ).

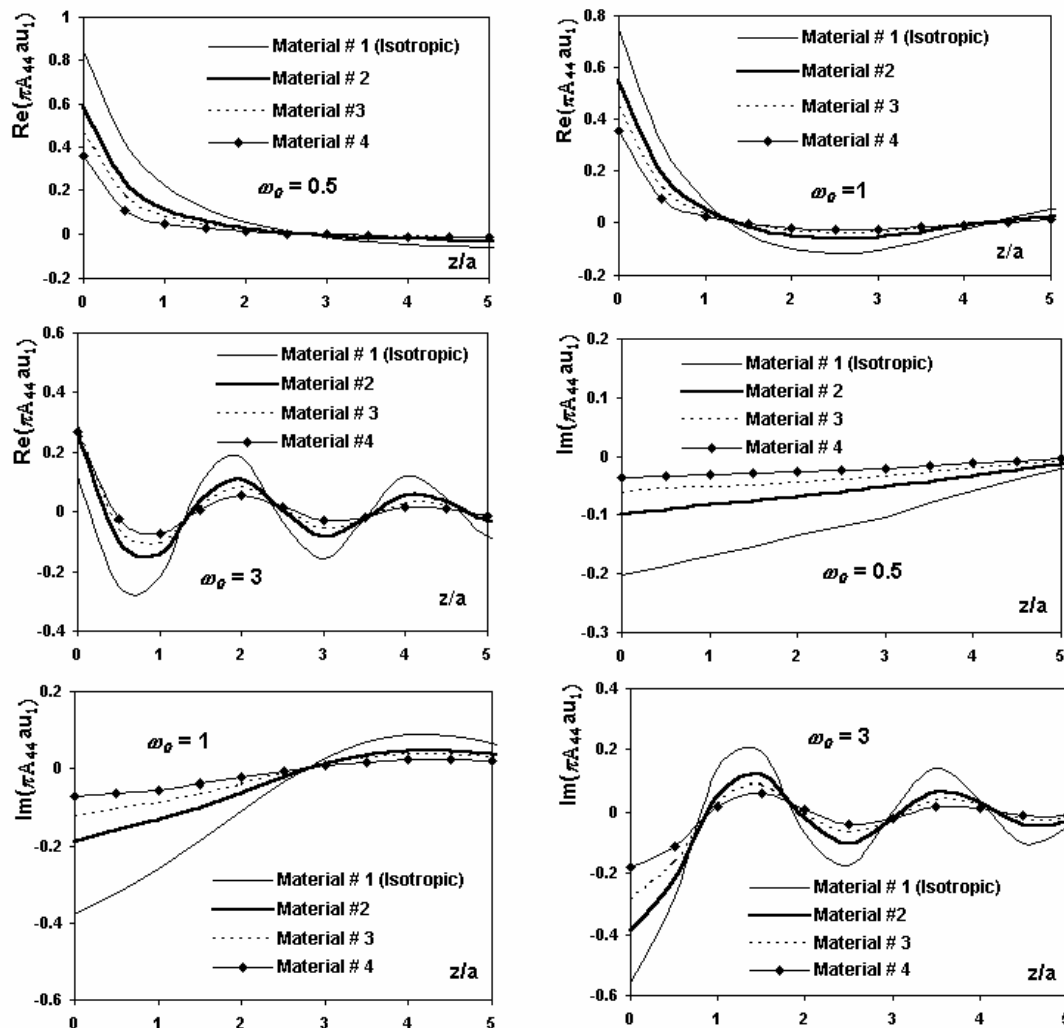
r/a, $\theta$ , z/a	$\frac{\mu u}{p_0 a}$			$\frac{\mu w}{p_0 a}$		
	مطالعه حاضر	Rajapakse and Wang (1993)	Rajapakse (1983)	مطالعه حاضر	Rajapakse and Wang (1993)	Rajapakse (1983)
0,0,0	0.8750	0.8758	0.8750	0.0000	0.0	0.0
0,0,25	0.6358	0.6367	0.6358	0.0000	0.0	0.0
0,0,1.0	0.2892	0.2898	0.2901	0.0000	0.0	0.0
0,0,2.0	0.1538	0.1542	0.1542	0.0000	0.0	0.0
.5,0,0	0.8216	0.8226	0.8216	0.0625	0.0625	0.0625
1.0,0,0	0.5836	0.5845	0.5835	0.1250	0.1243	0.1250
2.0,0,0	0.2545	0.2554	0.2544	0.0625	0.0626	0.0626

جدول ۲: خصوصیات مکانیکی مصالح مختلف.

مصالح	$\frac{\sqrt{A_{44}}}{\sqrt{\rho\omega}}$	$A_{12}$ ( $\times 10^4$ N/mm <sup>2</sup> )	$A_{13}$ ( $\times 10^4$ N/mm <sup>2</sup> )	$A_{44}$ ( $\times 10^4$ N/mm <sup>2</sup> )	$A_{66}$ ( $\times 10^4$ N/mm <sup>2</sup> )	$A_{33}$ ( $\times 10^4$ N/mm <sup>2</sup> )	$A_{11}$ ( $\times 10^4$ N/mm <sup>2</sup> )	$\nu'$	$\nu$	$G$ ( $\times 10^4$ N/mm <sup>2</sup> )	$E'$ ( $\times 10^4$ N/mm <sup>2</sup> )	$E$ ( $\times 10^4$ N/mm <sup>2</sup> )
1 (Isotropic)	1.08766	2	2	2	2	6	6	0.25	0.25	2	5	5
2	1.03800	6	5	2	4	7.5	14	0.25	0.25	2	5	10
3	1.02293	14	10	2	6	10	26	0.25	0.25	2	5	15
4	1.01146	90	50	2	10	30	110	0.25	0.25	2	5	25

این است که تغییر مکانها بصورت قابل توجهی متأثر از فرکانس تحریک می باشند. در این نمودارها تغییر علامت در تغییر مکانها را بر حسب عمق می توان مشاهده نمود. قسمت حقیقی مؤلفه تغییر مکان بطور کلی با افزایش فرکانس تحریک کاهش می یابد در حالیکه قسمت موهومی مؤلفه تغییر مکان بطور کلی با افزایش فرکانس تحریک افزایش می یابد. علاوه بر این تأخیر توابع تغییر مکان در ارتباط با فاصله در فرکانسهای کم بسیار یکنواخت است در حالیکه در فرکانسهای زیاد این تأخیر نوسانی بوده و با افزایش فرکانس نوسانی تر میشود. همچنین با افزایش فرکانس نوسان، طول موج کاهش می یابد. نتایج برای فرکانسهای مختلف نشان می دهد که در حالت کلی امواج با فرکانس بی بعد بزرگتر، دیرتر (در فاصله دورتر) مستهلک میشوند.

این نتایج برای فرکانسهای مختلف  $\omega_0 = 0,5$ ،  $\omega_0 = 1$  و  $\omega_0 = 3$  ارائه شده است. نتایج عددی مختلف برای قسمتهای حقیقی و موهومی مولفه تغییر مکان افقی  $u_1$  (در راستای محور  $x$ ) ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت افقی (در راستای محور  $x$ ) موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع  $a$  ارائه شده است. با توجه به این نکته که هم بارگذاری وهم تغییر مکان در راستای افقی (در صفحه ایزوتروپی) است، میتوان انتظار داشت که تغییر مکانها باید بطور خاص متأثر از ضریب  $E$  یعنی مدول یانگ در صفحه ایزوتروپی باشند نمودارهای ارائه شده در شکل (۴) این موضوع را به خوبی نشان می دهند. ملاحظه می شود که به خصوص در فرکانسهای کم ( $\omega_0 \leq 1$ ) قسمتهای حقیقی و موهومی مؤلفه تغییر مکان افقی با کاهش مقدار ضریب  $E$  افزایش می یابد. همچنین مقایسه نمودارهای ارائه شده در شکل (۴) نشان دهنده



شکل ۴: قسمتهای حقیقی و موهومی مولفه تغییر مکان در جهت محور  $z$  ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور  $x$  مؤثر بر دایره ای به شعاع  $\alpha$  بر حسب عمق.

## نتیجه گیری

مولفه‌های بردار تغییر مکان و توابع پتانسیل در فضای هنکل بصورت تحلیلی بدست آمده است. مولفه‌های بردار تغییر مکان در فضای واقعی بصورت انتگرال‌های یک بعدی نیمه متناهی با توابع انتگرال (توابع زیر علامت انتگرال) مختلط بدست آمده‌اند. توابع انتگرال توابعی پیچیده با رفتار نوسانی به علت وجود توابع بسل می‌باشند. توابع بسل در بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کنند، اما روند همگرایی این توابع در بی‌نهایت بسیار کند می‌باشد، به همین دلیل یکی از موارد مهم در برآورد انتگرال‌ها تعیین بی‌نهایت فیزیکی است. همچنین توابع انتگرال شامل نقاط تکین محدودی می‌باشند و در برآورد انتگرال‌ها باید توجه خاصی به این نقاط نمود. این نقاط تکین شامل نقاط شاخه ای و قطب می‌باشند. در حالت کلی در یک ماده ایزوتروپ جانبی سه بعدی سه موج

در این مقاله یک روش تحلیلی برای بدست آوردن پاسخ محیط نیمه بینهایت با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت اثر تحریک هارمونیک مماس بر سطح آزاد محیط در حالت سه بعدی ارائه شده است. معادلات تعادل دینامیکی حاکم بر مسئله در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  بصورت یک سری معادلات درگیر می‌باشد که با استفاده از دو تابع پتانسیل که توسط اسکندری قادی در سال ۲۰۰۵ [۶] برای مسائل الاستودینامیک ارائه گردیده است، بطور کامل مجزا سازی شده‌اند. جواب تحلیلی برای توابع پتانسیل با نوشتن آنها بصورت سری فوریه در امتداد  $\theta$  و استفاده از تبدیل هنکل در امتداد شعاعی در فضای هنکل بدست آمده است. میدان تغییر مکان با استفاده از ارتباط

بسیار یکنواخت است در حالیکه در فرکانسهای زیاد این تأخیر نوسانی بوده و با افزایش فرکانس نوسانی تر میشود. همچنین با افزایش فرکانس نوسان، طول موج کاهش می یابد. نتایج برای فرکانسهای مختلف نشان می دهد که در حالت کلی امواج با فرکانس بی بعد بزرگتر، دیرتر (در فاصله دورتر) مستهلک میشوند. تأثیر ناهمسانی مصالح و میزان این نالیزوتروپی بر تغییر مکانها در حالت فرکانسهای کوچک مستقیماً وابسته به اندازه ثابتهای ارتجاعی در این امتدادها می باشد در حالی که در فرکانسهای بزرگ اندازه پاسخ ها نه تنها وابسته به اندازه ثابتهای ارتجاعی در امتداد آن توابع پاسخ است بلکه وابسته به بقیه ثابتهای ارتجاعی نیز می باشد. میدان تغییر مکان بدست آمده برای حل بسیاری از مسائل الاستودینامیک و همچنین به عنوان هسته برای حل معادلات انتگرال مرزی کاربرد دارند.

حجمی وجود دارد. نقاط شاخه‌ای فوق در واقع اعداد موج متناظر با این امواج هستند. حرکت متناظر با این امواج نه بطور خالص برشی و نه به طور خالص محوری است. همچنین قطب در واقع متناظر با ورود امواج ریلی می‌باشد. نتایج برای محیطهای ایزوتروپ با استفاده از نتایج بدست آمده برای محیطهای ایزوتروپ جانبی بصورت تحلیلی بدست آمده و با نتایج موجود برای محیطهای ایزوتروپ مقایسه شده است. همچنین به منظور تأیید روش انتگرال گیری عددی انتخاب شده نتایج عددی برای محیطهای ایزوتروپ با استفاده از جوابهای نتیجه شده برای محیطهای ایزوتروپ جانبی بدست آمده و با نتایج موجود برای محیطهای ایزوتروپ مقایسه گردیده است. به منظور نشان دادن تأثیر فرکانس تحریک و میزان نالیزوتروپی مصالح بر پاسخ، نتایج عددی مختلف برای مولفه‌های تغییر مکان ارائه گردیده است. تا آخر توابع تغییر مکان در ارتباط با فاصله در فرکانسهای کم

## مراجع

- 1 - Achenbach, J. D. (1973). *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands.
- 2 - Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative seismology theory and methods*. W. H. Freeman and Co., New York, N. Y.
- 3 - Apsel, R. J. and Luco, J. E. (1983). "On the Green's functions for a layered half space part II." *Bull. Seism. Soc. of Am.* Vol. 73, No. 4, PP.931-951.
- 4 - Buchwald, V. T. (1961). "Rayleigh waves in transversely isotropic media." *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, Vol. 14, No. 4, PP.293-317.
- 5 - Burden, Richard L., Faires, J. Douglas. (1993). *Numerical analysis*. PWS-KENT Publishing Company
- 6 - Eskandari-Ghadi, M. (2005), "A complete solutions of the wave equations in the transversely isotropic media." *J. of Elasticity*.
- 7 - Lamb, H. (1904). "On the propagation tremors over the surface the surface of an elastic solid." *Phil. Trans. , Royal Society of London*, Vol. A, No. 203, PP.1-42.
- 8 - Lekhnitskii, S. G. (1981). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Mir Publishers Moscow.
- 9 - Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice – Hall, Inc.
- 10 - Pak, R. Y. S. (1987). "Asymmetric wave propagation in an elastic half-space by a method of potentials." *J. Appl. Mech.*, Vol. 54, No. 1, PP.121-126.
- 11 - Pekeris, C. L. and Longman, I. (1955). "The motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried torque pulse," *Geophys. Journal*, Vol. 1, PP. 146-153.
- 12 - Rajapakse, R. K. N. D., and Wang, Y. (1991). "Elastodynamic Green's functions of an orthotropic half-space." *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 117, No. 3, PP.588-604.

- 13 - Rajapakse, R. K. N. D., and Wang, Y. (1993). "Green's functions for transversely isotropic elastic half-space." *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 119, No. 9, PP.1724-1746.
- 14 - Sneddon, I. N. (1951). *Fourier transforms*. McGraw-Hill, New York, N. Y.
- 15 - Stoneley, R. (1949). "The seismological implications of aelotropy in continental structures." *Royal Astronomical Soc. Monthly Notices, Geophysical Supplement*, London, England, Vol. 5, PP. 343-353.
- 16 - Synge, J. L. (1957). "Elastic waves in anisotropic media." *J. Math. and Physics*, Vol. 35, No.35, PP.323-334.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- |                               |                           |
|-------------------------------|---------------------------|
| 1 - Transversely Isotropic    | 2 - Coupled               |
| 3 - Potential Function        | 4 - Elastodynamic         |
| 5 - Complex Fourier Expansion | 6 - Hankel Transform      |
| 7 - Kernel                    | 8 - Branch Points         |
| 9 - Pole                      | 10 - Anisotropic          |
| 11 - Orthotropic              | 12 - Rayleigh Waves       |
| 13 - Integral Transforms      | 14 - Transformed Domain   |
| 15 - Physical Domain          | 16 - Stress Tensor        |
| 17 - Lamé Coefficients        | 18 - Inverse Transform    |
| 19 - Bessel Function          | 20 - Multiple Valued      |
| 21 - Single Valued            | 22 - Branch Cut           |
| 23 - Singular Point           | 24 - Radiation Conditions |
| 25 - Longitudinal Waves       | 26 - Shear Waves          |
| 27 - Integrand Functions      | 28 - Body wave            |
| 29 - Wave Numbers             |                           |