

بدست آوردن جواب و مقادیر خاص یک معادله دیفرانسیل غیر خطی، در تحلیل جریان گاز، در داخل یک روتورسانتریفوژ، به کمک نرم افزار Mathematica

علی عباسپور^۱ و محمد ره‌گشای^۲

۱- دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی برق

e-mail: ABBASPOUR@sharif.edu

۲- دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، دانشکده مکانیک، گروه هسته‌ای

e-mail: m_rahgoshay@hotmail.com

(دریافت: ۸۱/۱۱/۲۶؛ پذیرش: ۸۲/۲/۳۰)

چکیده

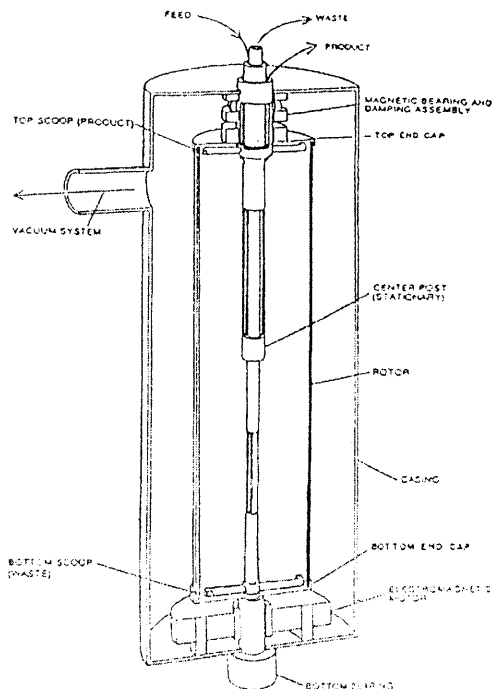
تاکنون در حل معادلات جریان گاز در داخل روتور سانتریفوژ، تحلیلها و مدل سازیهای بسیار زیادی انجام گرفته شده است، در هر حل، تقریب و خطاهایی وجود دارد. در این مقاله سعی شده است مدل onsager's (Gunzburger, *et al.*, 1989) از روش مقادیر ویژه و برای مقادیر حقیقی آن با استفاده از نرم افزار Mathematica تحلیل گردد.

واژه‌های کلیدی: جداسازی، مقادیر ویژه، اختلال، نرم‌افزار Mathematica

مقدمه

روشهای مختلفی تاکنون در جداسازی ایزوتوپهای یک گاز مورد استفاده قرار گرفته شده است، یکی از روشهای قدیمی جداسازی، روش دیفیوژن گازی می باشد ولی با پیشرفت تکنولوژی روشهای مدرن تری مورد استفاده قرار گرفته که می توان به روشهای: سانتریفوژ گازی، پروسه آیرودینامیکی استفاده از نازل لیزر و... اشاره کرد (Benedict, et al., 1981). برای دو ماشین جداسازی با ظرفیت جداسازی یکسان، مصرف قدرت روش سانتریفوژ حدوداً ۴٪ مصرف قدرت در روش دیفیوژن می باشد (AIChE, 1982).

در شکل ۱، سیستم جداسازی به روش سانتریفوژ گازی به تصویر کشیده شده است، همانطوری که از شکل نشان داده می شود بعلت دور بسیار بالای روتور، می توان ایزوتوپهای گازی که از لوله خوراک (Feed) وارد روتور می شود را بوسیله برداشت کننده های (Scoops)، محصول (Product) و دنباله (Waste) از همدیگر جدا نماییم.



شکل ۱- نمایی از یک روتور سانتریفوژ

در تحلیل معادلات جریان گاز در داخل روتور مدل سازه‌های مختلفی صورت گرفته است که می‌توان به مدلهای زیر اشاره کرد:

۱. (Olander, 1972) Steenbeck
۲. (Parker & Mayo, 1963) Parker and Mayo
۳. (Soubbaramayer, 1979) Soubbaramayer
۴. (Olander, 1972) Berman
۵. (Benedict, et al., 1981) Berman-Olander

در هر مدل تقریبهایی در نظر گرفته شده است، در تجزیه و تحلیل جریان گاز در داخل روتور سانتریفوژ پس از ترکیب معادلات پیوستگی، ممتنم، انرژی و حالت می‌توانیم معادله زیر را بدست آوریم (Gunzburger, et al., 1989):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ e^x \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^x \frac{\partial^2 F(x, z)}{\partial x^2} \right] \right\} + D^2 \left(\frac{\partial^2 F(x, z)}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1)$$

در این معادله x به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$x = N^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (2)$$

با توجه به روتور سانتریفوژ شکل ۲ پارامترهای ذیل تعریف می‌شوند:

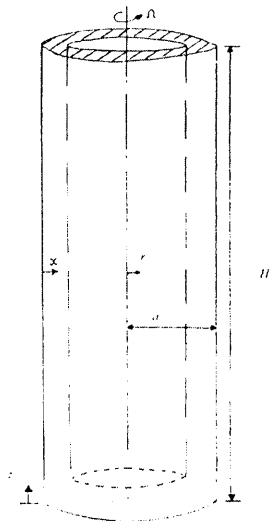
$$N^2 = \frac{M V_a^2}{2 \bar{R} \bar{T}_w}$$

M = جرم مولکولی گاز

V_a = سرعت خطی گاز در دیواره روتور سانتریفوژ

\bar{R} = ثابت جهانی گازها

\bar{T}_w = درجه حرارت متوسط گاز در دیواره روتور



شکل ۲ - نمایش محورهای مختصات در روتور سانتریفوژ

۱- روش حل:

در حل معادله ۱، D را ثابت فرض کرده، سپس با استفاده از روش جداسازی متغیرها برای $F(x,z)$ می‌توانیم بیان نمائیم که:

$$F(x, z) = f(x)f_1(z) \quad (۳)$$

با جایگذاری معادله ۳ در معادله ۱ داریم:

$$\left[e^x (e^x f_{xx})_{xx} \right]_{xx} + \lambda^2 f = 0 \quad (۴)$$

$$D^2 f_{1zz} - \lambda^2 f_1 = 0 \quad (۵)$$

ثابت جداسازی $\lambda^2 =$

در حل معادلات ۴ و ۵، λ سه حالت عددی را می‌تواند داشته باشد:

الف- $\lambda = 0$

ب- عدد مختلط $\lambda =$

ج- عدد حقیقی $\lambda =$

بحث این مقاله بر روی مقدار حقیقی $\lambda =$ می‌باشد، اگر تغییر پارامتر $\lambda = HD$ را انجام

دهیم می‌توانیم معادلات ۴ و ۵ را بصورت ذیل بنویسیم:

$$\left[e^x (e^x f_{xx})_{xx} \right]_{xx} + D^2 H^2 f = 0 \quad (۶)$$

$$f_{1zz} - H^2 f_1 = 0 \quad (۷)$$

پس از به دست آوردن تابع f_1 از معادله ۷ داریم: $f_1(z) = A_1 \text{Exp}(-Hz) + A_2 \text{Exp}(Hz)$ (در آن $z_0 = \frac{z}{H_0}$)

که در آن $z_0 = \frac{z}{H_0}$ می‌باشد، سپس از روش مقادیر ویژه برای معادله ۳ استفاده کرده

می‌توانیم بیان کنیم:

$$F(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n f_n(x) e^{-H_n z} + E_n f_n(x) e^{H_n(z-z_0)} \quad (۸)$$

در این مقاله هدف به دست آوردن مقادیر $f_n(x)$ در سری فوق با استفاده از نرم افزار

Mathematica و یا به عبارت دیگر حل معادله ۶ برای λ حقیقی می‌باشد. شرایط مرزی

استفاده شده در حل معادله ۶ شامل ۶ شرط مرزی است که بصورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$f'(0) = f''(0) \quad (الف-۹)$$

$$I_5 f(0) = \left[e^x (e^x f_{,xx}) \right]_x \Big|_{x=0} = 0 \quad (ب-۹)$$

$$f(\infty) = f'(\infty) = 0 \quad (الف-۱۰)$$

$$L_3 f(\infty) = \left[(e^x f_{,xx}) \right]_x \Big|_{x=\infty} = 0 \quad (ب-۱۰)$$

L_5, L_3 دو اپراتور ریاضی بوده که در معادلات (ب-۹) و (ب-۱۰) تعریف شده اند.

اگر تغییر پارامتر $\varepsilon^6 = \frac{1}{H^2 D^2}$ را در معادله ۶ انجام دهیم پس از ساده سازی می توانیم بیان کنیم که:

$$e^{-2x} f + 6\varepsilon^6 f^{(2)} + 12\varepsilon^6 f^{(3)} + 13\varepsilon^6 f^{(4)} + 6\varepsilon^6 f^{(5)} + \varepsilon^6 f^{(6)} = 0 \quad (۱۱)$$

در حل معادله ۶ توابع مختلفی برای $f(x)$ در نظر گرفته شده، مثلاً تابع ذیل که در آن $f(x)$ بر حسب پارامتر اختلال (ε) بسط داده شده و به صورت شکل زیر نشان داده می شود:

$$f(x) = g_0(x) + g_1(x) + \varepsilon g_2(x) + \varepsilon^2 g_3(x) + \dots$$

شرایط مرزی گفته شده را ارضاء نمی کند، در نهایت پس از در نظر گرفتن توابع بسیاری بدین نتیجه رسیدیم که اگر تابع $f(x)$ را به صورت ذیل در نظر بگیریم:

$$f(x) = e^{\frac{g_0(x)}{\varepsilon} + g_1(x) + \varepsilon g_2(x) + \varepsilon^2 g_3(x) + \dots} \quad (۱۲)$$

شرایط مرزی را ارضاء می کند.

با گرفتن مشتقات مرتبه های اول تا ششم از معادله ۱۲ و پس از جایگزین کردن آن در معادله ۱۱ و مرتب کردن جملات دارای مرتبه های ε^0 و ε^1 و ... می توانیم بیان کنیم:

$$\text{جملات دارای مرتبه } \varepsilon^0 \quad \left[e^{\frac{g_0}{\varepsilon} + g_1 + \varepsilon g_2 + \dots} \right] \left[e^{-2x} + \varepsilon^6 \left(\frac{g_0'}{\varepsilon} \right)^6 \right] = 0 \quad (۱۳)$$

$$\text{جملات دارای مرتبه } \varepsilon^0 \quad \left[e^{\frac{g_0}{\varepsilon} + g_1 + \varepsilon g_2 + \dots} \right] \left[6g_0'^5 + 6g_1'g_0'^5 + 15g_0'^4 g_0'' \right] = 0 \quad (۱۴)$$

چون جمله اول در معادله (۱۳) مخالف صفر می باشد پس داریم:

$$e^{-2x} + g_0'^6 = 0 \quad (۱۵)$$

از معادله ۱۵ می توانیم نتیجه گیری نمائیم که:

$$g_0 = (-1)^{\frac{1}{6}} (-3)^{\frac{-1}{3}} \quad (۱۶)$$

ریشه‌های $(-1)^{\frac{1}{6}}$ در معادله ۱۶ عبارتند از:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) \\ y_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) \\ y_3 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i) \\ y_4 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3}-i) \\ y_5 &= +i \\ y_6 &= -i \end{aligned} \quad (17)$$

با جایگذاری ریشه‌های $(-1)^{\frac{1}{6}}$ از معادلات ۱۷ در معادله ۱۶ و پس از ساده‌سازی آن، عبارت

$e^{\frac{g_0}{\varepsilon}}$ را با توجه به این موضوع که ریشه‌های $(-1)^{\frac{1}{6}}$ دو به دو مزدوج همدیگرند، می‌توانیم بصورت عبارت ذیل بیان کنیم:

$$\begin{aligned} e^{\frac{g_0}{\varepsilon}} &= B_0 e^{\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{x}{3}\varepsilon^{-1}}\right)} \cos\left(\frac{3}{2} e^{-\frac{x}{3}\varepsilon^{-1}} + k\right) + \\ &A_0 \cos\left(3e^{-\frac{x}{3}\varepsilon^{-1}} + m\right) + \\ &C_0 e^{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{x}{3}\varepsilon^{-1}}\right)} \cos\left(\frac{3}{2} e^{-\frac{x}{3}\varepsilon^{-1}} + P\right) \end{aligned} \quad (18)$$

همچنین از معادله ۱۴ داریم:

$$6g_0'^5 + 6g_1'g_0'^5 + 15g_0'^4 g_0'' = 0 \quad (19)$$

با جایگذاری g_0' از مشتق معادله ۱۶ در معادله ۱۹ می‌توانیم بنویسیم:

$$g_1 = -\frac{x}{6} \quad (20)$$

سپس با جایگزین نمودن معادلات ۱۸ و ۲۰ در معادله ۱۲ (علت آنکه از بقیه جملات صرفنظر می‌کنیم پس از به دست آوردن ε^{-1} مشخص خواهد شد، چرا که جملات دارای ε^2 به بالا، بسیار کوچک شده و می‌توانیم فرض کنیم که فقط دو جمله اول حائز اهمیت هستند). می‌توانیم معادله ذیل را بیان کنیم:

$$f(x) \approx e^{\frac{g_0(x)}{\varepsilon} + g_1(x)} = e^{\frac{-x}{6}} \left\{ (A_0 \cos(3\varepsilon^{-1} e^{\frac{-x}{3}} + m) + B_0 e^{(-\frac{1}{2} 3^{\frac{3}{2}} e^{\frac{x}{3}} \varepsilon^{-1})} \cos(\frac{3}{2} e^{\frac{-x}{3}} \varepsilon^{-1} + k) + C_0 e^{(\frac{1}{2} 3^{\frac{3}{2}} e^{\frac{x}{3}} \varepsilon^{-1})} \cos(\frac{3}{2} e^{\frac{-x}{3}} \varepsilon^{-1} + P) \right. \quad (21)$$

۲- بکارگیری شرایط مرزی و استفاده از نرم افزار Mathematica در حل معادله:

در به دست آوردن مقادیر $A_0, m, \varepsilon^{-1}, B_0, K, C_0, P$ باید از شرایط مرزی استفاده شود، فرض می‌شود که $A_0 = 1$ بوده، سپس با استفاده از شرایط مرزی معادلات ۹ و ۱۰، می‌توانیم بقیه مقادیر را به دست آوریم، بر طبق معادله ۲ می‌دانیم:

$$x_{r=0} = N^2 = \infty \quad (22)$$

مقصود از بی نهایت، ماگزیم مقدار x می‌باشد چون گاز مورد نظر در این مقاله گاز UF_6 بوده، پارامترهای مورد احتیاج را به صورت ذیل در نظر گرفته ایم:

$$M = 0.352 \text{ (kg/mole)}$$

$$V_a = 400 \text{ (m/s)}$$

$$\bar{R} = 8.314 \text{ (j/mole } ^\circ\text{K)}$$

$$\bar{T}_w = 300^\circ\text{K}$$

$$P_w = 100 \text{ (torr)} = \text{فشار گاز در دیواره روتور}$$

مقدار N^2 تحت شرایط ذکر شده برابر با 11.2902 می‌شود:

معادله ۲۱ را توسط شرایط مرزی منطبق بر معادلات ۹ و ۱۰ به کمک نرم‌افزار Mathematica حل نموده‌ایم، منطق برنامه بر این پایه استوار است که اگر شرایط مرزی را به صورت توابع ذیل تعریف کنیم:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= f^{(1)}(0) \\
 g_2 &= f^{(2)}(0) \\
 g_3 &= f^{(3)}(0) \\
 g_4 &= f^{(4)}(0) \\
 g_5 &= f^{(5)}(0) \\
 g_6 &= L_5 f(0) \\
 g_7 &= f(\infty) \\
 g_8 &= f^{(1)}(\infty) \\
 g_9 &= L_3 f(\infty)
 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

با کمک دستور تکرار، حوزه تکراری را برای مقادیر $\varepsilon^{-1} K, B_0, P, C_0, m$ ، تعریف کرده و به دنبال ریشه‌های معادله ۲۱ در حوزه تکرار تعریف شده هستیم (لازم به تذکر است که نرم افزار Mathematica با استفاده از روش نیوتن-رافسون معادله را حل می‌کند) که علاوه بر آن که در شرایط مرزی صدق می‌کند و به صورت معادله ذیل بیان می‌شود، دقت جوابها را هم در نظر بگیرد، در معادله ذیل، مجموع قدر مطلق های توابعی که شرایط مرزی توسط آنها تعریف می‌شود، را کوچکتر از مقدار S در نظر گرفته‌ایم:

$$|g_1| + |g_2| + |g_6| + |g_7| + |g_8| + |g_9| < S \tag{۲۴}$$

در معادله فوق، S ، دقت جوابها را نشان می‌دهد. S را می‌توانیم با هر دقت دلخواه به برنامه بدهیم، در این مقاله S ، با دقت 10^{-8} در نظر گرفته شده‌است، همچنین حوزه تکرار برای معادله ۲۱ را به صورت ذیل بکار برده‌ایم (اینکه چرا حوزه تکرار ذیل را منظور کرده‌ایم در ادامه بحث خواهد شد)

$$\begin{aligned}
 m &= -2\pi, 2\pi, \frac{\pi}{4} \\
 C_0 &= -1, 1, 0.5 \\
 P &= -2\pi, 2\pi, \frac{\pi}{4} \\
 \varepsilon^{-1} &= 1, 20, 1 \\
 B_0 &= -1, 1, 0.5 \\
 K &= -2\pi, 2\pi, \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}
 \tag{۲۵}$$

(با توجه به تغییرات پارامتر $\varepsilon^6 = \frac{1}{H^2 D^2}$ می‌دانیم مقدار ε^{-1} مثبت خواهد شد)

در معادله ۲۵ در هر مقدار، عدد اول می‌نیمم، عدد دوم ماگزیمم و عدد سوم فواصل انتخابی را برای حوزه تکرار نشان می‌دهند.

برطبق معادله ۸ اگر مقادیر H_n را به دست آورده می‌توانیم جملات درتوان نمایی این معادله را مشخص کنیم بدین صورت که با مشخص شدن ε_n^{-1} از برنامه و ثابت بودن مقدار D می‌توانیم H_n را از معادله $\varepsilon_n^6 = \frac{1}{H_n^2 D^2}$ بدست آوریم.

لازم به توضیح است که می‌توانیم مقادیر ε_n^{-1} را از مقادیر پایین تا مقادیر بالا، از برنامه بدست آوریم که درواقع بدست آوردن ε^{-1} در $n=1, n=2, \dots$ و در نهایت H_1, H_2, \dots خواهد بود.

۳- نتایج حاصل شده از حل معادله:

نکات قابل توجهی در این برنامه به چشم می‌خورد که شامل مطالب ذیل می‌باشد:
 الف- در یک ε^{-1} ثابت، مقادیر مختلفی از m, C_0, P, B_0, K را دارا هستیم مثلاً در $(\varepsilon^{-1} = 1.13638)$ داریم: (اعداد در ذیل فقط به صورت نمونه داده شده‌اند و جوابهای بسیار زیادی را بدین صورت داریم):

$$\begin{aligned}
 m &= -6.26762 \\
 C_0 &= 0.0685772 \\
 P &= -6.71249 \\
 \varepsilon^{-1} &= 1.13638 \\
 B_0 &= -2.23751 \\
 K &= -7.35953
 \end{aligned}
 \tag{۲۶}$$

$$\begin{aligned}
 m &= -6.26762 \\
 C_0 &= 0.0685772 \\
 P &= -6.71249 \\
 \varepsilon^{-1} &= 1.13638 \\
 B_0 &= -2.23751 \\
 K &= -1.07634
 \end{aligned}
 \tag{۲۷}$$

در معادله ۲۷ مقدار K نسبت به معادله ۲۶ فرق کرده‌است.

$$\begin{aligned}
 m &= -6.26762 \\
 C_0 &= 0.0685772 \\
 P &= -6.71249 \\
 \varepsilon^{-1} &= 1.13638 \\
 B_0 &= 2.23751 \\
 K &= 2.06525
 \end{aligned}
 \tag{۲۸}$$

در معادله ۲۸ مقدار K و B_0 نسبت به معادله ۲۶ فرق کرده است.

$$\begin{aligned}
 m &= -6.26762 \\
 C_0 &= 0.0685772 \\
 P &= -12.9957 \\
 \varepsilon^{-1} &= 1.13638 \\
 B_0 &= 2.23751 \\
 K &= -4.21793
 \end{aligned}
 \tag{۲۹}$$

در معادله ۲۹ مقدار K و B_0 و P نسبت به معادله ۲۶ فرق کرده است.

اگر گرافهای $f(x)$ را برای معادلات ۲۶ و ۲۷ و ۲۸ و ۲۹ که به ترتیب با $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و $f_3(x)$ و $f_4(x)$ نشان داده شده و در گرافهای ۱ تا ۴ آمده است را رسم نمائیم بی خواهیم برد که با وجود اختلاف در مقادیر، گرافها کاملاً مشابه همدیگر خواهند بود.

همچنین در $(\varepsilon^{-1} = 2.36787)$ $n=2$ داریم:

$$\begin{aligned}
 m &= -6.26762 \\
 C_0 &= 0.00229652 \\
 P &= -5.22174 \\
 \varepsilon^{-1} &= 2.36887 \\
 B_0 &= -2.5632 \\
 K &= 80.4909
 \end{aligned}
 \tag{۳۰}$$

$$\begin{aligned}
 m &= -6.26762 \\
 C_0 &= 0.00229652 \\
 P &= -5.22174 \\
 \varepsilon^{-1} &= 2.36887 \\
 B_0 &= 2.5632 \\
 K &= -4.33213
 \end{aligned}
 \tag{۳۱}$$

در معادله ۳۱ مقادیر K, B_0 نسبت به معادله ۳۰ تغییر یافته است.

$$\begin{aligned}
 m &= -6.26762 \\
 C_0 &= -0.00229652 \\
 P &= -2.08015 \\
 \varepsilon^{-1} &= 2.36887 \quad (32) \\
 B_0 &= 2.5632 \\
 K &= -23.1817
 \end{aligned}$$

در معادله ۳۲ مقادیر K, B_0, P نسبت به معادله ۳۰ تغییر یافته است.

$$\begin{aligned}
 m &= -6.26762 \\
 C_0 &= -0.00229652 \\
 P &= -2.08015 \\
 \varepsilon^{-1} &= 2.36887 \quad (33) \\
 B_0 &= 2.5632 \\
 K &= -16.8985
 \end{aligned}$$

در معادله ۳۳ مقادیر K, B_0, P, C_0 نسبت به معادله ۳۰ تغییر یافته است.

اگر گرافهای $f(x)$ را برای معادلات ۳۰ و ۳۱ و ۳۲ و ۳۳ که به ترتیب با $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و $f_3(x)$ و $f_4(x)$ بیان شده و در گرافهای ۵ تا ۸ آمده است را رسم نمائیم پی خواهیم برد که با وجود اختلاف در مقادیر (همانند $n=1$)، مجدداً گرافها مشابه همدیگر خواهند بود. پس در یک ε^{-1} ثابت با وجود اختلاف در مقادیر m, C_0, P, B_0, K اما همیشه دو مقدار ذیل ثابت هستند:

$$\begin{aligned}
 & \text{Sin} \\
 & \text{or} \quad (p + \frac{3}{2} \varepsilon^{-1}) = (\pm) \text{ ثابت} \quad (34)
 \end{aligned}$$

Cos

$$\begin{aligned}
 & \text{Sin} \\
 & \text{or} \quad (m + 3 \varepsilon^{-1}) = (\pm) \text{ ثابت} \quad (35)
 \end{aligned}$$

Cos

ثابتهای در معادلات ۳۴ و ۳۵ فرق می کنند.

ب - با نگرستن درگرافهای بدست آمده برای $(\varepsilon^{-1} = 1.13638)$ که درگرافهای ۹ تا ۱۳ آمده، پی به درستی تابع $f(x)$ بدست آمده از روش تحلیلی، به کمک شرایط مرزی (معادلات ۹ و ۱۰) با گرافهای گفته شده می بریم.

ج - در ادامه علاوه بر مشخص شدن ε^{-1} در n های مختلف، تابع $f(x)$ از $n=1$ تا $n=8$ رسم شده که در گرافهای ۱۴ تا ۲۱ آمده است.

د - دلیل حوزه انتخاب شده در معادله ۲۵ آن است که اگر حوزه انتخاب شده را وسیعتر کنیم، به عنوان مثال اگر حوزه انتخابی ذیل را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned}
 m &= -10\pi, 10\pi, \frac{\pi}{4} \\
 C_0 &= -10, 10, 0.5 \\
 P &= -10\pi, 10\pi, \frac{\pi}{4} \\
 \varepsilon^{-1} &= 1, 20, 1 \\
 B_0 &= -10, 10, 0.5 \\
 K &= -10\pi, 10\pi, \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}
 \tag{۳۶}$$

اگر پس از به دست آوردن جوابهای m و C_0 و p و ε^{-1} و B_0 و K از برنامه، گرافهای $f(x)$ را به ازای مقادیر $(\varepsilon^{-1} = 1.13638)$ $n=1$ و $(\varepsilon^{-1} = 2.36887)$ $n=2$ ترسیم نمائیم، پی خواهیم برد که گرافها به ازای یک n ثابت، کاملاً مشابه هم خواهند بود:

- ه - ۱) گراف ۲۲ در حالت $n=1$ در بازه مطابق با معادله ۲۵ رسم گردیده است.
 - ه - ۲) گراف ۲۳ در حالت $n=2$ در بازه مطابق با معادله ۲۵ رسم گردیده است.
 - ه - ۳) گراف ۲۴ در حالت $n=3$ در بازه مطابق با معادله ۲۵ رسم گردیده است.
 - ه - ۴) گراف ۲۵ در حالت $n=1$ در بازه مطابق با معادله ۳۶ رسم گردیده است.
 - ه - ۵) گراف ۲۶ در حالت $n=2$ در بازه مطابق با معادله ۳۶ رسم گردیده است.
 - ه - ۶) گراف ۲۷ در حالت $n=3$ در بازه مطابق با معادله ۳۶ رسم گردیده است.
- بنابراین در بازه های مطابق با معادلات ۲۵ و ۳۶ گرافهای $f(x)$ در $n=1$ و $n=2$ و $n=3$ و ... مشابه خواهند بود، پس افزایش پهنای بازه تأثیری در جوابها و گرافهای $f(x)$ ندارد.

۴- نتیجه گیری

به دلیل اهمیت معادله $D^2 H^2 f = 0$ در تجزیه و تحلیل جریان گاز در داخل روتور سانتریفوژ، بررسی این معادله حائز اهمیت است. معادله فوق از ترکیب معادلات پیوستگی، ممنتم، انرژی و حالت حاصل شده است. در این مقاله ابتدا از روش اختلال معادله فوق حل گشته و معادله ۲۱ حاصل گشته، سپس توسط نرم افزار Mathematica مقادیر ثابت این معادله به کمک شرایط مرزی به دست آمد. نتایج قابل توجهی در این تجزیه و تحلیل معادله فوق حاصل گردید که عبارتند از:

۱- تابع $f(x)$ در هر مقدار x ، در یک ε^{-1} ثابت، با وجود اختلاف در مقادیر B_0, p, C_0, m و K ثابت است پس در یک ε^{-1} ثابت داریم:

Sin

$$\text{or } (p + \frac{3}{2}\varepsilon^{-1}) = (\pm) \text{ ثابت} \quad \text{الف)}$$

Cos

Sin

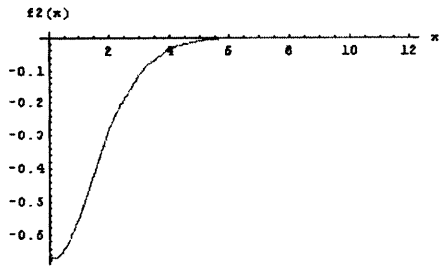
$$\text{or } (m + 3\varepsilon^{-1}) = (\pm) \text{ ثابت} \quad \text{ب)}$$

Cos

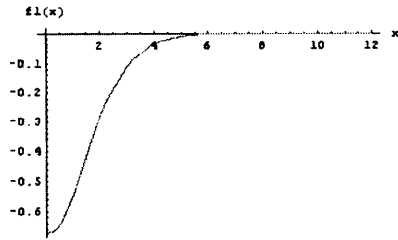
۲- اگر حوزه تکرار مقادیر m, C_0, P, B_0, K در معادله ۲۱ را وسیعتر کنیم هیچ اختلافی در مقادیر حاصل شده، با حوزه تکرار کوچک ندارد، جز آن که زمان پاسخگویی را بسته به انتخاب حوزه بیشتر می کند.

گراف‌های بیان شده در متن مقاله:

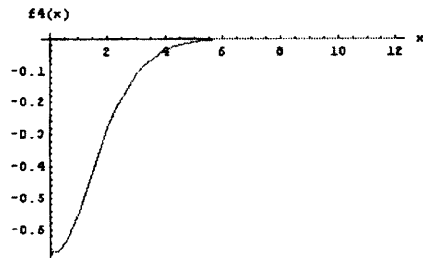
graphic(2)



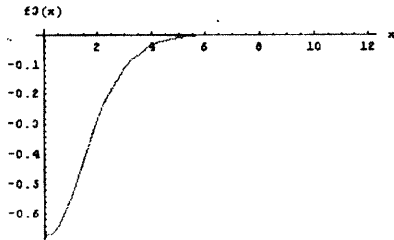
graphic(1)



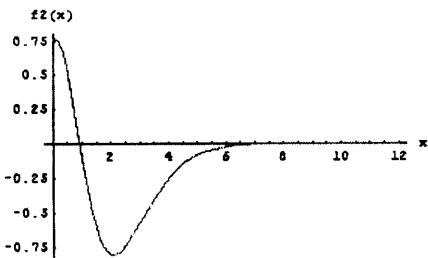
graphic(4)



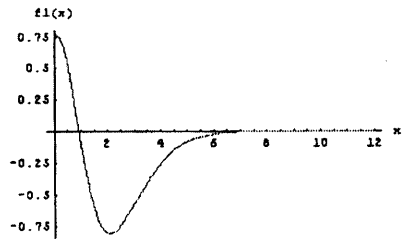
graphic(3)



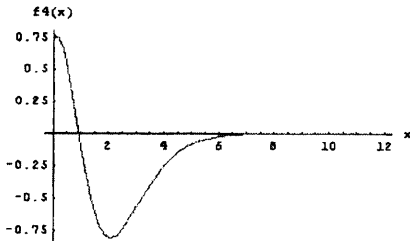
graphic(6)



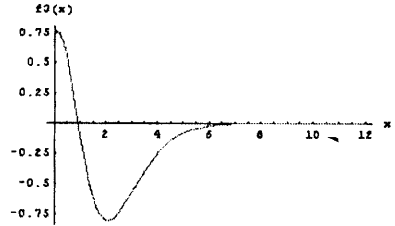
graphic(5)



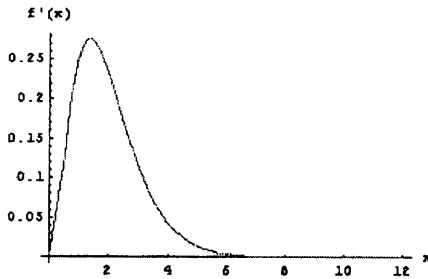
graphic(8)



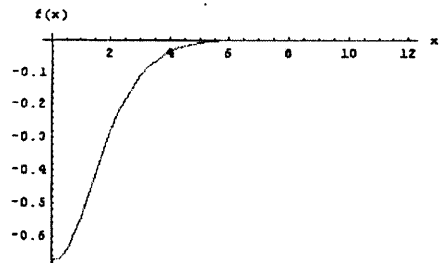
graphic(7)



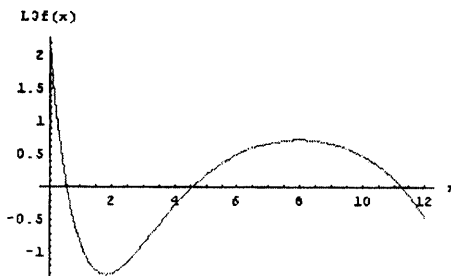
graphic(10)



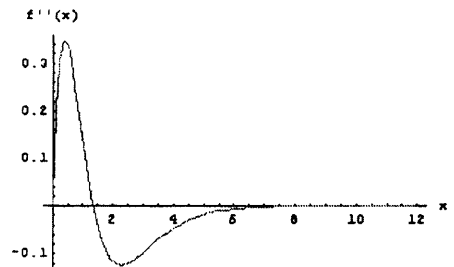
graphic(9)



graphic(12)

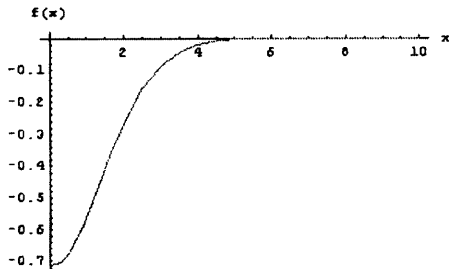


graphic(11)

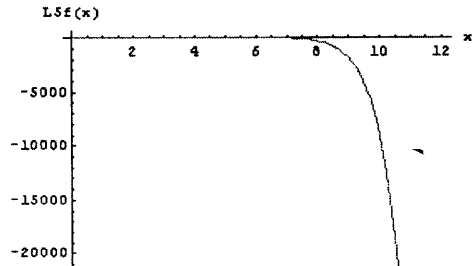


graphic (14)

"n=1, eigen value=-1.21252"

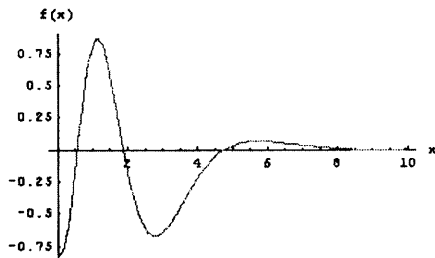


graphic(13)



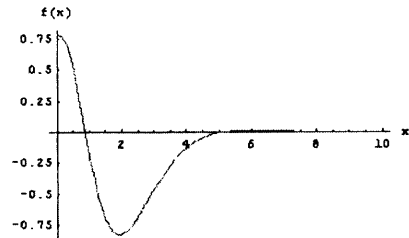
graphic (16)

"n=3, eigen value=4.13.75731"



graphic (15)

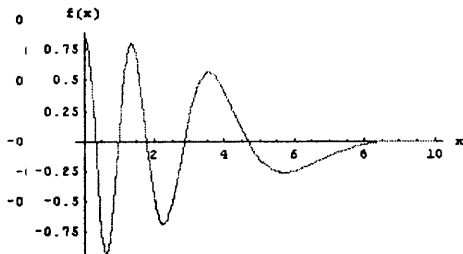
"n=2, eigen value=2.5232"



graphic (17)

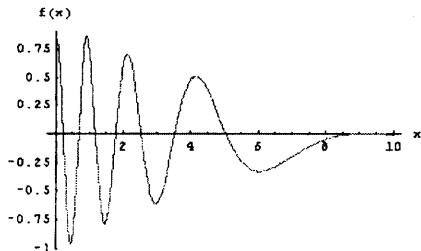
"n graphic (18)

"n=5, eigen value=6.26324"



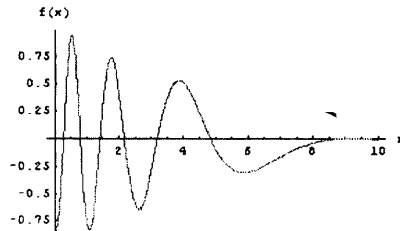
graphic (20)

"n=7, eigen value=8.60663"

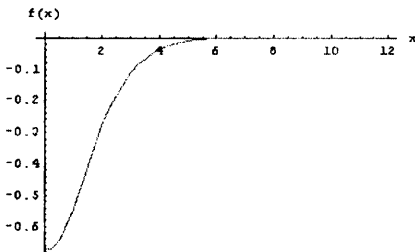


graphic (19)

"n=6, eigen value=7.4516"

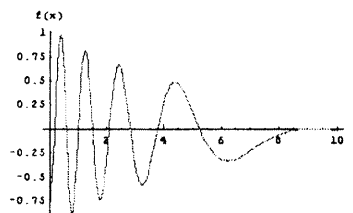


graphic(22)

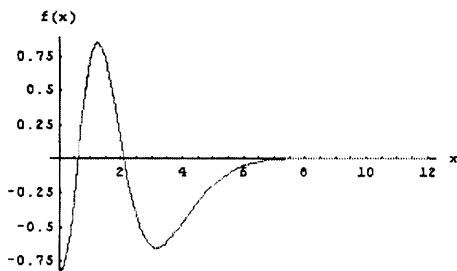


graphic (21)

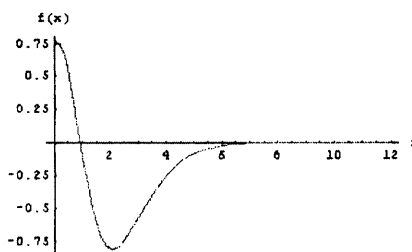
"n=8, eigen value=9.74283"



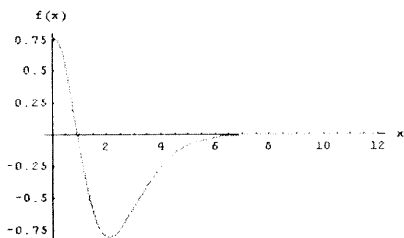
graphic(24)



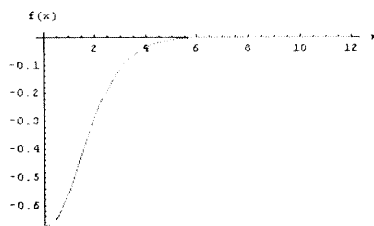
graphic(23)



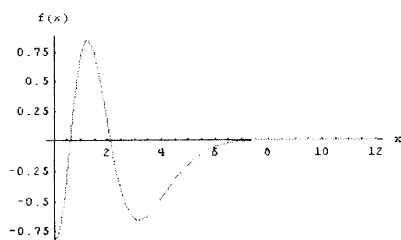
graphic(26)



graphic(25)



graphic(27)



Reference

- Gunzburger, D., Wood, G., and Wayland, L. (1989) *Gas Centrifuge*. Fluid Mechanics, **56**, 107-110.
- Benedict, M., Pigford, T.H., and Levi, H.W. (1981) *Nuclear Chemical Engineering*, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York.
- Recent Development In Uranium Enrich, (1982), AICHE.
- Olander, D. (1972) *Technical Basis of gas centrifuge*. Adv.Nucl.sci.Tech. **6**, p.105.
- Parker, H.M., and Mayo, T.T. (1963) US.AEC Rep.UVA-279-63U.
- Soubbaramayer (1979) *Centrifugation, Uranium Enrichment*, Springer-verlag, Berlin.
- Gwnzbwrger, M.Wood, H., and Jordan, J. (1984) *A finite element Method for Gas Centrifuge Problems*. SIAM J. Sci. stat. comp., **5**, 78-94.
- Soubbaramayer and Billett, J. (1980) *A Numerical method for optimizing The gas flow in a centrifuge*. Comput.Methods Appl.Mech.Engin. **24**, p.165.