استفاده از POD در استخراج ساختارهاي متجانس يك ميدان آشفته آماري- همگن

فريدون ثابت‌قدم[۱]، وحيد اصفهانيان[۲] و محمد افتخاري يزدي[*۳]

[۱]استاديار دانشگاه آزاد اسلامي واحد علوم و تحقيقات

[۲]دانشيار دانشكده مهندسي مكانيك - پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

[۳]دانشجوي دكتري دانشگاه آزاد اسلامي واحد علوم و تحقيقات

(تاريخ دريافت ۸۳/۱۱/۳ ، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۵/۴/۱۰ ، تاريخ تصويب ۸۵/۷/۸)

چكيده

در اين مقاله عمل‌كرد روش تجزيه متعامد بهينه(POD)، در استخراج ساختارهاي متجانس يک ميدان آشوبناك مكاني-زماني داراي ساختارهاي متجانس غالب مورد بررسي قرار گرفته است. ميدان حاصل از حل عددي مستقيم (DNS) معادله (KS) در آنسامبلي از چهل نمايه[۱]، به عنوان ميدان مدل انتخاب شده است. بر خلاف روش‌هاي مرسوم، از فرض ergodicity استفاده نشده و اعضاي آنسامبل مستقيماً از مغشوش كردن شرايط اوليه با درصدهاي متفاوت حاصل شده‌اند. مودهاي ويژه و توابع ويژه ميدان حاصل با استفاده از روش POD/SVD استخراج شده و مودهاي حاصل از POD، متوسط‌گيري آنسامبلي شده و با متوسط‌هاي آنسامبلي مودهاي فوريه و ميدان لحظه اي متوسط-گيري نشده مقايسه شده‌اند. نتايج مؤكداً نشان‌دهنده وجود جملات غيرمتجانس در مودهاي POD است كه مبين عدم توانايي POD در تفكيك قسمت‌هاي تصادفي از قسمت‌هاي تعيني ميدان است. از طرف ديگر، مودهاي POD حاصله از متوسط‌گيري آنسامبلي، هم در دنبال كردن رفتار متوسط ميدان و هم در استخراج شيب‌هاي متوسط، نسبت به مودهاي فوريه متوسط‌گيري شده بسيار بهتر عمل مي‌كنند. به اين ترتيب مي‌توان براي استخراج ساختارهاي متجانس، حداقل در برخي ميدان‌هاي داراي ساختارهاي متجانس غالب، استفاده از متوسط‌گيري آنسامبلي بر روي مودهاي POD را پيشنهاد كرد.

واژه‌هاي كليدي: متوسط‌گيري آنسامبلي - تجزيه متعامد بهينه - ساختارهاي متجانس - آشوب مكاني-زماني - تجزيه مقادير تكين - بسط گالركين

مقدمه

امروزه تحليل جريان‌هاي آشفته داراي ساختارهاي متجانس، بخش مهمي از تحقيقات جريان‌هاي آشفته را تشكيل مي‌دهند. اين امر به علت اهميت اثرات فيزيكي اين ساختارها بر روي كل ميدان جريان و حضور بخش عمده‌اي از انرژي جريان سيال در اين ساختارها است. در اين مورد، مطالعات مربوطه از اوايل نيمه دوم قرن گذشته شروع شده است. مطالعات Hussain and Reynolds روي جريان شبه‌تناوبي كانال، به ارائه پيشنهاد روش تجزيه جديدي منجر شد كه به تجزيه سه‌گانه معروف است [۱]. در اين روش تجزيه، ساختارهاي متجانس به وسيله متوسط‌گيري فازي[۲] و يا متوسط‌گيري آنسامبلي[۳] به دست مي‌آيد. به عبارت ديگر، ميدان لحظه‌اي آشفته به يك بخش متوسط و يك بخش نوساني تقسيم مي‌شود كه بخش نوساني نيز خود شامل دو بخش متجانس[۴] و غير-متجانس[۵] است. پيشنهاد آنها براي قسمت متجانس، متوسط‌گيري آنسامبلي بود. اين متوسط آنسامبلي را مي‌توان به صورت متوسط وقايع مشابه در ميدان جريان و يا متوسط فازي بيان نمود. Hussain نشان داد كه در اين ديدگاه، دو بخش متجانس و غيرمتجانس، غيرهمبسته[۶] هستند[۲]. همچنين Hussain and Reynolds نشان دادند كه از ديدگاه متوسط‌گيري آنسامبلي، بخش متجانس داراي خاصيت تعيني[۷] و بخش غيرمتجانس داراي خاصيت غيرتعيني[۸] است.

پس از آن، در سال ۱۹۹۴ توسط Ha Minh اين روش تفكيك براي شبيه‌سازي حركت‌هاي منظم در جريان آشفته به صورت رضايت‌بخشي به كار رفته و براي چنين روش‌هايي نام SDM[۹] مطرح شد[۳]. در اين روش‌ها با استفاده از معادلاتي، كه با توجه به غيرهمبسته بودن قسمت‌هاي متجانس و غيرمتجانس اساساً مانند معادلات RANS هستند، ساختارهاي متجانس محاسبه شده و

* نويسنده مسئول : تلفن : ۰۹۱۲۱۳۳۱۶۵۶ , فاكس : _____ , Email: eftekhariyazdi@yahoo.com

بخش تصادفي جريان مدل مي‌شود. روش‌هاي SDM مشابه روش شبيه‌سازي گردابه‌هاي بزرگ (LES)[۱۰]، ميدان را به دو بخش مختلف تجزيه كرده و بخش غير-متجانس را فيلتر كرده و آن را در معادلات حاكم مدل مي‌كنند. از طرف ديگر كارهاي تجربي و تحليلي بسياري نشان داده‌اند كه حداقل در جريان‌هاي آشفته سه بعدي، با استفاده از هر يک از ساختارهاي متجانس تمام طيف موجود پوشش داده مي‌شود. در نتيجه فيلتر مورد نياز در روش‌هاي SDM بايد از نوع ساختاري باشد[۲]. به عبارت ديگر، چنين فيلتري بايد ساختارهاي متجانس را از خود عبور داده و بخش تصادفي ميدان را حذف كند. اين نوع فيلتركردن در كارهاي تجربي فقط توسط نمونه‌گيري شرطي[۱۱] و در كارهاي تحليلي و عددي توسط متوسط-گيري آنسامبلي انجام مي‌شود.

يكي از روش‌هاي مرسوم تحليل و مدل‌سازي ساختارهاي متجانس، استفاده از بسط گالركين آنها بر حسب توابع پايه حاصل از تجزيه متعامد بهينه[۱۲](POD) است. در اين روش، هدف يافتن ساختارهايي است كه بيشترين انرژي موجود در ميدان را به خود اختصاص داده‌اند. در حقيقت، مودهاي POD به صورت توابع ويژه تانسور خودهمبستگي[۱۳] ميدان تعريف مي‌شوند. برخي محققين معتقدند كه با اين تعريف، مودهايPOD نمادي از ساختارهاي متجانس جريان سيال خواهند بود[۵ و۴]. در طي بيش از چهار دهه گذشته، بررسي‌هاي زيادي در زمينه تحليلي، تجربي و عددي بر روي نتايج حاصل از تحليل و مدل‌سازي‌هاي POD انجام شده و در مورد ارتباط بين مودهاي POD و ساختارهاي متجانس تفسيرهاي گوناگوني ارائه شده است. در اين مقاله، هدف بررسي ارتباط بين مودهاي POD و ساختارهاي متجانس از ديدگاه متوسط‌گيري آنسامبلي است. در حقيقت در اينجا و مطابق آنچه كه تقريباً در همه محاسبات واقعي جريان آشفته فرض مي‌شود، ساختارهاي متجانس بخشي از ميدان در نظر گرفته شده كه از فيلتر متوسط‌گيري آنسامبلي عبور مي‌كنند.

براي به دست آوردن توابع پايه POD، تانسورهاي همبستگي دونقطه‌اي مورد نياز است كه معمولاً يا از كارهاي تجربي و يا داده‌هاي حاصل از حل‌هاي عددي مستقيم (DNS)[۱۴] حاصل مي‌شوند. براي داشتن تانسورهاي همبستگي نيز حجم زيادي از داده‌ها مورد نياز خواهند بود. پس از آن، در نهايت بايد يك مسأله مقدار ويژه با بعد بسيار زياد حل شود. به همين دليل تا مدت‌ها امكانات سخت‌افزاري و تكنيك‌هاي محاسباتي آن چنان قدرت نداشتند كه بتوانند ايده POD را جامه عمل بپوشانند. اين مشكلات با ارائه روش نمايه‌ها[۱۵] توسط Sirovich تا حدود زيادي مرتفع گرديد[۶]. با استفاده از اين روش، زمان حل مسأله مقدار ويژه مورد نياز POD به نحو چشم‌گيري كاهش مي‌يابد. در اين روش، براي تحليل POD ميداني كه داراي تعداد N نقطه بوده و داده‌هاي آن در يك آنسامبل با M عضو جمع شده‌اند و $N \gg M$، به جاي حل يك مسأله مقدار ويژه $N \times N$ از حل مسأله مقدار ويژه $M \times M$ استفاده خواهد شد.

از طرف ديگر انجام عمليات POD به صورت سنتي منجر به يك مسأله مقدار ويژه شده و با يافتن مقادير ويژه و بردارهاي ويژه، مودهاي POD و انرژي جنبشي متوسط هر مود به دست مي‌آيند. در سال‌هاي اخير با توجه به ارتباط تنگاتنگ بين روش تجزيه مقادير تكين[۱۶](SVD) با مسائل مقدار ويژه، فرمولاسيون استخراج مودهاي POD با استفاده از اين روش ابداع شده و به صورت روزافزون مورد استفاده قرار گرفته است[۷]. اين روش در عمل بسيار كارآمدتر از روش سنتي يافتن مستقيم مقادير ويژه بوده است. به اين ترتيب اعمال روش نمايه‌ها به POD/SVD نيز كارآيي روش را دوچندان كرده است[۸]. در اين مقاله نيز عمليات snapshots POD از طريق SVD انجام خواهد شد.

در تحقيق حاضر، توانايي روش POD در استخراج ساختارهاي متجانس بررسي شده است. به اين منظور ابتدا با استفاده از روش گالركين معادله(KS)[۱۷] حل عددي مستقيم (DNS) شده و داده‌هاي لازم براي انجام يک تحليل POD حاصل شده است. سپس مودهاي POD ميدان از روش snapshot POD/SVD محاسبه و متوسط مودال ميدان با استفاده از مودهاي فوريه و مودهاي POD با هم‌ديگر و با ميدان لحظه‌اي متوسط‌گيري نشده، مقايسه شده‌اند. نتايج نشان‌دهنده وجود درصد نسبتاً زيادي از حركت‌هاي تصادفي در مودهاي POD است كه بيانگر عدم توانايي POD در تفكيك بخش‌هاي تصادفي و غيرتصادفي است. از ديدگاه نويسندگان، اين مشكل ناشي از وجود توان دوم مود بيشينه‌شونده در روند بهينه‌سازي POD است كه امكان حذف مودهاي تصادفي را از بين مي‌برد.

هـم‌چنـين حـذف مودهـاي تصـادفي در حـين فرآينـد متوسط‌گيري آنسامبلي به ويژه در مودهـاي فوريـه، باعـث ايجاد گراديان‌هاي نسبتاً بزرگي در ميدان مي‌شود كه تأثير خـود را در شـيب‌هـاي موجـود در ميـدان متوسـط بـروز خواهند داد.

آشوب مكاني-زماني حاصل از معادله KS

در اغلب موارد، منظور از بررسـي آشـوب زمـاني در سيسـتم‌هـايي كـه دامنـه مشخصـي از فضـا را نيـز در بـر مي‌گيرند؛ كه به نام آشوب مكـاني- زمـاني معـروف شـده است؛ عبارت از يافتن يك توصيف آماري- تعيني از رفتـار سيستم ديناميكي مـورد نظـر در مقيـاس‌هـاي مكـاني بـا طول‌هاي زياد و مقياس‌هاي زماني به حـد كـافي طـولاني است[٩]. معادله ديفرانسيل KS در ابتدا بـه عنـوان مـدلي براي ناپايـداري‌هـاي روي سـطح مشـترك و لبـه شـعله و آشفتگي فازها در واكـنش‌هـاي شـيميايي پيشـنهاد شـد. بعدها اين معادله و معادلات مشتق شده از آن بـراي مـدل كردن انجماد، جريان آشفته چند بعـدي، ناپايـداري‌هـاي Rayleigh - Benard، نوسانات غلظت شيميايي حول يـك نقطه تعادل و بسياري پديده‌هاي ديگر مورد اسـتفاده قـرار گرفتند[١٠]. خواص غيرخطي اين معادله به نحوي شـبيه به معادلات NS[١٨] است كه در بسياري از مقـالات اخيـر، از آن بـه عنـوان مـدلي اسـتاندارد بـراي بررسـي ديناميـك غيرخطي سيستم‌هـاي آشـوبناك مكـاني- زمـاني[١٩] داراي ساختارهاي متجانس غالب كه جريان‌هـاي آشـفته نيـز در زمره آنها محسوب مي‌شـوند، اسـتفاده شـده اسـت. هـدف مقاله حاضر به دست آوردن توصيفي رتبه‌كاسته و آماري از رفتارهاي طولاني مدت ساختارهاي بزرگ‌مقياسي است كه در ميدان‌هاي صدق‌كننده در معادله KS ظاهر مـي‌شـوند. منظور از آماري بودن اين است كه توصـيف مـورد نظـر، از يك فرآيند متوسط‌گيري آنسامبلي حاصل شده است.

هر چند اشـكال مختلفـي از معادلـه KS توسـط محققين مختلف ارائه شده اسـت، لـيكن در اينجـا معادلـه KS يك بعدي و شرايط مرزي آن به صـورت زيـر در نظـر گرفته مي‌شوند:

$$u_t + u_{xx} + u_{xxxx} + uu_x = 0 \qquad 0 \le x \le L \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u(L,t) \qquad u_x(0,t) = u_x(L,t),... \qquad (2)$$

در اين معادله جمله u_{xx} به مثابه يك منبـع انـرژي عمـل مي‌كند، در حالي كه جمله u_{xxxx} نقشي پايداركننده داشته و مانند يك چاه انرژي اسـت كـه تـأثير آن بـا عـدد مـوج افزايش مي‌يابد. معادله KS داراي دو ويژگي عمده مشـابه با معادلات NS است كـه باعـث مـي‌شـود بتـوان از آن در شبيه‌سازي جريان‌هاي آشفته داراي ساختارهاي متجـانس استفاده كرد:

الف- به سادگي مي‌توان نشان داد كه محدوده‌اي از اعداد موج ناپايدار وجود دارنـد كـه مسـئول توليـد آشـفتگي در ميدان هستند. عدد مـوج مربـوط بـه نـرخ رشـد حـداكثر $|k| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{L}{\pi}$ است [٩].

ب- شـباهت مهـم ديگـر ايـن معـادلات در رابطـه بـا تقارن‌هاي انتقالي و انعكاسي آنها است. در حقيقت معادلـه KS با شرايط مرزي متناوب، داراي تقـارن‌هـاي انتقـالي و انعكاسـي مشـابه بـا معـادلات NS در جهـت عرضـي در جريان‌هاي لايه مرزي است. به اين ترتيب بديهي است كه تفكيك مودال معادلات و اثرهاي متقابل مودها در جملات خطي و غيرخطي در دو مسأله شبيه به هم خواهند بود.

قبلاً مطرح شد كه اشـكال مختلفـي از معادلـه KS توسـط محققين مختلف ارائه شده اسـت. در خصـوص ايـن شـكل خاص تعريف معادله KS ذكر موارد زير ضروري است:

١. اولاً به سادگي مي‌توان نشـان داد كـه بـا چنـين تعريفي، ميدان حاصل drift free يعني داراي ميـانگين صفر خواهد بود كه اين خاصيت در پايداري معادلـه در حين پيش‌روي حل عددي بسيار مفيد است.

٢. ثانياً طول L در اين معادله، در حقيقت پارامتر كنترلي معادله در گذار از رفتار ميرا بـه تنـاوبي، شـبه-تناوبي و نهايتاً كاملاً آشوبناك است. از اين نظر، طول L نقشي مشابه با عدد رينولدز در معادلات NS را به عهده دارد.

در تحقيـق حاضـر معادلـه (١) بـا شـرايط مـرزي (٢) بـا اسـتفاده از روش طيفـي گـالركين حـل عـددي مسـتقيم (DNS) شده است.

اعمال روش طيفي گالركين[٢٠] به معادله KS

روش گـالركين يكـي از دو روش مرسـوم حـل‌هـاي طيفي است. هر چند كـه اسـتفاده از ايـن روش سـابقه‌اي نسبتاً طولاني دارد، ليكن كاربرد آن در تحليل جريان‌هـاي آشفته به ويژه پس از معرفي روش POD بسيار بيشتر شده

است. بـه دليـل سرراسـت بـودن فرمولاسـيون ايـن روش، اعمال آن به معادلات حاكم بـه سـادگي صـورت گرفتـه و تقريباً همه توانايي‌هاي روش collocation را نيز دارا است. اخيراً از اين روش در تحليل متوسـط مـودال جريـان‌هـاي آشفته نيز استفاده شده است[۱۱]. يكي از محاسن بـزرگ روش گالركين، تنوع در انتخاب پايه‌هاي آن است. پايه‌هاي مناسـب را مـي‌تـوان از بـين مودهـاي فوريـه، چبيشـف، مودهاي POD و يا مجموعه‌هاي ديگر چند جملـه‌اي‌هـاي متعامد و يا موج‌واره‌ها انتخاب نمود. در تشـريح روش لازم به ذكر است كه اگر حل u در هر زمان معين t در فضـاي فاز[۲۱] با X نشان داده شده و اگر $u = u(x,t)$ يك تـابع تعريف شده بر روي قلمرو مكاني Ω باشد، X نيز بايد يـك فضاي تابعي تعريف شـده در سراسـر قلمـرو Ω بـوده كـه شامل همه حل‌هاي ممكنه معادلـه فـوق خواهـد بـود. در سيستم‌هاي با انرژي محـدود، معمـولاً زيرفضـاهاي تـابعي در $L^2(\Omega)$ انتخاب شده و دسته‌هايي از آنهـا مـورد توجـه قرار مي‌گيرند كه مشتق‌هاي آنها نيز بـه L^2 تعلـق داشـته باشند. به طور كلي شرايط مـرزي نيـز در تعريـف X وارد مي‌شوند، به طوري كه هر نوع حل ممكن براي يك مسأله مقدار اوليه- مرزي كه $u \in X$، بـه طـور خودكـار شـرايط مرزي را نيز ارضاء خواهد كرد. با انتخـاب مناسـب فضـاي فاز، معمولاً مـي‌تـوان وابسـتگي صـريح نسـبت بـه متغيـر مكاني X را نيز حذف كرد. معمولاً حل عمومي يک PDE از روش گالركين شامل دو گام اساسي است. ابتـدا تـابع u به صورت يك مجمـوع متنـاهي از حاصـل‌ضـرب ضـرايب مـودال وابسـته بـه زمـان در المـان‌هـايي از يـك پايـه مناسب X بيان مي‌شـود كـه در ايـن بسـط، المـان‌هـاي پايه $\varphi_j(x)$ بر اساس عدد موج مكاني مرتب مي‌شـوند يعني

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{K} a_j(t)\varphi_j(x) \qquad (۳)$$

سپس با اعمال اين شكل اوليه جواب به معادلات حاكم و انجام ضرب داخلي، معادلات تحولي[۲۲] براي ضرايب مجهول به شكل زير حاصل خواهند شد:

$$\frac{da}{dt} = F(a) \qquad (۴)$$

كه با حل معادله تحولي، جواب مسأله در فضـاي حالت[۲۳] به دست خواهد آمد. در رابطه فوق $F(\cdot)$ يك تابع برداري عمومي غيرخطي است كه شامل مشتق‌ها و يا انتگرال‌هاي مكاني نيز خواهد بود. در تحقيق حاضـر نيـز همـين رونـد براي حل معادله KS طي شـده اسـت. لـذا بسـط (۳) بـه معادله (۱) اعمال شده و با توجه به متناوب بـودن شـرايط مرزي، براي توابع پايه از مودهاي فوريه به صورت

$$\varphi_k(x) = \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right) \qquad (۵)$$

استفاده شده است كه درآن a_kها ضرايب مودال مختلط هستند. هم‌چنين در مورد آنها تقارني به صورت $a_{-k}(t) = a_k^*(t)$ صادق است كه a_k^* نشان‌دهنده مزدوج مختلط a_k است. ضرب داخلي روي L^2 نيز به صورت زير تعريف مي‌شود:

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g^*(x)dx \qquad (٦)$$

با اعمال موارد فوق به معادله (۱) و استفاده از خاصيت تعامد مودهاي فوريه و پس از ساده‌سازي‌هاي لازم خواهيم داشت:

$$\dot{a}_l = \frac{2\pi l^2}{L}\left[1 - \left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2\right]a_l - i\sum_j j a_j a_{(l-j)} \qquad (۷)$$

حل معادله (۷) ضرايب بسط (۳) را معين خواهد كرد كه جواب معادله (۱) را تشكيل مي‌دهند. اين معادلات براي درجه سرزني دلخواه K استخراج شده‌اند كه مي‌توان آنها را، به صورت K معادله مختلط و يا 2K معادله حقيقي، در زمان انتگرال‌گيري كرد.

انتگرال‌گيري زمـاني بـه دو صـورت صـريح و يـا ضمني امكان‌پذير است. مزيت روش انتگرال‌گيـري زمـاني صريح معمولاً در اجراي ساده‌تر آن است، ولي با توجـه بـه ملاحظات مربوط به پايداري، اغلب اسـتفاده از روش‌هـايي كه حداقل به صورت جزئي ضمني باشند توصيه مـي‌شـود. در اغلب موارد تجزيـه زمـاني ضـمني بـا اسـتفاده از روش Crank-Nicolson كه داراي دقت مرتبـه دوم اسـت انجـام مي‌شود، ولي معادله اختلافي پسرو مرتبه دوم نيز به طـور موفقيت‌آميزي در اين زمينه به كار رفته اسـت. در تجزيـه زماني صريح بيش از همه از روش‌هاي رانج-كوتا[۲۴] با دقـت مرتبه دوم، سوم يا چهارم استفاده مي‌شـود كـه جـايگزين روش‌هاي Adams-Bashforth و Leapfrog با دقت مرتبـه دوم شـده‌انـد. دو روش اخيـر در هـر مرحلـه زمـاني بـه

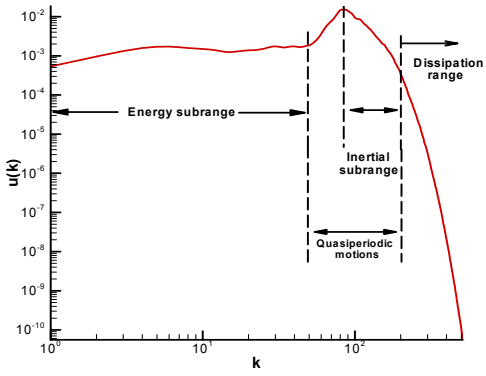
محاسبات کمتري نياز دارند، ولي در روش‌هاي رانج- کوتا به علت محدوده بازتر پايداري، از گام‌هاي زماني بزرگ‌تر مي‌توان استفاده نمود. بنابراين عليرغم اين که روش‌هاي رانج-کوتا در هر گام زماني به محاسبات بيشتري نياز دارند، معهذا به علت امکان انتخاب گام‌هاي زماني بزرگ‌تر، نسبت به روش‌هاي قبلي مناسب‌تر هستند. لازم به ذکر است که در بسياري از ميدان‌هاي آشوبناك، انتخاب گام زماني با توجه به محدوديت پايداري جملات جابجايي انجام مي‌شود که ممکن است اندازه آن نسبت به گام زماني تعيين شده توسط کوچك‌ترين مقياس‌هاي زماني موجود در حل بسيار کوچک‌تر باشد.

در تحقيق حاضر براي انتگرال‌گيري در زمان، از روش رانج-کوتاي مرتبه چهار استفاده شده است. هرچند که الگوريتم گام زماني تصحيح‌شونده[25] با موفقيت مورد استفاده قرار گرفته است، ليکن با توجه به اين که اطلاعات ميدان در زمان‌هاي مشخصي مورد نياز بوده است، نهايتاً به عنوان روش اصلي در انجام اجراهاي برنامه، گام زماني ثابت انتخاب شده است.

حل عددي مستقيم(DNS) معادله KS

گام زماني ثابت استفاده شده و شرايط اوليه به صورت تصادفي با تابع توزيع احتمال[30] ثابت در نظر گرفته شده است. پس از گذشت يک زمان آرامش[31] نسبتاً کوتاه، در حدود ۳ ثانيه، ميدان حل پايدار شده و r.m.s دامنه‌ها تقريباً ثابت خواهد شد. طيف فرکانسي نوسانات نيز تقريباً بدون تغيير خواهد ماند. اين نقطه، محل آغاز ثبت ميدان در نظر گرفته شده است. شکل(۱) توزيع r.m.s دامنه را نسبت به عدد موج نشان مي‌دهد. موارد زير در مورد اين طيف قابل ذکر هستند:

۱. غالب بودن محدوده‌اي از اعداد موج کاملاً مشهود است. ملاحظه مي‌شود که منحني داراي قله‌اي در حوالي عدد موج۱۸۰ است. برخي تحليل‌هاي تئوريک نيز لزوم وجود چنين ناحيه‌اي و محل آن را تعيين مي‌کنند[۹]. البته ذکر اين نکته لازم است که پهناي ناحيه اعداد موج غالب در اين منحني، نسبت به برخي از جريان‌هاي واقعي آشفته نسبتاً زياد است. اين مطلب به طور خاص، روش‌هاي استخراج مودهاي غالب و ساختارهاي متجانس را دچار مشکلات جدي مي‌کند[۱۰،۱۲].
۲. در اعداد موج کوچک، توزيع تقريباً ثابتي وجود دارد و به عبارت ديگر منحني کاملاً صاف است. اين ناحيه کاملاً مشابه با ناحيه انرژي در جريان‌هاي آشفته است.
۳. پس از يک افزايش در مقدار rms دامنه‌ها در حوالي عدد موج۱۸۰، يک ناحيه نسبتاً کوچک کاهش تواني[32] وجود دارد که کاملاً منطبق با ناحيه اينرسي جريان‌هاي آشفته است. در رابطه با اين ناحيه تئوري‌هايي وجود دارند که دقيقاً مانند ناحيه اينرسي جريان‌هاي آشفته، کاهش در انرژي نوسانات در اين ناحيه فقط ناشي از يک توزيع مجدد[33] انرژي به مودهاي با عدد موج کوچک‌تر است و ارتباطي با اضمحلال ندارد[۹].
۴. بلافاصله پس از ناحيه کاهش تواني، يک ناحيه کاهش نمائي[34] وجود دارد که کاملاً مشابه با ناحيه اضمحلال در جريان‌هاي آشفته است.



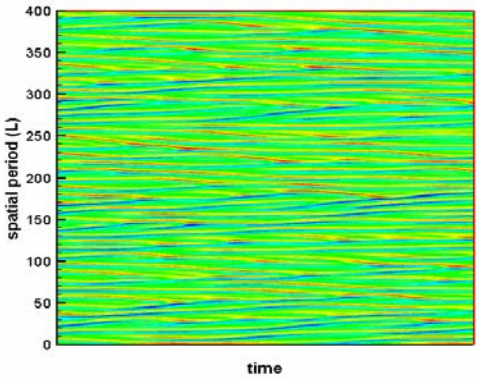
شکل ۱: طيف توزيع انرژي بر حسب اعداد موج. هر سه ناحيه انرژي، اينرسي و اضمحلال در منحني ديده مي‌شود.

اين گونه توزيع انرژي نسبت به اعداد موج و يا فرکانس، در بين جريان‌هاي آشفته داراي ساختارهاي متجانس کاملاً مشترک است. البته بسته به هندسه و شرايط جريان، محل فرکانس غالب و نيز پهناي باند فرکانس‌هاي غالب بسيار متفاوت خواهد بود[۱۳]. به هر حال تقريباً هدف تمامي روش‌هاي شبه‌تعيني[35] (SDM)، دست‌يابي به مدل‌هايي است که بتواند محل و مقدار نسبي اين دامنه‌ها را پيش‌بيني کند.

شکل (۲) ميدان ساخته شده از روي دامنه‌هاي حاصل را نشان مي‌دهد. در اين شکل نيز موارد زير قابل توجه هستند:

۱. در این شکل نیز غلبه امواج با اعـداد مـوج مشخصـي کاملاً به چشم مي‌خورد. لازم به ذکر است که این غلبـه در طي زمان به صورت آماري ثابت مي‌ماند.
۲. علیرغم این که به سادگي در مورد تناوبي بودن رفتـار موج‌هاي غالب نمي‌توان اظهار نظر کـرد، لـیکن بـدیهي است که به هر حال به نحو مشهودي رفتـار آنهـا کـاملاً تصادفي نیست.
۳. ملاحظه مي‌شود که در برخي نقاط، امواج با یک‌دیگـر برخورد کرده و ممزوج مي‌شوند. ولي تقریباً هر امتزاجي بلافاصله با یک اشتقاق همراه است، به طوري که تعداد امواج غالب در هر زمان به صورت آماري ثابـت مانـده و لذا عدد موج غالب تقریباً ثابت است.

موارد فوق همگي مؤید شباهت میدان حاصل با میدان‌هاي جریان آشفته داراي ساختارهاي متجانس است و به همین دلیل، تحلیل POD این میدان براي استخراج ساختارهاي وابسته آن را مي‌توان به عنوان راه‌گشایي براي تحلیل میدان‌هاي واقعي جریان سیال محسوب نمود.



شکل ۲: میدان حل در طي زمان. غالب بودن یک محدوده از مودها آشکار است. در طي زمان تقریباً هر امتزاجي بلافاصله با یک اشتقاق دنبال مي‌شود، به طوري که عدد موج غالب تقریباً همیشه ثابت مي‌ماند.

روش POD و snapshot POD

به منظور تأکید بیشتر بر فرمولاسیون، بدون توجه به مشکلات ناشي از تعداد زیاد ابعاد، یك آنسامبل $\{u^k\}$ از میداني اسکالر را در نظر گرفته که هر کدام از اعضاي آن به صورت تابع $u = u(x)$ در فاصله $0 \le x \le 1$ تعریف مي‌شوند. با توجه به این که به دلیل همگني میدان و وجود تقارن در شرایط مرزي، نهایتاً مودهاي فوریه به عنوان توابع پایه انتخاب خواهند شد، لذا u مقداري مختلط در نظر گرفته مي‌شود. به منظور رسیدن به تقریبي مناسب از اعضاي $\{u^k\}$، لازم است هر u بر روي توابع پایه مناسبي تصویر شود. فرض مي‌شود که uها به یك فضاي ضرب داخلي تعلق دارند که در اینجا $L^2([0,1])$، فضاي هیلبرت خطي از توابع مختلط مربع انتگرال‌پذیر، در نظر گرفته مي‌شود. روش POD یك نماینده مناسب براي کلیه اعضاي آنسامبل فوق ایجاد مي‌کند، به طوري که از نظر انرژي موجود در مودهاي نوساني بیشینه باشد. بدیهي است که براي رسیدن به چنین پایه متعامد مناسبي باید داشته باشیم[٦]:

$$\max_{\varphi \in L^2([0,1])} \frac{\langle |(u,\varphi)|^2 \rangle}{\|\varphi\|^2} \qquad (۸)$$

که $|.|$ قدرمطلق و $\|.\|$ نرم L^2 را بـا تعریـف زیـر نمـایش مي‌دهند:

$$\|f\| = (f,f)^{1/2} \qquad (۹)$$

نشان داده مي‌شود که چنین مسأله‌اي منجر به یک مسأله وردشي[۳۶] مقید به صورت زیر خواهد شد:

$$\int_{\Omega} \left\langle u(x)u^*(x') \right\rangle \varphi(x')dx' = \lambda\varphi(x) \qquad (۱۰)$$

لذا توابع پایه بهینه در حقیقت ویژه‌تابع‌هایي هستند که از معادله انتگرالي Fredholm نوع دوم فوق حاصل مي‌شـوند. ملاحظه مي‌شود که هسته[۳۷] انتگرال فـوق عبـارت از تـابع خودهمبستگي[۳۸] است. در عمل به جـاي اسـتفاده از فـرم پیوسته معادله (۱۰)، از فرم گسسته آن استفاده مي‌شـود. در این حالت اگر هر کدام از M عضو آنسامبل $\{u^k\}_{k=1}^{M}$ به عنوان برداري N بعدي در نظر گرفته شود که نشان‌دهنده یـک snapshot اسـت، آن‌گـاه تـابع خودهمبسـتگي بـه ماتریسي N×N به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$R = \left\langle u \otimes u^* \right\rangle \qquad (۱۱)$$

و لذا فرم گسسته معادله (۱۰) به یک مسأله مقدار ویژه $N \times N$ تبدیل خواهد شد که بردارهاي ویژه آن مودهاي POD و مقادیر ویژه آن انرژي جنبشي متوسط هر مود خواهند بود[۶]. Sirovich نشان داد که این مسأله را مي‌توان به یك مسأله M × M تبدیل کرد که در آن M عبارت از تعداد اعضاي آنسامبل است. با فرض φ به عنوان

يك تابع ويژه داريم

$$\varphi = \sum_{k=1}^{M} a_k u^k$$

(۱۲)

كه ضرايب a_k بايد تعيين شوند. نشان داده شده است كه اين ضرايب از مسأله مقدار ويژه زير به دست مي‌آيند[۳]:

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{M}(u^i, u^k) a_k = \lambda a_i$$

(۱۳)

بديهي است كه تنها شرط لازم براي u اين است كه u^k مستقل خطي باشند. اين روش به نام snapshots POD معروف شده است. روش POD اغلب با محاسبات مفصل مقادير و توابع ويژه ماتريس‌هاي بسيار بزرگ همراه بوده و لذا بدون استفاده از روش snapshots مورد استفاده قرار نمي‌گيرد و در نتيجه امروزه اين روش به صورت يك جزء لاينفك POD مطرح است.

روش snapshot POD در طي سال‌هاي گذشته به كرات مورد استفاده قرار گرفته و كارآمدي خود را نشان داده است. ليكن اخيراً استفاده از SVD براي انجام POD پيشنهاد شده است و با توجه به سادگي انجام عمليات و كارآمدي آن، به سرعت در حال جايگزين شدن است[۱۳،۱۲].

روش POD/SVD

يكي از پرقدرت‌ترين روش‌هاي تجزيه ماتريسي، روش تجزيه مقادير تكين (SVD) است. توانايي اين روش در استفاده براي ماتريس‌هاي غيرمربعي و عدم نياز به تقارن ماتريس باعث شده است كه امروزه اين روش به يكي از محبوب‌ترين روش‌هاي كاربردي جبر خطي تبديل شود. اساس روش بر اين خاصيت استوار است كه هر ماتريس $A_{(M\times N)}$ را مي‌توان به صورت زير تفكيك كرد:

$$A_{(M\times N)} = U_{(M\times M)} \Sigma_{(M\times N)} {V_{(N\times N)}}^T$$

(۱۴)

كه در آن $U_{(M\times M)}$ يک ماتريس متعامد است كه ستون‌هاي آن بردارهاي ويژه AA^T و $V_{(N\times N)}$ نيز يک ماتريس متعامد است كه ستون‌هاي آن بردارهاي ويژه A^TA و $\Sigma_{(M\times N)}$ ماتريسي شبه‌قطري است كه عناصر روي قطر آن مقادير تكين ماتريس A هستند. ارتباط بين مقادير تكين و مقادير ويژه ماتريس A را به سادگي از متعامد بودن ماتريس‌هاي U و V مي‌توان استخراج كرد. زيرا به سادگي نشان داده مي‌شود كه

$$AA^T = U\Sigma^2 U^T$$

(۱۵)

$$A^TA = V\Sigma^2 V^T$$

(۱۶)

با توجه به اين واقعيت كه (۱۵) و (۱۶) با استفاده از ماتريس‌هاي AA^T و A^TA تبديل‌هاي تشابهي[۳۹] تشكيل مي‌دهند، آشكار مي‌شود كه مقادير تكين ماتريس A در حقيقت عبارت از مجذورهاي مقادير ويژه ماتريس‌هاي AA^T و A^TA خواهند بود. بنابراين انجام تجزيه مقادير تكين ماتريس A معادل با يافتن مقادير ويژه و بردارهاي ويژه ماتريس AA^T خواهند بود كه قبلاً مطرح شد همان مودهاي POD و انرژي‌هاي متوسط مودها را نتيجه مي‌دهند. اعمال روش snapshots به اين تجزيه نيز به سادگي امكان‌پذير است. با ضرب رابطه (۱۴) در U^T خواهيم داشت

$$U^TA = \Sigma V^T$$

(۱۷)

كه ماتريس‌هاي $M\times N$ را تشكيل مي‌دهند. با توجه به اين كه $M-N$ ستون آخر Σ و $M-N$ سطر آخر V^T صفر هستند، لذا اين تعداد معادله را مي‌توان از مجموع محاسبات كسر كرد. يعني اگر k مقدار ويژه غيرصفر در نظر گرفته شوند، آن‌گاه k سطر اول ΣV^T غيرصفر و متعامد هستند. لازم به ذكر است كه نرم اين سطرها مقادير تكين نظير هر سطر خواهند بود. لذا در نهايت پروسه زير براي انجام snapshots SVD پيشنهاد مي‌شود:

۱. ماتريس Q كه ستون‌هاي آن بردارهاي ويژه ماتريس $B_{(M\times M)} = A_{(M\times N)}A^T_{(N\times M)}$ هستند، تعيين مي‌شود.

۲. با ضرب U^T در A خواهيم داشت

$$Q = U^TA = \Sigma V^T$$

(۱۸)

۳. با استفاده از سطرهاي غيرصفر Q، مقادير تكين A كه همان نرم‌هاي بردارهاي ويژه هستند، به دست مي‌آيند

$${\sigma_i}^2 = Q_i {Q_i}^T$$

(۱۹)

۴. ستون‌هاي V با داشتن σ_i قابل محاسبه است.

در تحقيق حاضر همين پروسه براي تحليل داده‌هاي حاصل از حل عددي مستقيم معادله KS به كار رفته است.

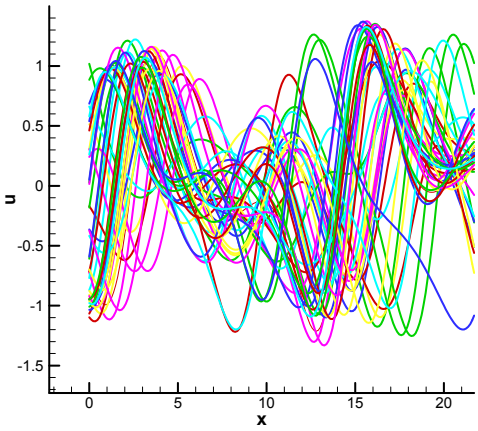
$$\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \sigma_1 v_{11} & \sigma_1 v_{12} & \sigma_1 v_{13} & \cdot & \cdot & \sigma_1 v_{1M} \\ \sigma_2 v_{21} & \sigma_2 v_{22} & \sigma_2 v_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_3 v_{31} & \sigma_3 v_{32} & \sigma_3 v_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_M v_{M1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_M v_{MM} \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

تحليل POD ميدان حاصل از حل عددي مستقيم معادله KS

با داشتن نتايج حاصل از حل عددي مستقيم و با استفاده از روش POD، مودهاي پرانرژي ميدان قابل استخراج هستند. براي يافتن تابع خودهمبستگي، روش متداولي كه براي ميدان‌هاي آماري-دائم[۴۰] (يعني ميدان‌هايي كه در آنها مقادير متوسط تابع زمان نيستند) بسيار مناسب است، عبارت از يافتن نمايه‌ها از مقادير حاصل از يك بار اجراي برنامه در زمان‌هاي مختلف خواهد بود. با توجه به اين كه از ديد فرمولاسيون رياضي فقط مستقل خطي بودن نمايه‌ها كافي است، لذا در اين روش تنها محدوديت اعمال شده به مسأله اين است كه نمونه‌گيري از ميدان بايد در فواصل زماني مناسبي انجام پذيرد. لازم به ذكر است كه انجام چنين روشي خود به خود به معناي پذيرفتن فرض ergodic بودن ميدان است. از طرف ديگر، اجراي چنين روشي در مورد ميدان‌هاي آماري-گذرا[۴۱] منجر به خطاهاي جدي خواهد شد [۱۴،۱۵]. در اين موارد لازم است كه با انجام اجراهاي متعدد برنامه از يك شرايط اوليه اسمي يكسان و براي هر مقطع زماني، آنسامبل مورد نظر از اجراهاي برنامه در همان زمان خاص به دست آورده شود[۹].

هر دو روش فوق در تحقيق حاضر اجرا شده‌اند، ليكن با توجه به هدف نهايي كه عبارت از تحليل نحوه عمل‌كرد روش POD در استخراج ساختارهاي متجانس بوده است، تأكيد اصلي بر ايجاد آنسامبل با استفاده از اجراهاي متفاوت از شرايط اوليه تا حدودي متفاوت بوده است. چنان‌كه ملاحظه خواهد شد، به اين ترتيب ايجاد آنسامبل داراي نقش اساسي در موفقيت و يا عدم موفقيت روش مورد بحث، براي استخراج ساختارهاي متجانس خواهد بود.

براي به دست آوردن آنسامبل گذرا با زمان، از چهل اجراي مختلف با شرايط نامي يكسان استفاده شده است. براي داشتن شرايط نامي يكسان در حل DNS معادله KS، ابتدا از مودهاي كاملاً تصادفي شروع شده و حل تا زمان حدود ۱۰۰ ثانيه ادامه يافته است. به اين ترتيب، عدم وابستگي حل به شرايط اوليه و وجود تعادل در جواب‌ها احراز شده است. سپس حل در لحظه t=۱۰۰ ثانيه به عنوان شرايط اوليه نامي در نظر گرفته شده و اعضاي مختلف آنسامبل به ترتيب با مغشوش كردن تصادفي اين شرايط اوليه و ادامه حل تا ۱۰۰ ثانيه بعدي حاصل شده‌اند. دامنه مكاني حل نيز به $N = ۳۵۰۱$ نقطه تقسيم شده است. شكل (۳) نمايانگر ناحيه كوچكي از آنسامبل حاصله از حل عددي در t=۸۰ ثانيه است.



شكل۳: رفتار سيستم براي چهل اجراي مختلف برنامه با شرايط نامي يكسان در زمان $t = ۸۰$ و $۰ \le x \le ٤۰۰$

با توجه به موارد پيش‌گفته براي هر گام زماني، ماتريسي با چهل ستون كه هر ستون آن داراي برداري با ۳۵۰۱ بعد است حاصل مي‌شود. با استفاده از روند تشريح شده، ابتدا ماتريس Q از طريق حل يك مسأله مقدار ويژه ۴۰×۴۰ به دست آمده و سپس مقادير ويژه و بردارهاي ويژه مورد نظر استخراج مي‌شوند. براي نمايش نتايج، فقط يك گام زماني يعني $t = ۸۰$ تشريح مي‌شود و ساير گام‌هاي زماني نيز كاملاً مشابه با اين مورد خواهند بود.

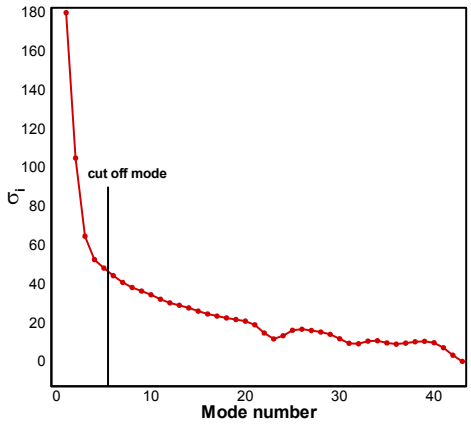
در شكل (۴) توزيع مقادير تكين نسبت به شماره مود نمايش داده شده است. ملاحظه مي‌شود كه شيب افت سهم هر مود در ساختن انرژي كل ميدان چندان زياد نيست. البته به هر حال، پس از مود پنجم شيب به نحو چشم‌گيري كاهش مي‌يابد. به همين دليل، از

پنج مود اول در بازسازي ميدان استفاده شده است. اگر نسبت انرژي دريافت شده براي بازسازي ميدان به صورت زير تعريف شود:

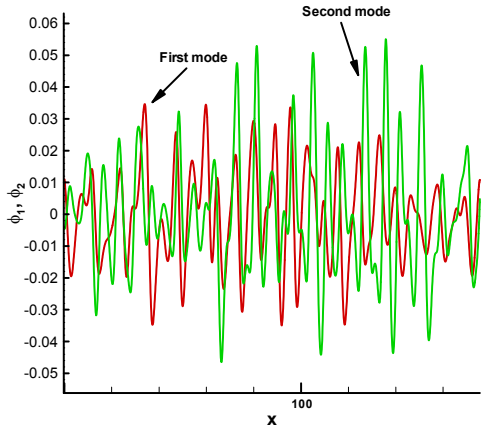
$$E = (\sum_{i=1}^{K_{cut}} \lambda_i)/(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i)$$

(٢١)

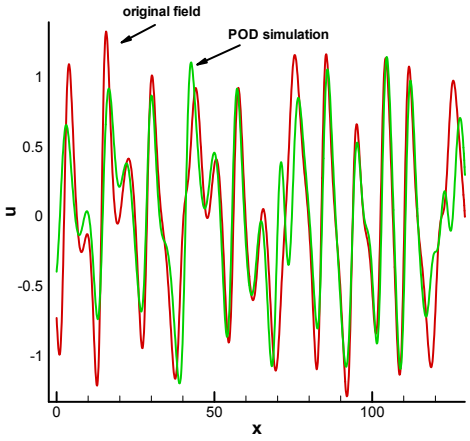
در اين صورت با استفاده از پنج مود اول در حدود ۴۰ درصد از انرژي ميدان بازيافت خواهد شد. البته با توجه به نتايج استخراج شده در [١٣] و تعاريف جديد ساختارهاي متجانس، در تفكيك صحيح ساختارهاي متجانس از نامتجانس فقط مقدار انرژي بازيافت شده توسط مودها حائز اهميت نبوده، بلكه تعيني و يا تصادفي بودن ميدان بازسازي شده نيز داراي نقشي مهم خواهد بود. در واقع با افزايش تعداد مودهاي POD، سهم قسمت تصادفي در ميدان بازسازي شده بيشتر خواهد شد. در شكل (۵) مودهاي اول و دوم POD در مقابل يك‌ديگر ترسيم شده‌اند. لازم به تأكيد است با توجه به اين كه مقادير تكين به ترتيب نزولي مرتب مي‌شوند، لذا به طور طبيعي نرم مودها به صورت صعودي مرتب خواهند شد يعني نرم مود دوم بزرگ‌تر از مود اول و الي آخر. در نهايت نيز ميدان با استفاده از پنج مود بازسازي شده و در شكل (۶) ترسيم شده است. ملاحظه مي‌شود كه رفتار كلي ميدان بازسازي شده، كاملاً منطبق با ميدان اوليه است. ليكن در مورد نوسانات كوچك‌تر چنين تطابقي وجود ندارد كه با توجه به حذف حدود ۶۰ درصد از انرژي ميدان، قابل پيش‌بيني به نظر مي‌رسد.



شكل۴: توزيع مقادير تكين نسبت به شماره مود. پس از مود پنجم، در شيب سهم انرژي هر مود از انرژي كل كاهش چشم-گيري به وجود مي‌آيد.



شكل۵: مودهاي اول و دوم POD. اندازه نسبي مودها به ترتيب صعودي مرتب مي‌شوند.



شكل ۶: بخشي از ميدان بازسازي شده با استفاده از پنج مود اول POD. تطابق در اعداد موج كوچك بيشتر است.

متوسط‌گيري آنسامبلي مودهاي POD و فوريه

مزيت قابل توجه ساختن آنسامبل به روش پيش-گفته اين است كه با داشتن مودهاي POD حاصل از آن، در مورد توانايي روش POD در استخراج ساختارهاي متجانس ميدان مي‌توان به سادگي اظهار نظر كرد. در واقع ايده اصلي عبارت از بررسي ميزان انطباق ميدان بازسازي شده توسط مودهاي POD با ميدان متوسط‌گيري شده آنسامبلي است. با توجه به اين كه اين انطباق بيش از همه در فضاي فوريه قابل تحليل خواهد بود، بنابراين بر روي مقايسه با متوسط مودال ميدان تمركز مي‌شود.

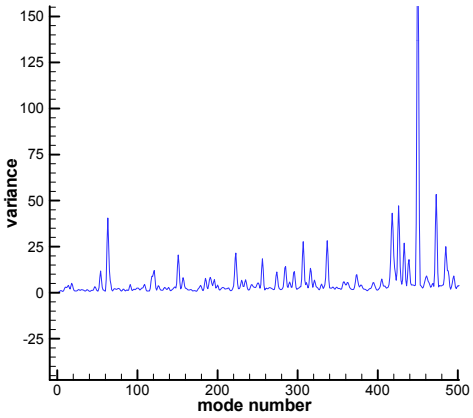
مجدداً با ملاحظه شكل (٣) نتيجه مي‌شود كه وجود شرايط مرزي متناوب و غيرمقيد متغير با زمان در

دو سوي ميدان حل، باعث ايجاد نقاط ابتدايي گوناگوني در منحني‌ها شده است. اگرچه منحني‌ها در لحظات اوليه داراي شرايط نسبتاً مشابهي هستند، ولي اين موضوع به دليل وجود آشوبناكي[۴۲] كامل در معادله KS به مرور زمان از بين رفته و هر كدام از مودها بسته به ميزان متجانس بودن يا غيرمتجانس بودن در بين اعضاي مختلف آنسامبل، در زمان‌هاي بعدي رفتار متفاوتي از خود نشان مي‌دهند. لذا به اين دليل در t=۸۰ ثانيه، رفتارها فقط تا حدودي شبيه به هم خواهند بود. با توجه مجدد به rms دامنه مودهاي فوريه اعضاي آنسامبل در شكل (۱) ملاحظه مي‌شود كه مودهاي غالب در محدوده مشخصي در ميدان وجود دارند. البته لازم به ذكر است كه ناحيه مربوط به مودهاي غالب تا حدود زيادي پهن است. اين موضوع، انجام متوسط‌گيري آنسامبلي را بدون حذف مودهاي غيرمتجانس دچار مشكل مي‌كند. به همين دليل انتخاب مودهايي كه بايد در متوسط‌گيري آنسامبلي شركت كنند، بر اساس نحوه توزيع تغييرات دامنه مودها نسبت به متوسط‌گيري آنسامبلي صورت خواهد گرفت. بنابراين معيار انتخاب مودهاي شركت‌كننده در متوسط-گيري آنسامبلي، واريانس تغييرات دامنه مود مورد نظر در حين متوسط‌گيري آنسامبلي در نظر گرفته شده است. شكل (۷) واريانس تغييرات مقادير متوسط را نشان مي‌دهد. در اين شكل دو مطلب قابل ذكر است:

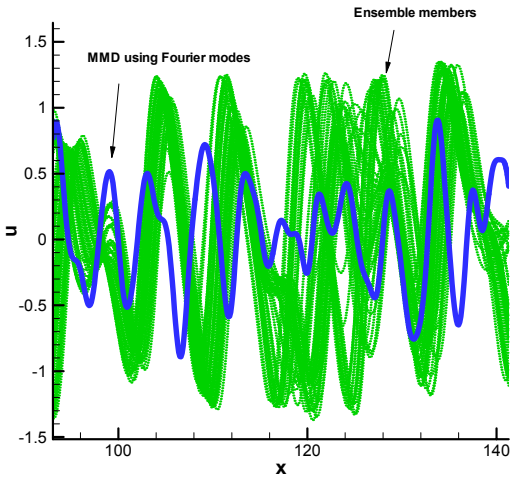
الف) هر دو بخش متجانس و غيرمتجانس، تقريباً تمام طيف را در بر مي‌گيرند. اين پديده با مطالعات تجربي ساير محققين بر روي ميدان‌هاي جريان آشفته مطابقت كامل دارد[۳].

ب) حضور بخش غيرمتجانس در اعداد موج بيشتر، بارز است.

اكنون بر اساس واريانس تغييرات هر مود در مورد متجانس و يا غيرمتجانس بودن آن مي‌توان اظهار نظر كرد. در شكل (۷)، نمودارهاي بخش‌هاي متجانس و غيرمتجانس مقاديري كه واريانس آنها به ترتيب كمتر از ۲۰% و ۳۰% ميانگين مقادير واريانس دامنه‌ها در متوسط‌گيري آنسامبلي است، رسم شده‌اند. در اين شكل، منحني مربوط به ۲۰% مقدار ميانگين، بالاتر از منحني ديگر قرار دارد. اين موضوع، ساختارهاي متجانس را در اين منحني برجسته‌تر نشان مي‌دهد. به طور كلي، تطابق بسيار خوب منحني حاصله از مقادير مرتبط با ساختارهاي متجانس و مقادير rms نشان مي‌دهد كه ميدان بازسازي شده با استفاده از مودهاي متوسط فوريه، تقريباً مبين اثر ساختارهاي متجانس است. اين اثرات با حدود ۲۰ مود بازسازي شده‌اند.



شكل۷: واريانس تغييرات دامنه مودها نسبت به متوسط‌گيري آنسامبلي.

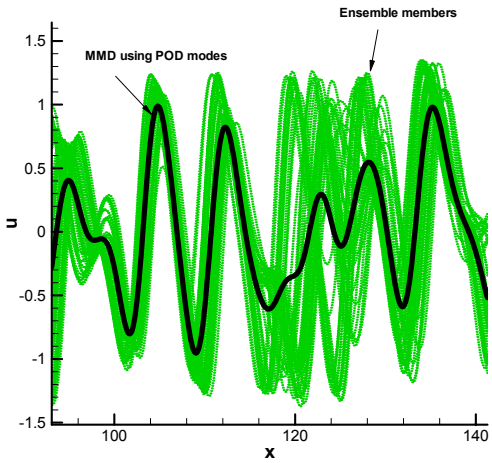


شكل۸: ميدان متوسط مودال شده با استفاده از مودهاي فوريه در برابر اعضاي آنسامبل.

ميدان متوسط مودال شده در برابر اعضاي آنسامبل در شكل (۸) رسم شده است. ملاحظه مي‌شود كه در ناحيه‌هايي كه اعضاي آنسامبل از نظر فاز با يك‌ديگر تطابق كمتري دارند، متوسط مودال نيز فاز مناسبي را نشان نمي‌دهد. علت اين موضوع، تبعيت مقادير حاصله از اين روش با ساختارهاي متجانس و نه تمام عناصر سازنده ميدان است.

اكنون با داشتن متوسط مودال ميدان، همين مراحل براي مودهاي حاصل از POD نيز انجام شده و نتيجه چنين

فرآيندي در شكل (٩) نشان داده شده است. با توجه به شكل ملاحظه مي‌شود كه متوسط‌گيري آنسامبلي باعث كم شدن دامنه مودهاي POD شده، به طوري كه دامنه آن در برخي نواحي حتي از مودهاي فوريه نيز كمتر شده است. اين مطلب مبين حضور بخش غيرمتجانس در مودهاي POD است.



شكل٩: ميدان حاصل از متوسط مودال با استفاده از مودهاي POD در برابر اعضاي آنسامبل.

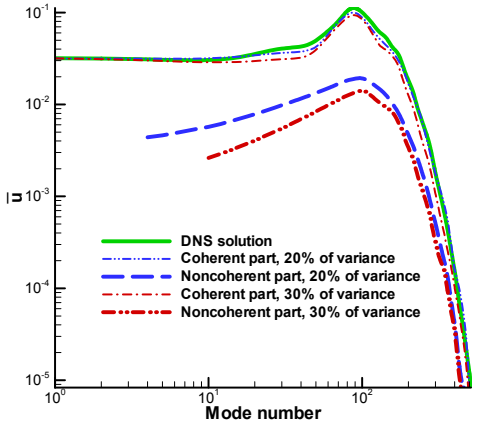
بر اساس اين نتايج مي‌توان ميدان را به دو بخش متجانس و غيرمتجانس در مودهاي POD تقسيم نمود. لذا هر كدام از مودهاي POD تحت متوسط‌گيري آنسامبلي قرار گرفته و با تعريف يک واريانس آستانه[٤٣]، مودهاي متجانس و غيرمتجانس آنها از هم جدا شده‌اند كه نتايج در شكل (١٠) نشان داده شده است. در اين شكل، موارد زير قابل مشاهده است:

الف) شكل كلي منحني rms دامنه در قسمت متجانس به طور كامل حفظ شده است. معهذا در برخي نواحي اين شكل به ويژه نواحي با اعداد موج زياد، اندكي كاهش دامنه وجود دارد.

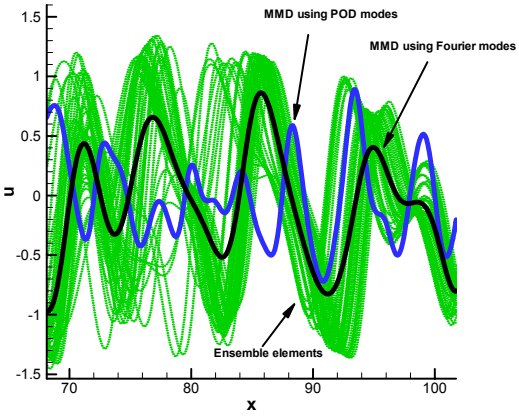
ب) منحني rms دامنه در قسمت غيرمتجانس ميدان مانند ساير ميدان‌هاي بدون ساختارهاي متجانس، داراي شكل بدون تيزي و تا حدود زيادي يكنواخت است.

پ) تراكم مودهاي متجانس و غيرمتجانس بسته به واريانس آستانه انتخاب شده، متفاوت خواهند بود.

در شكل (١١) حل عددي مستقيم، متوسط‌گيري از مودهاي فوريه و نيز متوسط‌گيري از مودهاي POD با يك‌ديگر مقايسه شده‌اند. ملاحظه مي‌شود كه مودهاي POD در تشخيص فاز، نسبت به مودهاي متوسط فوريه بسيار بهتر عمل مي‌كنند كه با توجه به نزديكي هر كدام از اعضاي آنسامبل بازسازي شده با مقادير حاصل از حل عددي مستقيم، فقط به علت وجود بخش‌هاي تصادفي در مودهاي POD است.



شكل١٠: تفكيک بخش‌هاي متجانس و غيرمتجانس بر اساس مقادير واريانس تغييرات دامنه مودها.



شكل١١: مقايسه حل عددي مستقيم، متوسط مودال با استفاده از مودهاي فوريه و نيز متوسط مودال با استفاده از مودهاي POD.

جمع‌بندي و نتيجه‌گيري

در اين مقاله توانايي روش تجزيه متوسط مودال (MMD) ، انجام شده با استفاده از توابع پايه POD، در استخراج ساختارهاي متجانس مورد ارزيابي قرار گرفته‌است. بدين منظور با استفاده از حل عددي مستقيم معادله KS، يك ميدان آشفته داراي ساختارهاي متجانس حاصل شده‌است. با موجود بودن اين ميدان و استفاده از

روش POD/SVD، مودهاي غالب ميدان استخراج شده و سپس متوسط مودال ميدان، هم با استفاده از مودهاي فوريه و هم مودهاي POD، تعيين شده‌اند. نتايج ارائه شده در بخش (۴)، به وضوح نشان دهنده كاهشي قابل‌توجه در دامنه مودهاي متوسط POD ، ناشي از فرآيند متوسط‌گيري آنسامبلي، هستند كه مبين وجود بخش‌هاي تصادفي در اين مودها است. در نتيجه، همانگونه كه ساير محققين نيز از روشهايي ديگر نشان داده‌اند [۹ و۸ و۱]، در نظر گرفتن مودهاي كلاسيك POD به عنوان ساختارهاي متجانس ميدان چندان موجه نخواهد بود. از طرف ديگر بر طبق شكل (۹)، مودهاي متوسط POD، حاصل از متوسط‌گيري آنسامبلي، تقارن و فاز بسيار نزديك‌تري نسبت به ميدان اصلي ، در مقايسه با مودهاي فوريه متوسط‌گيري‌شده، دارند. اين در حالي است كه بر طبق شكل (۱۱)، استفاده از مودهاي فوريه در متوسط-گيري آنسامبلي، مي‌تواند منجر به تقارن‌هايي در ميدان بازسازي شده شود كه لزوماً منطبق با تقارن‌هاي ميدان اصلي نيست. در عين‌حال، تعريف تجانس در مودهاي فوريه با استفاده از فيلتر متوسط‌گيري آنسامبلي، با توجه به شكل‌هاي (۷) و (۱۰)، كاملا موجه جلوه مي‌كند. زيرا اولا وجود بخش‌هاي متجانس تقريبا در تمامي طول طيف به چشم مي‌خورد (كه منطبق با ارزيابي‌هاي ساير محققين است [۲]) و ثانيا تراكم ساختارهاي غير متجانس در مودهاي با فركانس زياد بيشتر است، كه مجددا با مشاهدات تجربي در جريانهاي آشفته تطابق دارد[۲و۱].

از زمان پيدايش روش POD يعني دهه شصت قرن ميلادي گذشته تاكنون، تعريف ساختارهاي متجانس تغييرات زيادي پيدا كرده است. تعاريف جديد ساختارهاي متجانس بر اساس تعيني و تصادفي بودن ميدان بنا شده‌اند كه روش POD به تنهايي توانايي تفكيك آنها را ندارد. به نظر مي‌رسد كه با توجه به تعاريف جديد، روش POD براي استخراج ساختارهاي متجانس چندان مناسب نبوده و در اين رهگذر شايد روش متوسط‌گيري مودال بتواند افق‌هاي جديدي را فراروي محققين باز نمايد.

مراجع

1 - Aubrun, S., Kao, P. L. and Boisson, H. C. (2000). "Experimental Coherent Structures Extraction and Numerical Semi-deterministic Modeling in the Turbulent Flow Behind a Backward Facing Step." *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 22, PP. 93-101.

2 - Bonnet, J. P., Delville, J., Glauser, M. N., Antonia, R. A., Bisset, D. K., Cole, D. R., fiedler, H. E., Garem, J. H., Hilberg,. D., Jeong,. J., Kevlahan, N. K. R., Ukeiley, L. S. and Vincendeau, E. (1998). *Collaborative Testing of Eddy Structures Identification Methods in Free Turbulent Shear Flows, Experiments in Fluids*, Vol. 25, PP. 197-225, Springer Verlag Publishing.

3 - Farge, M. and Schneider, K. (2001). "Coherent vortex simulation(CVS)." *A Semi-Deterministic Turbulence Model Using Wavelets, Flow,* Turbulence & Combustion, Vol. 66, PP.393-426.

4 - Smith, T. R., Moehlis, J. and Holmes, P. (2004). *Low dimensional modelling of turbulence using the proper orthogonal decomposition: a tutorial*, Kluwer Academic Publishers.

5 - Lumley, J. L. (1967). "The structure of inhomogeneous turbulence." In A. M. Yaglom and V. I. Tartarski, editors, *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, PP. 166-78. Nauka, Moscow.

6 - Sirovich, L. (1987). "Turbulence and the dynamics of coherent structures." Parts I-III, *Quarterly of Applied Math.,* XLV Vol. 3, PP.561-82.

7 - Fahl, M. (2002). "Computation of POD basis functions for fluid flows with Lanczos methods." *Math. Comp. Modeling*.

8 - Moehlis, J., Smith, T. R., Holmes, P. and Faisst, H. (2002). "Models for turbulent plane couette flow using the proper orthogonal decomposition." *Phys., Fluids,* Vol. 14, PP. 2493.

9 - Holmes, P., Lumley, J. L. and Berkooz, G. (1998). *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*, Cambridg University Press.

10 - Berkooz, G., Elezgaray, J. and Holmes, P. (1992). "Coherent structures in random media and wavelets." *Phisica D,* Vol. 61, PP.47-58.

11 - Sabetghadam, F. (2004). "Generalization of the RANS equations using mean modal decomposition of the Navier Stokes equations." *ASME Engineering System Design and Analysis Conference,*UK.

12 - Armbruster, D., Heiland, R. and Kostelich, E. J. (1994). "KLTOOL: a tool to analysis spatio-temporal complexity." *Chaos,* Vol. 4, No. 2, PP.421-4.

13 - Zhang, B., Lian, Y. and Shyy, W. (2003). "Proper orthogonal decomposition for three dimensional membrane wing aerodynamics." *33rd AIAA Fluid Dynamics Conference & Exhibit,* Orlando, FL.

14 - Rempfer, D. (2000). "On low-dimensional Galerkin models for fluid flow." *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, Vol. 14, PP. 75-88.

15 - Kevlahan, NKR, Hunt, JCR , Vassilicos, JC, (1993). "A comparison of different analytical techniques for identifying structures in turbulence." *Proc. IUTAM Conf. on `Eddy structure identification', in Free Turbulent Shear Flows*, Poitiers, Eds. J P Bonnet & M N Glauser, Kluwer, PP.311-24.

واژه هاي انگليسي به ترتيب استفاده در متن

1 - Snapshot	2 - Phase averaging	3 - Ensemble averaging
4 - Coherent	5 - Non-coherent	6 - Uncorrelated
7 - Stochastic	8 - Random	9 - Semi-Deterministic Models
10 - Large Eddy simulation	11 - Conditional sampling	
12 - Proper Orthogonal Decomposition	13 - Autocorrelation tensor	
14 - Direct Numerical simulation	15 - Method of snapshots	
16 - Singular Value Decomposition	17 - Kuramoto-Sivashinsky	18 - Navier Stokes Equations
19 - Spatio-temporal Chaos	20 - Spectral Galerkin Method	21 - Phase space
22 - Evolution equations	23 - State space	24 - Runge-Kutta method
25 - Adjustable timestep	26 - Energy range	27 - Inertial range
28 - Dissipation range	29 - Bifurcation	
30 - Probability Density Function (PDF)	31 - Settling time	32 - Power law decrease
33 - Redistribution	34 - Exponential decrease	
35 - Semi Deterministic Methods	36 - Variational	37 - Kernel
38 - Autocorrelation function	39 - Similarity transformation	40 - Statistically stationary
41 - Statistically nonstationary	42 - Chaos	43 - Variance Threshold