روش توابع پتانسيل براي محيط همسان جانبي با تقارن محوري

مرتضي اسكندري قادي*

استاديار گروه علوم پايه مهندسی - پرديس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ۸۵/۱۰/۵ ، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۶/۴/۲۰ ، تاريخ تصويب ۸۶/۶/۲۴)

چكيده

در مرجع [۲]، جواب كامل مسائل الاستو ديناميک در محيطهاي همسان جانبي بر حسب دو تابع پتانسيل معرفي شده است. کامل بودن جواب، با استفاده از معادلات تکراري موج در محيطهاي همسان جانبي اثبات شده است. همچنين نشان داده شده است که در حالت تقارن محوري دو تابع پتانسيل به يک تابع تنها تبديل مي شوند. محدوديت تابع پتانسيل فوق الذکر در حالت تقارن محوري بدون پيچش آن است که نيروهاي حجمي در اين مسائل حداکثر مي توانند به صورت بردار $(0,0,b_z(r,z,t))$ نوشته شود. در اين مقاله محدوديت فوق برداشته شده و نيروهاي حجمي به شکل کلي خود يعني $(b_r(r,z,t),0,b_z(r,z,t))$ براي حالت متقارن محوري بدون پيچش قابل اعمال مي باشد. جواب مسائل انتشار امواج ارائه شده در اين مقاله براي حالت استاتيکي ساده شده و نيز براي مسائل انتشار امواج ومسائل استاتيکي در محيطهاي همسان ساده تر مي گردد. همچنين نشان داده مي شود که جواب ارائه شده در اينجا براي مسائل استاتيکي در محيطهاي همسان به جواب Simmonds [۱۴]، که خود توسعه يافته جواب Love [۹]مي باشد، همگرا مي گردد.

واژه هاي كليدي: الاستوديناميك – الاستواستاتيك - همسان جانبي - متقارن محوري - توابع پتانسيل

مقدمه

مدتها است که تئوري ارتجاعي براي مواد ناهمسان[۱] مورد توجه محققان قرار گرفته است. يکي از مواد ناهمسان که کاربرد وسيعي در مهندسي دارد، مواد همسان جانبي[۲] مي‌باشد. در اين مقاله فقط اين نوع مواد مورد توجه قرار مي گيرند. از آنجايي که حل تحليلي مسائل تئوري ارتجاعي در حالت ديناميکي و استاتيکي با حل دستگاه معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي همراه است، اين مقوله کمتر مورد توجه قرار گرفته است. حال اگر خصوصيات مواد به جاي همسان، نا همسان باشد، مشکلات مربوط به حل تحليلي دو چندان مي گردد. حل تحليلي مسائل استاتيکي مربوط به محيطهاي همسان جانبي به تحقيقات ميشل[۱۰]، لخنيتسکي، اليوت[۱]، هو[۶]، نواکي[۱۱]، ايوبنکس و استرنبرگ[۴]، لخنيتسکي[۸] و ونگ و ونگ[۲۰] بر مي گردد. متأسفانه تحقيقات براي حل تحليلي مسائل ديناميکي در محيطهاي همسان جانبي بسيار کمتر مي باشد. لخنيتسکي درسال (۱۹۴۰) تغييرمکان‌هاي استاتيکي يک محيط همسان جانبي با تقارن محوري بدون پيچش را بر حسب يک تابع پتانسيل بيان کرد و نشان داد که معادله حاکم بر تابع پتانسيل فوق الذکر يک معادله ديفرانسيل با مشتقات جزيي از مرتبه ۴ مي‌باشد. نواکي[۱۱]در سال (۱۹۵۴) همان جواب لخنيتسکي را مجدداً به دست آورد.

در سال(۱۹۵۳)، هو[۶] حالت کلي‌تر مسائل استاتيکي را مورد توجه قرار داده وجوابي کاملتر از جواب لخنيتسکي ارائه نموده است. اليوت[۱] در سال (۱۹۴۸) جواب کامل مسائل متقارن محوري بدون پيچش در حالت استاتيکي را بر حسب ۲ تابع معرفي کرد به طوري که معادلات حاکم بر آنها معادلات موج مرتبه ۲ مي باشند. توسعه جواب اليوت براي حالت بدون تقارن محوري توسط لاج انجام شده است. بيشترين توجه ما پس از معرفي جواب يک دستگاه معادلات با مشتقات جزيي بر حسب توابع پتانسيل مربوط به اثبات کامل بودن جواب مي باشد. اثبات کامل بودن جواب‌هاي لخنيتسکي، نواکي، هو، اليوت، لاج و برخي ديگر از توابع پتانسيل در محيطهاي همسان در مقالات ايوبنکس و استرنبرگ [۴]، استرنبرگ و ايوبنکس [۱۶]، استرنبرگ [۱۵]، استرنبرگ و گرتين [۱۷]، استيپس [۱۸]، تروسدل [۱۹] و ونگ و ونگ[۲۰] قابل پي گيري مي‌باشد. دراين مقاله توابع پتانسيل جديد براي مسائل متقارن محوري بدون پيچش درمحيطهاي همسان جانبي ارائه مي گردد. تفاوت اين توابع با توابع ارائه شده در مرجع [۲] در حالت متقارن محوري بدون پيچش آن است که توابع ارائه شده در مرجع [۲] نمي‌تواند شامل نيروي حجمي در امتداد شعاعي باشد؛ در حالي که توابع اين مقاله درعين حال که براي مسائل

* نويسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۱۷۱ ، فاكس : ۶۶۴۶۹۸۰۹ ، Email: ghadi@ustmb.ac.ir

متقارن محوري بدون پيچش مي باشد، اما نيروهاي حجمي در اين حالت مي تواند كلي‌تر بوده وشامل نيروي حجمي شعاعي نيز باشد.

معادلات حاكم

محيط با رفتار همسان جانبي را با B نشان مي دهيم. محيط B را با تعريف داده شده در كلوگ [۷] منظم فرض مي كنيم. معادلات حركت در اين محيط در حالت متقارن محوري در دستگاه مختصات استوانه‌اي (r,θ,z) به صورت زير نوشته مي شود:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}+b_r=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+b_z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(۱)

كه در آن $(i,j=r,\theta,z)$,$\sigma_{ij}(r,z,t)$ مؤلفه‌هاي تانسور تنش، ρ جرم حجمي، $(i=r,z), b_i(r,z,t)$ مؤلفه‌هاي نيروي حجمي و (v,w) مؤلفه‌هاي بردار تغييرمكان مي باشند. با فرض وجود تابع انرژي كرنشي براي محيط B با رفتار ايزوتروپ جانبي با محور تقارن موازي z، روابط تنش وكرنش به صورت زير در مي آيند[۵]:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{rz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0\\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0\\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{1313}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \varepsilon_{zz}\\ 2\varepsilon_{rz}\end{bmatrix}$$

(۲)

به علاوه روابط كرنش تغييرمكان به صورت زير در مي‌آيد:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r},\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\ 2\varepsilon_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}$$

(۳)

در معادلات (۲) و(۳)، $\varepsilon_{ij}(r,z,t)$ با $(i,j=r,\theta,z)$ مؤلفه‌هاي تانسور كرنش و C_{ijkl} مؤلفه‌هاي تانسور ضرايب ارتجاعي مرتبه ۴ مربوط به رفتار ايزوتروپ جانبي مي باشند. با استفاده از معادلات (۲) و(۳)، معادلات حركت به شكل زير در مي‌آيند:

$$(1+\alpha_1)C_{1212}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+\alpha_2 C_{1212}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$+(C_{1133}+\alpha_2 C_{1212})\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}+b_r=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$\alpha_2 C_{1212}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+C_{3333}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$
$$+(C_{1133}+\alpha_2 C_{1212})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+b_z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(۴)

كه در آن:

$$C_{1313}=\alpha_2 C_{1212},\ C_{1111}=(1+\alpha_1)C_{1212}.$$

(۵)

با در نظر گرفتن مثبت معين بودن تابع انرژي كرنشي به راحتي مي توان نشان داد كه $C_{1212}>0$,$\alpha_2>0$ و $\alpha_1>-1$ است.

جواب كلي مسائل الاستوديناميک

براي ارائه جواب معادلات (۴)، ابتدا تابع پتانسيل $\Theta(r,z,t)$ را به عنوان جواب معادله زير در نظر مي گيريم:

$$\frac{\partial^2\Theta(r,z,t)}{\partial r\,\partial z}=b_r(r,z,t)$$

(۶)

در اين صورت تغيير مكان‌هاي u وw را بر حسب توابع F و Θ به صورت زير مي‌نويسيم:

$$u(r,z,t)=-\alpha_3\frac{\partial^2 F(r,z,t)}{\partial r\partial z},$$
$$w(r,z,t)=(1+\alpha_1)$$
$$\times\left(\nabla_r^2+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{(1+\alpha_1)C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F(r,z,t)$$
$$-\frac{1}{\alpha_3 C_{1212}}\Theta(r,z,t).$$

(۷)

در اين معادله $\alpha_3=(C_{1133}+C_{1313})/C_{1212}$ و $\nabla_r^2=\partial^2/\partial r^2+\partial/r\partial r$. با جايگزيني (۷) در معادلات (۴)، مشاهده مي شود كه اولين معادله (۴) به معادله (۶) و دومين معادله (۴) به معادله (۸) تبديل مي شوند:

$$\left[\nabla_1^2\nabla_2^2-\delta\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial t^2}\right]F(r,z,t)=\frac{-1}{\alpha_2(1+\alpha_1)}\frac{b_z(r,z,t)}{C_{1212}}$$
$$+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3 C_{1111}}\left(\nabla_r^2+\frac{C_{3333}}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Theta(r,z,t).$$

(۸)

كه در آن:

$$\nabla_\alpha^2=\nabla_r^2+\frac{\partial^2}{s_\alpha^2\partial z^2}-\frac{\partial^2}{c_\alpha^2\partial t^2},\ (\alpha=1,2)$$
$$c_2^2=\frac{C_{1313}}{\rho},\ c_1^2=\frac{C_{1111}}{\rho},$$

به علاوه s_α^2 $(\alpha=1,2)$ ريشه‌هاي معادله زير مي با شند:

$$C_{3333}C_{1313}s^4+(C_{1133}^2+2C_{1133}C_{1313}-C_{1111}C_{3333})s^2+C_{1111}C_{1313}=0.$$

(۹)

همچنين:

$\delta = (1-1/s_2^2)/c_1^2 + (C_{3333}/C_{1111} - 1/s_1^2)/c_2^2$. واضح است که جواب (۷) در شرط $\underline{e}_z .curl[u,0,w]^{\mathrm{T}} = 0$ ، صدق مي کند. دراينجا $\underline{e}_z$ بردار يکه در امتداد محور z بوده وبالانويس T به معني ترانهاده است.

قضيه زير نشان مي دهد که جواب‌هاي داده شده در روابط (۷) براي يک محيط همسان جانبي و محدب نسبت به خطوط موازي محور z در حالت متقارن محوري بدون پيچش کامل مي‌باشند.

قضيه کامل بودن جواب

فرض کنيد B يک محيط منظم با تعريف داده شده در کلوگ [۷] و محدب نسبت به خطوط موازي محور z باشد. اين محيط را ايزوتروپ جانبي و$b_r(r,z,t)$ و$b_z(r,z,t)$ را دو تابع پيوسته تکه‌اي روي B و فاصله باز $(0,t_0)$ فرض مي کنيم. اگر $u(r,z,t)$ و $w(r,z,t)$ جواب‌هاي معادلات (۴) باشند، آنگاه توابع $\Theta(r,z,t)$ و $F(r,z,t,\delta)$ وجود دارند به طوري که:

- تابع $\Theta(r,z,t)$ روي B و روي $(0,t_0)$ مشتق پذير تا مرتبه ۲ نسبت به z ,r و t است،
- تابع $F(r,z,t,\delta)$ روي B و روي $(0,t_0)$ مشتق پذير تا مرتبه ۴ نسبت به z ,r و t است،
- تابع F نسبت به δ تحليلي است، و u و w بر حسب Θو F مطابق روابط (۷) تعريف مي شوند. (در روابط (۷) بايد $F(r,z,t,\delta)$ را جايگزين $F(r,z,t)$ کنيم.)

در اين صورت Θ و F به ترتيب در معادلات *(۶) و(۸) صدق مي کنند.*

اثبات: فرض کنيد $\Theta(r,z,t)$ جواب معادله (۶) باشد، در اين صورت Θ به صورت زير نوشته مي شود:

$$\Theta(r,z,t) = \iint b_r(r,z,t)\,dr\,dz, \quad r \ge 0\,, \quad r,z \in \mathrm{B}$$

حال اگر u و w جواب‌هاي معادلات (۴) باشند، آنگاه همانطور که اشاره شده است اين توابع بر حسب Θ و F به صورت (۷) نوشته مي‌شوند. در اين صورت F بايد در معادله (۸) صدق کند. براي نشان دادن وجود جواب براي F، گوئيم ازآنجايي که Θ نسبت به r، z و t تا مرتبه ۲ روي B و$(0,t_0)$ مشتق پذير است، آنگاه طرف راست معادله (۸) به صورت تکه اي پيوسته است. با نوشتن F به صورت سري تيلور نسبت به δ و بر اساس قضيه (۲) مرجع [۲]، معادله (۸) داراي جواب است. بدين ترتيب اثبات قضيه کامل است. در ادامه با استفاده از روابط کرنش و تغييرمکان (۳) و تنش-کرنش (۲)، کرنش‌ها و تنش‌ها نيز بر حسب توابع پتانسيل F و Θ نوشته مي شوند:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= -\alpha_3 \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z},\\
\varepsilon_{\theta\theta} &= -\frac{\alpha_3}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z},\\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1+\alpha_1)\nabla_r^2 - \frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F - \frac{1}{\alpha_3 C_{1212}}\frac{\partial \Theta}{\partial z},\\
\varepsilon_{rz} &= -\frac{1}{2}\alpha_3 \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{2}\left(\alpha_2 \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} + (1+\alpha_1)\frac{\partial}{\partial r}\nabla_r^2 - \frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^3}{\partial r \partial t^2}\right)F - \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_3 C_{1212}}\frac{\partial \Theta}{\partial r},
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(C_{1111}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + C_{1122}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)F + C_{1133}\frac{\partial}{\partial z}\left((1+\alpha_1)\nabla_r^2 + \alpha_2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F - \frac{C_{1133}}{\alpha_3 C_{1212}}\frac{\partial \Theta}{\partial z},\\
\sigma_{\theta\theta} &= -\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(C_{1122}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + C_{1111}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)F + C_{1133}\frac{\partial}{\partial z}\left((1+\alpha_1)\nabla_r^2 + \alpha_2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F - \frac{C_{1133}}{\alpha_3 C_{1212}}\frac{\partial \Theta}{\partial z},\\
\sigma_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(C_{3333}(1+\alpha_1) - \alpha_3 C_{1133}\right)\nabla_r^2\right]F + \frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F - \frac{C_{3333}}{\alpha_3 C_{1212}}\frac{\partial \Theta}{\partial z},\\
\sigma_{rz} &= C_{1313}\frac{\partial}{\partial r}\left[(1+\alpha_1)\nabla_r^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]F - C_{1313}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F - \frac{C_{1313}}{\alpha_3 C_{1212}}\frac{\partial \Theta}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

جواب مسائل الا ستودينا ميک در محيط‌هاي همسان

تانسور ضرايب ارتجاعي در مواد همسان به صورت زير است:

$$\begin{aligned}
C_{1111} &= C_{3333} = 2\mu + \lambda,\\
C_{1122} &= C_{1133} = \lambda,\\
C_{1212} &= C_{1313} = \mu,
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

به طوري كه در آن λ و μ ضرايب لامه هستند. با استفاده از روابط (۱۲) مي توان نوشت:

$$\alpha_1=\alpha_3=\frac{\lambda+\mu}{\mu},\quad \alpha_2=1,\ s_0^2=s_1^2=s_2^2=1,$$
$$\delta=0.$$

(۱۳)

$$c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\qquad c_2^2=\frac{\mu}{\rho}.$$

(۱۴)

با قرار دادن روابط (۱۲) تا (۱۴) درمعادلات (۷) به نتايج زير مي‌رسيم:

$$u(r,z,t)=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^2 F(r,z,t)}{\partial r\,\partial z},$$
$$w(r,z,t)=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}$$
$$\times(\nabla_r^2+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2})F(r,z,t)$$
$$-\frac{1}{\lambda+\mu}\Theta(r,z,t),$$

(۱۵)

كه در آن $F(r,z,t)$ جواب معادله زير مي‌باشد:

$$\nabla_1^2\nabla_2^2 F(r,z,t)=\frac{-1}{\lambda+2\mu}b_z(r,z,t)$$
$$+\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)}(\nabla_r^2+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\Theta(r,z,t)$$

(۱۶)

در اين رابطه براي $\alpha=1,2$ عملگر ∇_α^2 برابر $\nabla^2-\partial^2/\left(c_\alpha^2\partial t^2\right)$ بوده و ∇^2 عملگر معمول لاپلاس در فضاي سه بعدي مي‌باشد. معادله حاكم بر Θ تغيير نكرده و همان معادله (۶) مي‌باشد. در مواد همسان روابط بين تنش و توابع پتانسيل به شكلهاي زير در مي‌آيند:

$$\varepsilon_{rr}=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^3 F}{\partial r^2\,\partial z},$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z},$$
$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\nabla_r^2-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F-\frac{1}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$
$$\varepsilon_{rz}=-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\frac{\partial^3 F}{\partial r\partial z^2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\nabla_r^2-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^3}{\partial r\partial t^2}\right)F$$
$$-\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial\Theta}{\partial r},$$

(۱۷)

$$\sigma_{rr}=\frac{\partial}{\partial z}\left(-(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)F$$
$$+\lambda\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$
$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial^2}{\partial r^2}-(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)F$$
$$+\lambda\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$
$$\sigma_{zz}=\frac{\partial}{\partial z}\left[(3\lambda+4\mu)\nabla_r^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F$$
$$-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$
$$\sigma_{rz}=\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\nabla_r^2-\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F$$
$$-\frac{1}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial r}.$$

(۱۸)

معادلات در حالت استاتيكي

در حالت الاستواستاتيک، كليه توابع مستقل از زمان بوده ودر نتيجه روابط تغييرمكان و توابع پتانسيل، به عنوان مثال، به صورت زيردر مي‌آيد:

$$u(r,z)=-\alpha_3\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z},$$
$$w(r,z)=(1+\alpha_1)(\nabla_r^2+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial z^2})F$$
$$-\frac{1}{\alpha_3 C_{1212}}\Theta.$$

(۱۹)

در اين حالت توابع پتانسيل $F(r,z)$ و $\Theta(r,z)$ به ترتيب جواب‌هاي معادلات (۲۰) و (۲۱) مي باشند:

$$\frac{\partial^2\Theta(r,z)}{\partial r\,\partial z}=b_r(r,z),$$

(۲۰)

$$\nabla_{1s}^2\nabla_{2s}^2 F(r,z)=\frac{-1}{\alpha_2(1+\alpha_1)}\frac{b_z(r,z)}{C_{1212}}$$
$$+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3 C_{1111}}(\nabla_r^2+\frac{C_{3333}}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial z^2})\Theta(r,z),$$

(۲۱)

كه در آن عملگر $\nabla_{\alpha s}^2$ براي $\alpha=1,2$ به صورت $\nabla_r^2+\frac{\partial^2}{s_\alpha^2\partial z^2}$ درمي آيد.

براساس تابع پتانسيل نيوتني، كامل بودن جواب (۲۰) به آساني اثبات مي شود [3, Claim4].

براي در اختيار داشتن كرنش ها وتنش ها بر حسب توابـع پتانسـيل F و Θ، كـافي اسـت كـه بـا جـايگزيني $F(r,z,t)$ و $\Theta(r,z,t)$ بـه ترتيـب بـا $F(r,z)$ و $\Theta(r,z)$ در روابط (۱۰) و (۱۱)، ازآنها استفاده شود.

جواب‌هاي استاتيكي در مصالح همسان

به منظـور بدسـت آوردن جـواب معـادلات ناويـه در حالت استاتيكي در مصالح همسان، مي‌توان بـا اسـتفاده از معادلات (۱۲) تا (۱۴) و (۱۹) شروع كرد تا جـواب زيـر را به دست آورد:

$$u(r,z) = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z},$$
$$w(r,z) = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}(\nabla_r^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2})F - \frac{1}{\lambda+\mu}\Theta.$$
(۲۲)

در ايـن حالـت توابـع $F(r,z)$ و $\Theta(r,z)$ بـه ترتيـب جواب‌هاي معادلات (۲۳) و (۲۴) هستند:

$$\frac{\partial^2 \Theta(r,z)}{\partial r\, \partial z} = b_r(r,z)$$
(۲۳)

$$\nabla^2\nabla^2 F(r,z) = \frac{-1}{\lambda+2\mu}b_z(r,z)$$
$$+\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)}(\nabla_r^2 + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2})\Theta(r,z),$$
(۲۴)

كه در آن ∇^2 عملگر معمول لاپـلاس در حالـت ۳ بعـدي است. به طور مشابه، مي توان از معادلات (۱۵) شروع كـرد و با حذف مشتقات نسبت به زمان به جـواب (۲۲) رسـيد. به منظور نشان دادن اينكه معادلات (۲۲) تا (۲۴) برروابط داده شده به وسيله Simmonds منطبق است، كافي اسـت كه ضرايب لامـه، λ و μ، برحسـب ضـرايب E و ν بـه ترتيـب بـه شـكل $\nu E/(1+\nu)(1-2\nu)$ و $E/2(1+\nu)$ جايگزين شوند. در اين صورت داريم:

$$u(r,z) = -\frac{1}{(1-2\nu)}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z},$$
$$w(r,z) = \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}\nabla_r^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\Theta.$$
(۲۵)

$$\nabla^2\nabla^2 F(r,z) = \frac{-(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}b_z(r,z)$$
$$+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)^2}{E(1-\nu)}(\nabla_r^2 + \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}\frac{\partial^2}{\partial z^2})\Theta(r,z),$$
(۲۶)

معـــادلات (۲۵) و (۲۶) بـــا شـــرط جـــايگزيني F با $(1-2\nu)(1+\nu)F_{Love}/E$ دقيقاً همان معادلاتي است كه به وسيله Simmonds [۱۳] ارائه شده اسـت. لازم بـه توضيح است كه در اينجا F_{Love} تابع كرنشي لاو مي باشد.

عملكرد تابع پتانسيل

توابع پتانسيل ارائه شده در اينجا همچون توابـع ارائـه شده در مرجع [۲] براي محيط‌هاي ايزوتروپ جانبي بـوده و همانند بسياري از توابع ارائه شده بـراي مـواد ايزوتـروپ (توابع گالركين، توابع نـوبر-پـاپكويچ، توابـع بوسينسـك و توابع هلمهولتز-لامه [۵]) براي جداسازي معادلات درگيـر حركت به كار مي‌آيد. استفاده از روش توابـع پتانسـيل بـه دليل كارآيي بالاي آن در حل مسائل تحليلي [۵] در حـل بسياري از مسائل (مسائل كلوين، بوسينسك، سـروتي چـه در حالت استاتيكي و چه در حالت ديناميكي) به كار رفتـه است [۹]. توابع پتانسـيل ارائـه شـده در [۲] نيـز در حـل برخي از مسائل انتشار امواج به كار رفتـه اسـت [۱۲]. هـر روش ديگر مانند روش اجزاء محدود علي‌رغم كارايي بسيار زيـاد آن بـه حـل تقريبـي مـي‌انجامـد و افـزايش دقـت جواب‌هاي آن، به خصوص در مسائل انتشار امواج، نيـاز بـه ايده‌هاي خاص دارد. نويسنده بر آن است تا از توابـع ارائـه شده در اين مقاله براي حل تحليلي برخي از مسائل انتشار امواج به كمك سانتريفيوژ استفاده نمايد.

نتيجه گيري

در چارچوب مواد گرين، موادي كه وجود تـابع انـرژي براي آنها مسـلم اسـت، جـواب معـادلات الاسـتوديناميک (معادلات مـوج) ومعـادلات الاستواسـتاتيک بـراي مسـائل متقارن محوري و بـدون پـيچش در حـالتي كـه نيروهـاي حجمي هم در جهت محور تقارن مـواد همسـان جـانبي و هم عمود بر آن غير صفر است، ارائه شده است. جوابهـا بـر حسب دو تابع پتانسيل ارائه شده‌اند، بـه طـوري كـه آنهـا جواب‌هاي معـادلات ديفرانسـيل بـا مشـتقات جزيـي غيـر همگن مي‌باشند. يكي از اين معـادلات بسـيار سـاده و بـر حسب نيروي حجمي عمود بر محـور تقـارن مـواد نوشـته مي‌شود وديگري معادلات مـوج تكـراري در مـواد همسـان جانبي مي‌باشد. كامل بودن جواب منوط به محـدب بـودن دامنه مسئله نسبت به محورهاي موازي محور تقارن مـواد مي‌باشد[۲]. جواب ارائـه شـده در اينجـا در حالـت سـاده

مسائل الاستو استاتيک در مصالح به جواب Simmonds [۱۴] همگرا مي‌شود که خود گسترش يافته جواب لاو مي‌باشد.

تشکر و قدرداني

نويسنده بر خود لازم ميداند که از همکاري‌هاي جانبي آقاي مهندس عزيزا... اردشير بهرستاقي دانشجوي کارشناسي ارشد رشته سازه دانشگاه علوم و فنون مازندران تشکر نمايد.

مراجع

1 - Elliott, H. A. (1948). "Three dimensional stress distribution in hexagonal aeolotropic crystals." *Proc. Camb. Phil. Soc.,* Vol. 44, PP. 522-533.

2 - Eskandari-Ghadi, M. (2005). "A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media." *Journal of Elasticity,* Vol. 81, PP.1-19.

3 - Eskandari-Ghadi, M. and Pak, R. Y. S. (2006). *Elastodynamics and Elastostatics by a Unified Method of Potentials*, Submitted to the Journal of Elasticity on June.

4 - Eubanks, R. A. and Sternberg, E. (1954). "On the axisymmetric problem of elasticity theory for a medium with transverse isotropy." *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 3, PP. 89-101.

5 - Gurtin, M. E. (1972). "The linear theory of elasticity." *In S.* Flügge *(ed.), Handbuch der Physik*, Vol. Via/2, Mechanics of Solids II, ed C. Truesdell, PP. 1-295. Springer, Berlin.

6 - Hu, H. C. (1953). "On the three dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body." *Sci., Sinica,* Vol. 2, PP. 145-151.

7 - Kellogg, O. D. (1953). *Foundation of Potential Theory*, Dover Publications Inc.

8 - Lekhnitskii, S. G.(1981). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir, Moscow .

9 - Love, A. E. H. (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, New York, Dover Publications.

10 - Michell, J. H. (1900). "The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary." *Proceeding of the London Mathematical Society*, Vol. 32, PP. 247-258.

11 - Nowacki, W. (1954). "The stress function in three dimensional problems concerning an elastic body characterized by transversely isotropy." *Bull. Acad. Polon. Sci*., Vol. 2, PP. 21-25.

12 - Rahimian, M., Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y. S. and Khojasteh, A. (2007). "An elastodynamic potential method for a transversely isotropic solid." *ASCE Mech. Dev*. (in press).

13 - Rajapakse, R. K. N. D. and Wang, Y. (1993). "Greens functions for transversely isotropic elastic half-space." *J. Eng. Mech*., Vol. 119, No. 9, PP. 1724-1746.

14 - Simmonds, J. G. (2000). "Love's stress function for torsionless axisymmetric deformation of elastically isotropic bodies with body forces." *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 67, PP. 628-629.

15 - Sternberg, E. (1960). "On the integration of the equation of motion in the classical theory of elasticity." *Arch. Ration. Mech. Anal.,* Vol. 6, PP. 34-50.

16 - Sternberg, E. and Eubanks, R. A. (1957). "On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation." *Quarterly of Applied Mathematics,* Vol. 15, PP. 149-153.

17 - Sternberg, E. and Gurtin, M. E. (1962). "On the completeness of certain stress functions in the linear theory of elasticity." *Proc. Forth U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, PP. 793-797.

18 - Stippes, M. (1962). "Completeness of papkovich potentials." *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 26, PP. 477-483.

19 - Truesdell, C. (1959). "Invariant and complete stress functions for general continua." *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Vol. 4, PP. 1-29.

20 - Wang, M. Z. and Wang, W. (1995). "Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity." *Int. J. Solids Struct.,* Vol. 32 No. 374, PP. 501-513.

واژه هاي انگليسي به ترتيب استفاده در متن

1 - Anisotropic
2 - Transversely isotropic