مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۴، شماره ۱، ۱۳۸۷، صفحهٔ ۸۹– ۱۰۸

مقایسه روش‌های پایدارسازی مستقیم و تکراری در پایدارسازی مسئلهٔ انتقال به سمت پایین تعیین ژئوئید

عبدالرضا صفری[1*] و یحیی الله‌توکلی[2]

[1] استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری و قطب علمی مهندسی نقشه‌برداری و مقابله با سوانح طبیعی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران
دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۵/۱۱/۱۱ ، پذیرش نهایی: ۸۶/۱۰/۲۵)

چکیده

مسئله انتقال به‌سمت پایین میدان گرانی زمین از سطح زمین به سطح بیضوی مرجع مقایسه از این واقعیت ناشی می‌شود که در مسئله مقدار مرزی، تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس به‌دنبال پتانسیل واقعی زمین روی سطح بیضوی مرجع هستیم این در حالی است که مشاهدات شتاب گرانی روی سطح زمین داده شده است. مسئله انتقال به‌سمت پایین میدان گرانش زمین از طریق انتگرال آبل– پواسون و مشتقات آن صورت پذیرفته و یک مسئله بدوضع است. برای به‌دست آوردن یک جواب پایدار بایستی از روش‌های پایدارسازی استفاده کرد. در این مقاله روش‌های متفاوت پایدارسازی مستقیم و تکراری برای انتقال به‌سمت پایین مشاهدات از نوع شتاب گرانی تفاضلی مقایسه و روش تکراری ART به‌مثابهٔ بهترین روش برای پایدارسازی معرفی شده است.

واژه‌های کلیدی: محاسبه ژئوئید، مسئله انتقال به‌سمت پایین، انتگرال آبل– پواسون، روش‌های پایدارسازی

A Comparison of direct and indirect regularization methods for downward continuation problem of geoid computations without applying Stokes formula

Safari, A[1]. and Allahtavakoli, Y[2].

[1]*Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Center of Excellence in Surveying Engineering and Disaster Management, University College of Engineering, University of Tehran, Iran*
[2]*M.S. student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University of Tehran, Iran*

(Received: 31 Jan 2007 , Accepted: 15 Jan 2008)

Abstract

The problem of downward continuation of the gravity field from the Earth's surface to the reference ellipsoid arises from the fact that the solution to the boundary value problem for geoid determination without applying Stokes formula is sought in terms of the disturbing potential $\delta W^L(X)$ on the ellipsoid but the disturbing gravity observations $\delta\Gamma(X)$ are only available on the Earth's surface. Downward continuation is achieved via Abel-Poisson integral and its derivatives. Using discrete observations, the Abel-Poisson integral has to be transformed into a summation form:

$$b = Ax, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n \qquad (1)$$

*نگارنده رابط: تلفن: ۸۸۰۰۸۸۴۱-۰۲۱ دورنگار: ۸۸۰۰۸۸۳۷-۰۲۱ E-mail: asafari@ut.ac.ir

Where the matrix A is the design matrix and b stands for the disturbing gravity observations vector. The downward continuation problem is an inverse problem. Inverse problems are ill-posed, like any ill-posed problem it must be regularized. The objective of this paper is the comparison between direct and iterative methods for solving downward continuation of the gravity field from the Earth's surface to the reference ellipsoid for geoid determination without applying Stokes formula.

Direct regularization methods are methods where the solution is directly derived. In this contribution truncated method, standard Tikhonov method and generalized Tikhonov method using discretized norms at Sobolov subspaces $W_2^1(a,b)$, $W_2^2(a,b)$ and Sobolov semi norms $\|L^1\|_2$ and $\|L^1\|_2$ are implemented. Based on SVD, in truncated methods, the solution can be obtained as:

$$x_\lambda^{Reg} = \sum_{i=1}^{r_\lambda} \frac{\langle u_i, b\rangle}{\sigma_i} v_i \tag{2}$$

Where u_i and v_i are the right and the left singular vectors, respectively. r_λ is rank of matrix A_λ that is a L2 norm approximation for matrix A. In the case of TGSVD the solution is obtained as

$$x_\lambda^{Reg} = \sum_{i=p-r_\lambda+1}^{p} \frac{\langle u_i, b\rangle}{\sigma_i} x_i + \sum_{i=p+1}^{n} \langle u_i, b\rangle x_i \tag{3}$$

In standard Tikhonov method, the minimizing function can be written as:

$$F_{Tikhonov}(x;\lambda) = \|Ax-b\|_2^2 + \lambda\|x\|_2^2 \tag{4}$$

In this method, filter coefficients and solution become:

$$f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2+\lambda}$$
$$x_\lambda^{Reg} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i \tag{5}$$

In standard Tikhonov method, the matrix L was I_{nn}. In generalized Tikhonov method, we select the matrix L as follows

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_s L^s \\ \vdots \\ \alpha_1 L^1 \\ \alpha_0 L^0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Where the $\{L^i\}, i = 1,2,\ldots,s$ is obtained from discretization of derivative operators up to order s and coefficients $\{\alpha_i\}$, $i = 1,\ldots,s$ are weight coefficients.

In contrast to direct methods, in iterative methods, normal equations are solved via construction of a sequence of the solutions that converge to the pseudo-inverse solution of the equations. In this contribution classical iterative method, Landweber-Fridman method, Tikhonov iterative method, Algebraic Reconstruction Technique (ART), conjugate gradient method and LSQR method are implemented.

Classical iterative methods are based on construction of sequences of solutions $\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}, ...\right\}$. For the matrix equation $Ax = b$, The following relationship holds between solution $x^{(k)}$ and solution $x^{(k+1)}$:

$$x^{(k+1)} = \left(I - Q^{-1}A^T A\right)x^{(k)} + A^T b \tag{7}$$

In Landweber-Fridman method the matrix Q^{-1} is equal to diagonal matrix ωI. Ergo, in this method, iterative relation between the solutions is defined as:

$$x^{(k+1)} = (I - \omega A^T A)x^{(k)} + \omega A^T b \tag{8}$$

In Tikhonov iterative method, iterative relation between the solutions is defined as:

$$x^{(k+1)} = \left(A^T A + \lambda I\right)^{-1} (A^T b + \lambda x^{(k)}) \tag{9}$$

The idea of Algebraic Reconstruction Technique iteration to solve the matrix equation $Ax = b$ is to partition the system row wise, either into single rows or into blocks of rows. Each of these rows defines a hyper plane of dimension $n-1$. The idea of the ART iteration is to project the current approximate solution successively onto each one these hyper planes. It turns out that such a procedure converges to the solution of the system.

A best known method for solving large scale equations system is conjugate gradient. Conjugate gradient is a type of Krylov subspace method. Conjugate gradient method is suitable for positive definite operators.

In LSQR method, solution vector is defined as follows:

$$x^{(k)}_{\{LSQR\}} = \beta_1 V_k B_k e_1^{(k+1)} \tag{10}$$

Where right vectors V_k can be found in Hansen (1998) and B_k is a bidiagonal matrix with α_i and β_i on the main diagonals and $e_1^{(k+1)} = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

For comparison of different regularization methods and the selection of the best method based on Abel-Poisson integral and Iran topography conditions, first, we solve the problem by doing a simulated problem. To compare different regularization methods, we used relative errors defined as:

$$\text{Relative Error} = \frac{\left\|x^{exact} - x^{reg}\right\|_2}{\left\|x^{exact}\right\|_2} \tag{11}$$

Where x^{exact} comes directly from simulation and x^{reg} comes from solving the problem via aforementioned methods. Based on our results, ART method is the best suited method for downward continuation problem at geoid computations without appling Stokes formula. Finally, ART method was applied for real gravity modulus for geoid computations in geographical region of Iran.

Key words: Geoid computation, Downward continuation problem, Abel-Poisson integral, Regularization methods

۱ مقدمه

مسئله انتقال به‌سمت پایین میدان گرانی زمین از سطح زمین به سطح بیضوی مرجع مقایسه از این واقعیت ناشی می‌شود که در مسئله مقدار مرزی تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس به‌دنبال پتانسیل واقعی زمین روی سطح بیضوی مرجع هستیم این در حالی است که مشاهدات شتاب گرانی روی سطح زمین داده شده است (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۴؛ صفری، ۲۰۰۴ و صفری و همکاران، ۲۰۰۵). در این مقاله فرض می‌شود که شتاب گرانی روی سطح زمین داده شده و هدف تعیین پتانسیل گرانشی تفاضلی روی سطح بیضوی است. پس از هارمونیک‌سازی مشاهدات شتاب گرانی، کمیت شتاب گرانشی تفاضلی $\delta\Gamma(x)$ به‌دست می‌آید. در فضای خارج بیضوی مرجع مقادیر مرزی $\delta\Gamma(x)$ در انتگرال آبل- پواسون صدق می‌کنند. این انتگرال آبل- پواسون بیضوی به‌عنوان یک معادله مشاهده به‌کار می‌رود. با داشتن مقادیر تفاضلی شتاب گرانی می‌توان از راه انتگرال آبل- پواسون بیضوی، پتانسیل گرانی تفاضلی $\delta W(\boldsymbol{X})$ را روی بیضوی مرجع $\mathbb{E}^2_{a,b}$ به‌دست آورد. در جدول ۱ انتگرال آبل- پواسون بیضوی برای اندازهٔ شتاب گرانی تفاضلی ارائه گردیده است.

در جدول ۱، $\{\Gamma_\lambda, \Gamma_\phi, \Gamma_\eta\}$ سه مولفهٔ بردار شتاب گرانی مرجع $\boldsymbol{\Gamma}$ برحسب دستگاه مختصات منحنی‌الخط بیضوی ژاکوبی با مولفه‌های $\{\lambda, \phi, \eta\}$ بوده، $\varpi(\phi')$ تابع وزن است که موجب تعامد هارمونیک‌های بیضوی روی بیضوی مرجع می‌شود. $S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}$ مساحت سطح بیضوی مرجع $\mathbf{E}^2_{a,b}$، و $\{g_{\lambda\lambda}, g_{\phi\phi}, g_{\eta\eta}\}$ مؤلفه‌های تنسور متریک دستگاه مختصات منحنی‌الخط بیضوی ژاکوبی است. K^L کرنل تغییر یافتهٔ انتگرال آبل- پواسون پس از حذف میدان مرجع است. اندیس بالای L در اینجا نشان‌دهندهٔ درجهٔ و مرتبهٔ ماکزیمم بسط هارمونیک‌های بیضوی به‌کار رفته در میدان مرجع است که با توجه به حذف آن از روی مشاهدات لازم است این اثر از روی کرنل نیز حذف شود و بدین طریق کرنل تغییر شکل یافتهٔ K^L به‌دست بیاید. برای جزئیات بیشتر به صفری (۲۰۰۴) مراجعه شود. $\{a, b, \varepsilon\}$ به ترتیب نیم‌قطر اطول، نیم قطر اقصر و خروج از مرکز خطی بیضوی مرجع $\mathbf{E}^2_{a,b}$ می‌باشد. $\Delta\lambda'\Delta\phi'$ المان سطحی انتگرال آبل پواسون پس از گسسته‌سازی و بیانگر قدرت تفکیک انتگرال‌گیری نیز هست. $i\max$ و $j\max$ نیز حد بالای شبکهٔ انتگرال‌گیری پس از گسسته‌سازی را روی بیضوی مرجع نشان می‌دهند.

معادلهٔ انتگرالی آبل- پواسون بیضوی یک معادلهٔ انتگرالی فردهولم نوع اول است (صفری، ۲۰۰۴). معادلات انتگرالی فردهولم نوع اول به‌صورت مسائلی بدوضع هستند. با توجه به اینکه مشاهدات در سطح زمین به‌صورت گسسته است بنابراین معادلات انتگرال آبل- پواسون را بایستی به‌شکل گسسته درآورد (جدول ۱).

این معادلهٔ انتگرالی بعد از گسسته‌سازی، به فرم عمومی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} A : \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{b} = A \cdot \boldsymbol{x} \\ A \in \mathbb{R}^{n\times u}; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{u\times 1}; \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^u$ فضای اعداد حقیقی است. ماتریس A و بردار $\boldsymbol{b}$ (بردار $\delta\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x})$)، معلوم و هدف یافتن بردار $\boldsymbol{x}$ (بردار $\delta\boldsymbol{W}(\boldsymbol{X})$)، است (هانسن، ۱۹۹۲).

از نظر ریاضیات محض بعد از گسسته ساختن، مسئله دارای بعد متناهی می‌شود و لذا مسئله دیگر بدوضع نخواهد بود. ولی بعد از گسسته ساختن معادله پیوسته بد وضع، این مسائل گسسته دارای ویژگی‌هایی شبیه مسائل بدوضع است، به‌نحوی‌که به خطاهای دارای بسامد زیاد، حساس هستند. لذا طبیعی است که آنها را مسائل بدوضع

گسسته (discrete ill-posed problems) بنامیم (هانسن، ۱۹۹۲). گرچه گسسته کردن معادلات انتگرال پیوسته بسته به اندازه خاص شبکه، دقت رایانه و ارتفاع نقطه تا سطح بیضوی مرجع را می‌توان یک نوع پایدارسازی تلقی کرد ولی در عمل این پایدارسازی کافی نیست چرا که خطا (نویز) در داده ها تقویت می‌شود (صفری، ۲۰۰۴). ولی بعد از گسسته‌سازی معادلهٔ پیوسته بدوضع، درصورتی‌که معادلهٔ گسسته دارای دو ویژگی زیر باشد، آن را معادلهٔ بدوضعِ گسسته می‌نامند:

۱. مقادیر منفرد ماتریس ضرائب A تدریجاً به‌سمت صفر میل کند.
۲. نسبت بزرگ‌ترین مقدار ویژه به کوچک‌ترین مقدار ویژه غیر صفر ماتریس ضرائب A (عدد شرط ماتریس A) خیلی بزرگ باشد.

جدول ۱. انتگرال آبل- پواسون بیضوی برای شتاب گرانی تفاضلی.

معادله انتگرال در شکل پیوسته:

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma(x) &= \left\langle e_\Gamma \mid \delta\boldsymbol{\Gamma}(x)\right\rangle + \mathcal{O}\left(\delta\Gamma^2(x)\right)\\
e_\Gamma &= \frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2} e_\lambda + \frac{\Gamma_\phi}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2} e_\phi + \frac{\Gamma_\eta}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2} e_\eta \quad ; \quad \delta\boldsymbol{\Gamma}(x) = \delta\Gamma_\lambda e_\lambda + \delta\Gamma_\phi e_\phi + \delta\Gamma_\eta e_\eta\\
\delta\Gamma(x) &= \frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\delta\Gamma_\lambda + \frac{\Gamma_\phi}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\delta\Gamma_\phi + \frac{\Gamma_\eta}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\delta\Gamma_\eta\\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\oint\!\!\oint_{\mathbb{E}^2_{a,b}} ds'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\lambda}\delta W^L(\lambda',\phi')\\
&+\frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\Gamma_\phi}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\oint\!\!\oint_{\mathbb{E}^2_{a,b}} ds'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\phi}\delta W^L(\lambda',\phi')\\
&+\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}\frac{\Gamma_\eta}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\oint\!\!\oint_{\mathbb{E}^2_{a,b}} ds'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\eta}\delta W^L(\lambda',\phi')
\end{aligned}
$$

معادله انتگرال در شکل گسسته:

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma(x) &= \gamma(x) - \Gamma(x) = \left\langle \boldsymbol{e}_\Gamma \mid \delta\boldsymbol{\Gamma}(x)\right\rangle\\
&= \Bigg(\frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{j\max} a\sqrt{b^2+\varepsilon^2\sin^2\phi_{ij}}\cos\phi_{ij}\\
&\times\Delta\lambda'\Delta\phi'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\lambda}\\
&+\frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{j\max} a\sqrt{b^2+\varepsilon^2\sin^2\phi_{ij}}\cos\phi_{ij}\\
&\times\Delta\lambda'\Delta\phi'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\phi}\\
&+\frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{j\max} a\sqrt{b^2+\varepsilon^2\sin^2\phi_{ij}}\cos\phi_{ij}\\
&\times\Delta\lambda'\Delta\phi'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\eta}\Bigg)\delta W^L(\lambda',\phi')
\end{aligned}
$$

همان‌طورکه گفته شد دستگاه معادلات بیان شده با رابطه (۱) بدوضع است. این بدان معنا است که روش‌های عددی کلاسیک نظیر تجزیهٔ چولسکی، تجزیهٔ LU، تجزیهٔ QR و ... توانایی برآورد جواب معنی‌داری برای دستگاه معادله (۱) در حالت گسسته را ندارد. اما با به‌کاربردن روش‌های مختلف پایدارسازی، می‌توان جواب پایداری را برای دستگاه معادلات به‌دست آورد (هانسن، ۱۹۹۲).

جواب کمترین مربعات دستگاه معادلات خطی، فقط با اعمال شرط مینیموم نرم قابل دستیابی است.

$$\begin{cases} Ax = b \\ b = b^{exact} + e \\ A \in \mathbb{R}^{n\times u}\,; b \in \mathbb{R}^{n\times 1}\,; x \in \mathbb{R}^{u\times 1} \\ \min\limits_{x} \left\| Ax - b \right\|_2^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_{LS} = \left(A^t A\right)^{-1} A^t b = A^+ b \qquad (۲)$$
$$A^+ = \left(A^t A\right)^{-1} A^t$$

ولی به‌دلیل بدوضع بودن ماتریس A و وجود نویزهای ناشی از خطی‌سازی مدل، گسسته‌سازی معادلات مشاهدات انتگرالی و نویزهای موجود در مشاهدات تفاضلی و مانند آن، جواب حاصل از فرایند کم‌ترین مربعات، کراندار نخواهد شد.

تجزیهٔ مقادیر منفرد، ابزاری بسیار مناسب برای آنالیز ماتریس ضرایب A است (Singular Value Decomposition (SVD)) (هانسن، ۱۹۹۲). این تجزیهٔ برای بررسی تأثیر نویزهای موجود در مشاهدات برروی جواب حاصل از کم‌ترین مربعات مفید است (لاسون و هنسون، ۱۹۷۴). تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به صورت زیر خواهد بود:

$$A_{mn} = U_{mm}\Sigma_{mn}V_{nn}^{T} = \sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i v_i^T \qquad (۳)$$

در معادله فوق $U_{mm} = (u_1, u_2, ..., u_m)$ و $V_{nn} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس‌ها ستون‌های ارتونرمال دارند. ستون‌های ماتریس‌های U و V را به ترتیب بردارهای منفرد چپ و راست ماتریس A می‌نامند. عضوهای قطر اصلی ماتریس Σ_{mn} غیر منفی و دارای ترتیب زیرند:

$$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge ... \ge \sigma_n \ge 0$$

مقادیر قطر اصلی Σ، مقادیر منفرد ماتریس A و نسبت σ_1/σ_n عدد شرط (condition number) ماتریس A نامیده می‌شود. جواب دستگاه معادله (۲) بر اساس تجزیه مقادیر منفرد به‌صورت زیر است:

$$x_{LS} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i \qquad (۴)$$

تجزیهٔ SVD بیان می‌کند که روش‌های عددی کلاسیک از قبیل تجزیه LU، QR و مانند آن، برای جهت محاسبه جواب عددی دستگاه معادلات انتگرالی فردهولم نوع اول ناتوان‌اند. چراکه عدد شرط ماتریس A آنقدر بزرگ است که فقط وجود خطاهای گرد کردن مانع از حصول جواب عددی صحیح برای دستگاه معادلات می‌شود (هانسن، ۲۰۰۱).

علاوه بر این، دستگاه معادلات گسستهٔ به‌دلیل وجود خطاهای گسسته‌سازی و یا خطای تقریب خطی همواره دارای اغتشاش است و بدین ترتیب مؤلفه‌های خطا در امتداد همهٔ بردارهای منفرد ماتریس A ایجاد می‌شود (هانسن، ۱۹۹۲). بنابراین به‌دلیل وجود خطا در بردارهای منفرد، نمی‌توان جوابی پایدار برای x به‌دست آورد.

طبق رابطه (۴) خطاهای موجود در بردار b با ضریب $1/\sigma_i$ تقویت می‌شوند (شوارتز، ۱۹۷۹). در صورتی‌که σ_i خیلی نزدیک صفر باشد، آنگاه خطای موجود در بردار b، جواب را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

$$\begin{aligned} b &= b^{exact} + e \quad ; \left\| b^{exact} \right\|_2 > \left\| e \right\|_2 \\ x_{LS} &= \left(V\Sigma U^T U \Sigma V^T\right)^{-1} V\Sigma U^T b \\ &= \left(V\Sigma^2 V^T\right)^{-1} V\Sigma U^T b \\ &= V\Sigma^{-1}U^T b \\ &= V\Sigma^{-1}U^T b^{exact} + V\Sigma^{-1}U^T e \\ &= x^{exact} + x_e \end{aligned} \qquad (۵)$$

که در رابطه فوق $x^{exact} = V\Sigma^{-1}U^{T}b^{exact}$ و $x_e = V\Sigma^{-1}U^{T}e$ است. به دلیل وجود Σ^{-1} در صورتی‌که مقادیر منفرد به سمت صفر میل کنند، جمله x_e بر جواب واقعی غالب می‌شود.

لازم به‌ذکر است که درصورتی‌که ماتریس A ماتریسی بدوضع باشد، در مسئله مستقیم یعنی تعیین بردار b با معلوم بودن ماتریس A و بردار x، بردار b به‌دست آمده از Ax فاقد بسامدهای زیاد خواهد بود.

$$A = U\Sigma V^{T} \Rightarrow Ax = U\Sigma V^{T}x = b \qquad (۶)$$

زیرا به‌دلیل میل مقادیر منفرد ماتریس A به سمت صفر، بسامدهای زیاد موجود در بردار x با ماتریس Σ فیلتر می‌شوند (هانسن، ۲۰۰۱).

با استفاده از SVD جواب کم‌ترین مربعات دستگاه معادله (۲) با رابطه (۴) بیان شد. رابطه (۴) به‌وضوح نشان‌دهنده مشکلات موجود است. همان‌طوری‌که در رابطه (۴) دیده می‌شود، ضرایب فوریه $\left|u_i^{T}b\right|$ متناظر با مقادیر منفرد کوچک با سرعت کم‌تری به‌سمت صفر میل می‌کنند لذا جواب x_{LS} تحت‌الشعاع جملات متناظر با مقادیر منفرد کوچک قرار می‌گیرد. هدف از پایدارسازی کاستن یا حذف جواب متناظر با مقادیر منفرد کوچک است. حاصل روش‌های پایدارسازی جوابی پایدار x_{reg} است که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

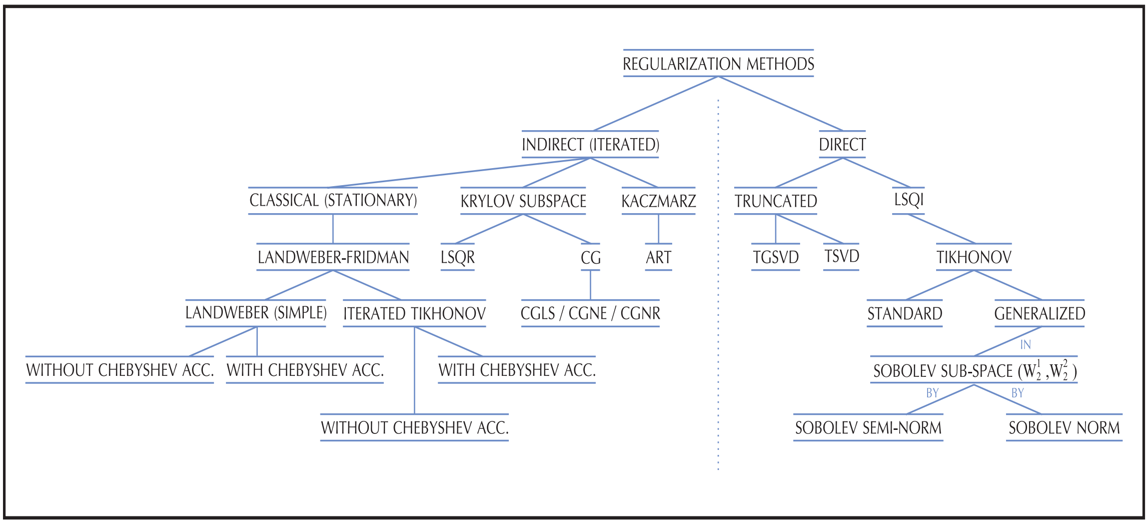
$$x_{reg} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{u_i^{T}b}{\sigma_i} v_i \qquad (۷)$$

ضرایب f_i را ضرایب فیلتر می‌نامند (هانسن، ۲۰۰۱). این ضرایب برای روش‌های پایدارسازی گوناگون، متفاوت است. برای بعضی از روش‌ها فرمول‌های صریحی برای محاسبه ضرایب فیلتر وجود دارد درحالی‌که برای بعضی دیگر فرمول‌های صریحی موجود نیست.

روش‌های گوناگون پایدارسازی را می‌توان در دو دسته زیر قرار داد (هانسن، ۱۹۹۶) (شکل ۱):

۱. روش‌های پایدارسازی مستقیم

۲. روش‌های پایدارسازی غیرمستقیم (روش‌های تکراری)



شکل ۱. روش‌های پایدارسازی مستقیم و تکراری.

از جمله بررسی صورت گرفته در خصوص مسئله پایدارسازی، مسئله انتقال به سمت پایین در تعیین ژئوئید بدون استفاده از روش استوکس، می‌توان به (صفری، ۲۰۰۴؛ اردلان و همکاران، a,b,c۲۰۰۶؛ صفری و الله‌توکلی، ۲۰۰۷) اشاره کرد. در این مقاله هدف مقایسه روش‌های گوناگون پایدارسازی مستقیم و تکراری برای تعیین بهترین روش پایدارسازی مسئله انتقال به‌سمت پایین است. بنابراین ابتدا بخش ۲ به معرفی روش‌های پایدارسازی مستقیم می‌پردازد و در بخش ۳ روش‌های پایدارسازی تکراری معرفی می‌شود. در بخش ۴ به‌منظور مقایسه روش‌های گوناگون درحکم بررسی موردی به مسئله انتقال به‌سمت پایین در تعیین ژئوئید در منطقه ایران پرداخته شده است. در بخش ۵ نیز بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲ روش‌های پایدارسازی مستقیم

روش‌های پایدارسازی مستقیم الگوریتمی است که جواب از راه محاسبه، مستقیماً استخراج می‌شود (صفری، ۲۰۰۴). از جمله مهم‌ترین این روش‌ها می‌توان به روش‌های منقطع (Trancated) و روش‌های تیخونوف استاندارد و روش تیخونوف تعمیم یافته با استفاده از نرم‌های گسسته شده زیر فضاهای سوبولف $W_2^1(a,b)$، $W_2^2(a,b)$ و نیم‌نرم‌های اول و دوم سوبولف ($\|L^1\|_2$ و $\|L^1\|_2$) اشاره کرد.

۲-۱ روش‌های منقطع

همان‌گونه که می‌دانیم، به تعداد ستون‌های مستقل ماتریس A رتبه ماتریس گفته می‌شود و از طرفی دیگر رتبه ماتریس A برابر تعداد مقادیر منفرد مثبت آن است. در عمل غالباً این تعریف مفید واقع نمی‌شود زیرا این امکان وجود دارد که ستون‌های ماتریس A از نقطه‌نظر ریاضی مستقل باشند اما به سبب حضور خطاهایی همچون: خطاهای ناشی از تقریب، گسسته‌سازی و خصوصاً خطاهای ناشی از گردکردن از جنبهٔ عددی وابسته شوند (هانسن، ۱۹۹۶). به‌عبارت دیگر در مسائل بدوضع گسسته ماتریس A از دیدگاه ریاضی کمبود رتبه ندارد اما در عوض دارای کمبود رتبه عددی است، پس می‌بایست یک و یا چند مقدار منفرد بسیار کوچک در تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A وجود داشته باشد. حضور این مقادیر منفرد کوچک می‌تواند سبب افزایش تأثیر خطای موجود در ضرایب فوریه مشاهدات ($\left\{u_i^T b\right\}$) در برآورد ضرایب فوریه مجهولات ($u_i^T b/\sigma_i$) شود. در این راستا یک روش پایدارسازی ارائه می‌شود که در آن یک ماتریس $A_{\lambda\geq 0}$ جایگزین ماتریس A می‌شود. با به‌کارگیری این ماتریس سعی بر آن است که تا حد امکان از تأثیر مقادیر منفرد کوچک کاسته شود. لذا این ماتریس همان ماتریس بدوضع گسسته A است که در آن به‌جای مقادیر منفرد کوچک $\left\{\sigma_{r_\lambda}, \sigma_{r_\lambda+1}, \ldots, \sigma_n\right\}$ صفر جایگزین شده است (هانسن، ۲۰۰۱). یعنی:

$$\begin{cases} A_\lambda = \sum_{i=1}^{r_\lambda} u_i \sigma_i v_i^T, \lambda \geq 0 \Rightarrow A_\lambda x = b \\ A_\lambda \to A \end{cases} \tag{۸}$$

و سپس به روش کم‌ترین مربعات مجهولات برآورد می‌شوند. در رابطه فوق r_λ رتبه ماتریس A_λ که است که یک تقریب نرم ۲ برای ماتریس A است (هانسن، ۲۰۰۱). برحسب تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A_λ جواب پایدارشده x_λ^{Reg} به صورت زیر است (هانسن، ۱۹۹۶):

$$x_\lambda^{Reg} = \sum_{i=1}^{r_\lambda} \frac{\langle u_i, b\rangle}{\sigma_i} v_i \tag{۹}$$

روش فوق موسوم به روش پایدارسازی "تجزیه مقادیر منفرد منقطع (Truncated Singular Value

(Decomposition (TSVD" است و با توجه به روابط بالا می‌توان دید که راهبرد تعریف شده در بالا، همهٔ خصوصیات ذکر شده برای راهبرد پایدارسازی در بخش قبل را داراست.

اگر روش پایدارسازی فوق با استفاده از ابزار تجزیه مقادیر منفرد تعمیم‌یافته صورت پذیرد، آن‌را روش پایدارسازی "تجزیه مقادیر منفرد تعمیم‌یافته منقطع Truncated Generalized Singular Value (Decomposition (TSVD" می‌نامند (هانسن، ۱۹۹۸). جواب پایدارشده در این روش نیز از به ترتیب زیر است:

$$x_\lambda^{Reg} = \sum_{i=p-r_\lambda+1}^{p} \frac{\langle u_i, b \rangle}{\sigma_i} x_i + \sum_{i=p+1}^{n} \langle u_i, b \rangle x_i \qquad (۱۰)$$

در رابطه بالا x_i ستون‌های ماتریس غیر سینگولار $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و p بعد ماتریس $V \in \mathbb{R}^{p\times p}$ در تجزیه مقادیر منفرد تعمیم‌یافته ماتریس است (هانسن، ۱۹۹۶).

روش‌های "TSVD" و "TGSVD" از جمله روش‌های بسیار متداول در حل مسائل کم رتبه و بدوضع گسسته‌اند که در این مقاله به کاربرد آن در مبحث انتقال به سمت پایین و حل معکوس معادله آبل پواسون خواهیم پرداخت.

۲-۲ روش پایدارسازی تیخونوف استاندارد

مشکل اولیه مسائل بدوضع گسسته این است که به‌دلیل مقادیر منفرد کوچک ماتریس، مسئله غیر قابل برآورد است. لذا لازم است که به‌منظور پایدارسازی مسئله، اطلاعات بیشتری در خصوص جواب به مسئله اضافه کنیم. به این روش در حل دستگاه‌های معادلات بدوضع روش تیخونوف گفته می‌شود. این روش یکی از پرکاربردترین روش‌های پایدارسازی در حل مسائل بدوضع گسسته محسوب می‌شود که کاربرد فراوان آن‌را در اغلب مسائل کاربردی درگیر با مسائل معکوس می‌توان یافت. این روش را نخستین‌بار فیلیپس (۱۹۶۲) و تیخونوف، (۱۹۶۳) مستقل از یکدیگر ارائه کردند. در روش تیخونوف یافتن جواب‌ها به صورتی است که تابع تیخونوف به صورت زیر را مینیموم سازد (هانسن، ۲۰۰۱):

$$F_{Tikhonov}(x;\lambda) = \|Ax-b\|_2^2 + \lambda\Omega(x) \qquad (۱۱)$$

با توجه به فرضیات و یا اطلاعات اولیه‌ای که از مجهولات در اختیار است، تابع Ω نیز مشخص می‌شود. عموماً تابع Ω به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\Omega(x) = \|Lx\|_2^2 \qquad (۱۲)$$

که در رابطه فوق L ماتریسی $p\times n$ است. با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲) راهبرد پایدارسازی در روش تیخونوف تعمیم‌یافته به صورت فوق نیز به ترتیب زیر است:

$$A_\lambda^{\#} = \left(A^TA + \lambda L^TL\right)^{-1} A^T \qquad (۱۳)$$

ضرایب فیلتر و جواب پایدارشده به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f_i = \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2+\lambda}$$
$$x_\lambda^{Reg} = \sum_{i=1}^{p} f_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i} x_i + \sum_{i=1}^{p} u_i^T b x_i \qquad (۱۴)$$

اگر $L = I_{nn}$، آن‌گاه این روش را روش استاندارد تیخونوف و یا به‌طور ساده‌تر، روش تیخونوف می‌نامند و تابع تیخونوف در روش استاندارد تیخونوف به‌صورت زیر است:

$$F_{Tikhonov}(x;\lambda) = \|Ax-b\|_2^2 + \lambda\|x\|_2^2 \qquad (۱۵)$$

پس از رابطه (۱۴) ضرایب فیلتر و جواب پایدار شده به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda}$$
$$x_\lambda^{Reg} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i \qquad (۱۶)$$

۲-۳ تیخونوف تعمیم‌یافته در زیرفضای سوبولف

در بسیاری از مسائل کاربردی، انتخاب نرم فضای هیلبرت (L_2) یعنی $\Omega = \|\bullet\|_2^2$ انتخاب بهینه‌ای نخواهد بود. در ادامه به معرفی روش تیخونوف تعمیم‌یافته در زیرفضای سوبولف درحکم زیرفضایی هیلبرتی در فضای L_2 خواهیم پرداخت.

همان‌گونه که در بخش قبل مشاهده شد در روش تیخونوف استاندارد از نرم فضای هیلبرت L_2 استفاده شد که عمده مزیت این انتخاب، سادگی آن است. به‌جای تابع Ω می‌توان از نرم-۲ یا یک نیم‌نرم مناسب استفاده کرد. عموماً در مسائل کاربردی، برای آنکه بتوان روی رفتار توابع مجهولات (مشتقات و تغییرات آنها تا مرتبه خاص) کنترل بیشتری داشت، می‌توان از نیم‌نرم و یا نرم زیرفضای سوبولوف- به‌مثابهٔ یک زیرفضای هیلبرتی در L_2 که در آن مشتقات توابع تا درجه خاصی مربع-انتگرال‌پذیرند- در روش تیخونوف تعمیم‌یافته، بهره جست (ژدانوف، ۲۰۰۲).

در روش تیخونوف تعمیم‌یافته در اغلب موارد به‌جای تابع Ω از تقریب گسسته نیم-نرم سوبولف $\rho_{W_2^s}$ به صورت زیر استفاده می‌شود (پیک، ۲۰۰۴):

$$\int_a^b q^2(x)\left|f^{(k)}(x)\right|^2 dx \approx \sum_{j=1}^{n-k}\left(\Delta x^k \left(L_{k,n} f\right)_j\right)\Delta x$$
$$= \left\|\Delta x^{k-\frac{1}{2}} L_{k,n} f\right\|_2^2 = \|Lf\|_2^2 \qquad (۱۷)$$

که در رابطه بالا $f_j = f(j\Delta x), {}_{i=1,2,\dots,n}$ و ماتریس $L_{k,n}$ نیز موسوم به عملگر مشتق یک ماتریس $(n-k)\times n$ است که در حالت کلی از رابطه بازگشتی زیر حاصل می‌شود (پیک، ۲۰۰۴):

$$L_{k,n} = L_{k-1,n-1} L_{1,n}$$
$$L_{0,n} = I_n \qquad (۱۸)$$
$$L_{1,n} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

هر یک از $\left\{\|L^i \quad\|_2\right\},\ i = 1,2,\dots,s$ نیز موسوم به نیم‌نرم سوبولف‌اند. برای مثال، ماتریس‌های L^1 و L^2 ناشی از گسسته‌سازی مشتقات اول و دوم به ترتیب زیرند:

$$L^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (۱۹)$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۲۰)$$

با توجه به فرمول $L = \Delta x^{k-\frac{1}{2}} L_{k,n}$ و تابع تیخونوف دیده می‌شود که در پایدارسازی تیخونوف تعمیم‌یافته، ضریب $\Delta x^{k-\frac{1}{2}}$ درحکم یک فاکتور مقیاس در پارامتر پایدارسازی عمل می‌کند و سبب تفاوتی در جواب پایدارسازی نخواهد شد.

با نرم سوبولف کنترل بیشتری بر رفتار تابع نسبت به متر و نرم فضای L_2 وجود دارد (ژدانوف، ۲۰۰۲). نرم گسسته‌شده سوبولف $\|x\|_S$ به صورت زیر است:

$$\|x\|_S^2 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2 \left\|L^i x\right\|_2^2, \qquad (۲۱)$$

که در آن ماتریس‌های $\left\{L^i\right\}, i = 1,2,\dots,s$، ماتریس‌هایی ناشی از گسسته‌سازی عملگرهای مشتق‌گیری تا مرتبه s است که هریک در یک فاکتور مقیاس ضرب شده‌اند. به ضرایب $\{\alpha_i\},\ i = 1,\dots,s$ نیز ضرایب وزن گفته که به توابع $\{q_i(x)\},\ i = 1,\dots,s$

و فاصله نمونه‌برداری در گسسته‌سازی رابطه (۱۷) وابسته است.

استفاده از نرم گسسته‌شده سوبولف در روش تیخونوف تعمیم‌یافته ($\Omega(x)=\|x\|_S^2$)، معادل استفاده از ماتریس پایدارسازی L_S به صورت زیر، است.

$$L^{Sob}=\begin{pmatrix}\alpha_s L^s\\ \vdots\\ \alpha_1 L^1\\ \alpha_0 L^0\end{pmatrix} \tag{۲۲}$$

استفاده از ماتریس پایدارسازی فوق در روش تیخونوف تعمیم‌یافته با استفاده از ابزار تجزیه مقادیر منفرد تعمیم‌یافته مستلزم کوچک‌تر بودن سطرهای ماتریس پایدارسازی نسبت به مجهولات مسئله است که در ماتریس پایدارسازی L^{Sob}، این شرط برقرار نیست. لذا برای رفع این مشکل بایستی به جای ماتریس L^{Sob} از ماتریس بالا مثلثی تجزیه QR ماتریس L^{Sob} استفاده کرد (ژدانوف، ۲۰۰۲).

در این مقاله، نرم‌های گسسته‌شده زیرفضاهای سوبولف $W_2^1(a,b)$ و $W_2^2(a,b)$ و نیم‌نرم‌های اول و دوم سوبولف ($\|L^1\ \|_2$ و $\|L^2\ \|_2$)، در پایدارسازی مسئله انتقال به سمت پایین به روش تیخونوف تعمیم‌یافته استفاده شده و نتایج به‌دست آمده با هم مقایسه شده است.

۳ روش‌های تکرار

دسته دوم روش‌های پایدارسازی روش‌های تکراری است. روش‌های تکرار را می‌توان برای دستگاه معادلات خطی با دستگاه معادلات نرمال $A^TAx=A^Tb$ به‌کارگرفت. در روش‌های تکرار نیازی به محاسبه مستقیم A^TA نیست. این ویژگی دو حُسن دارد (بجروک، ۱۹۹۰):

۱. جلوگیری از خطای محاسباتی که در محاسبه ماتریس A^TA ایجاد می‌شود: در ضرب A^T در A با توجه به دقت رایانه برای محاسبه عملیات ضرب و... و خطای رندشدگی، احتمال ایجاد خطا در محاسبه A^TA وجود دارد.

۲. جلوگیری از تولید ماتریس غیرتُنُک A^TA: در بعضی از مسائل A^TA دیگر مانند A تنک نیست.

در روش‌های تکرار، جواب دستگاه معادلات نرمال، از طریق تشکیل یک دنباله جواب که به سمت جواب شبه معکوس عملگر A میل می‌کند، به‌دست می‌آید. در روش‌های تکرار تعداد تکرار، نقش پارامتر پایدارسازی را در روش‌های تکرار بازی می‌کند. درصورتی‌که تکرار بیش از حد اندازه صورت گیرد، ممکن است جواب ناپایدار شود (کرن، ۲۰۰۳).

در این مقاله به بیان روش‌های بازگشتی نظیر روش لندوبر و فریدمن، روش تکرار تیخونوف، روش کازمارز و روش‌های تکرار زیر فضای کریلوف در حل مسئله انتقال به سمت پایین میدان گرانی خواهیم پرداخت.

۳-۱ روش‌های کلاسیک بازگشتی

اساس این روش‌ها بر مبنای ساخت دنباله‌ای از جواب‌ها مانند $\{x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(k)},\dots\}$ است که در آنها رابطه بازگشتی بین هر بردار جواب با بردار قبلی (و یا بردارهای ما قبل آن) مشخص است. ساده‌ترین نوع رابطه بازگشتی، رابطه بازگشتی خطی بین هر بردار جواب با بردار ما قبل آن است. به طوری که با داشتن بردار جواب در هر گام تکرار می‌توان بردار جواب در تکرار بعدی را با یک عملگر خطی مانند T و یک بردار ثابت انتقال مانند t به‌دست آورد، یعنی اگر $x^{(k)}$ بردار جواب در تکرار kام و $x^{(k+1)}$ بردار جواب در تکرار $k+1$ام باشد آنگاه داریم:

$$x^{(k+1)}=T(x^{(k)})+t \tag{۲۳}$$

اگر نرم-۲ عملگر T کمتر از ۱ باشد، در این

صورت یک عملگر انقباضی خواهد بود، لذا در معادله (۲۳) با فرض انقباضی بودن عملگر T و با توجه به قضیه نقطه ثابت برای عملگرهای انقباضی دنباله جواب‌های روش بازگشتی به سمت جواب دستگاه معادله $x - T(x) - t_0 = 0$ میل می‌کند (کاپیو و سمرسالو، ۲۰۰۴). در خصوص دستگاه معادله $Ax = b$ حاصل از گسسته‌سازی یک مسئله بدوضع دنباله جواب در رابطه زیر صدق می‌کند (هانسن، ۱۹۹۶):

$$x^{(k+1)} = \left(I - Q^{-1}A^TA\right)x^{(k)} + A^Tb \qquad (۲۴)$$

در رابطه بالا ماتریس Q موسوم به ماتریس تفکیک به گونه‌ای انتخاب می‌شود که عملگر $\left(I - Q^{-1}A^TA\right)$ انقباضی شود. در این صورت با توجه به قضیه نقطه ثابت در آنالیز می‌توان انتظار داشت که دنباله $\left\{x^{(k)}\right\}$ با رابطه بازگشتی زیر به جواب دستگاه معادله بدوضع گسسته $Ax = b$ میل می‌کند.

روش تکراری لندوبر- فریدمن

یکی از روش‌های کلاسیک بازگشتی مشهور در پایدارسازی مسائل بدوضع منسوب به لندوبر و فریدمن است. در این روش معکوس ماتریس تفکیک یعنی Q^{-1} برابر با یک ماتریس قطری مانند ωI در نظر گرفته می‌شود. درنتیجه رابطه بازگشتی در روش لندوبر- فریدمن از قرار زیر خواهد بود (هانسن، ۱۹۹۶):

$$x^{(k+1)} = (I - \omega A^TA)x^{(k)} + \omega A^Tb \qquad (۲۵)$$

اگر ω از بازه $\left(0, 2\left\|A^TA\right\|_2^{-1}\right)$ اختیار شود، آنگاه عملگر $(I - \omega A^TA)$ عملگری انقباضی است و متعاقباً دنباله جواب‌ها همگرا می‌شود.

روش تکراری تیخونوف

روش لندوبرد- فریدمن را استراند در ۱۹۷۴ با شکل تعمیم‌یافته زیر معرفی کرد (هانسن، ۱۹۹۸).

$$x^{(k+1)} = (I - F(A^TA)A^TA)x^{(k)} + F(A^TA)A^Tb \qquad (۲۶)$$

در روش تعمیم‌یافته استراند، معکوس ماتریس تفکیک، تابعی از ماتریس نرمال در نظر گرفته می‌شود. البته تابع F نیز بایستی به گونه‌ای معرفی شود که عملگر $(I - F(A^TA)A^TA)$ نیز عملگری انقباضی باشد.

در روش تعمیم‌یافته لندوبر- فریدمن موسوم به روش استراند اگر تابع F به صورت زیر معرفی شود، آنگاه عملگر $(I - F(A^TA)A^TA)$ عملگری انقباضی است و روش تکراری به وجود آمده را روش تیخونوف تکراری می‌نامند.

$$F(A^TA) = \left(A^TA + \lambda I\right)^{-1}, \lambda > 0 \qquad (۲۷)$$

که پس از جایگذاری رابطه فوق در معادله (۱۳) رابطه بازگشتی در روش تیخونوف تکراری بصورت زیر خواهد شد:

$$x^{(k+1)} = \left(A^TA + \lambda I\right)^{-1}(A^Tb + \lambda x^{(k)}) \qquad (۲۸)$$

در این روش ضرایب فیلتر به صورت زیر است (هانسن، ۱۹۹۸):

$$f_i = 1 - (1 - \sigma_i^2 F(\sigma_i^2))^k \qquad (۲۹)$$

در رابطه فوق σ_i مقادیر منفرد ماتریس A است.

شتاب‌دهنده چیبیشوف

از جمله ایراداتی که می‌توان به روش‌های کلاسیک بازگشتی خصوصاً روش‌های لندوبر- فریدمن وارد دانست، کندی این روش‌ها نسبت به سایر روش‌های تکراری است. برای افزایش دادن سرعت همگرایی در روش‌های بازگشتی کلاسیک، می‌توان از مجموعه روش‌هایی موسوم به "روش‌های شتاب‌دهنده" که باعث

افزایش سرعت همگرایی می‌شود، به همراه روش کلاسیک استفاده کرد. هریک از این شتاب‌دهنده‌ها ممکن است یک روش تکراری دیگر و یا یک روش تقریب باشند. از این میان متداول‌ترین نوع آنها "شتاب‌دهنده چیبیشوف" است که کاربرد آن در افزایش سرعت همگرایی در روش‌های کلاسیک با روابط بازگشتی خطی است. در روش شتاب‌دهنده چیبیشوف فرض بر این است که در تکرار kام یک میانگین‌گیری وزن‌دار از دنباله جواب‌های به‌دست آمده $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ وجود دارد، به‌طوری که نسبت به $x^{(k)}$، جواب مناسب‌تری است.

پس در هر گام تکرار در روش شتاب‌دهنده چیبیشوف، بردار جواب $y^{(k)}$ از رابطه زیر حاصل می‌شود (کینکید و چنی، ۱۹۹۱):

$$
\begin{aligned}
&y^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} x^{(i)} \\
&\sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} = 1
\end{aligned}
\qquad (۳۰)
$$

برای تعیین ضرایب وزن $\left\{a_i^{(k)}\right\}$ از توابع چیبیشوف استفاده می‌شود و از این رو این روش چیبیشوف خوانده می‌شود. رابطه بازگشتی کلاسیک با شتاب‌دهنده چیبیشوف برای حصول بردارهای جواب $\left\{y^{(k)}\right\}$ از به‌صورت زیر خواهد بود: ($y^{(0)}$ در رابطه بازگشتی زیر، بردار اختیاری شروع است):

$$
\begin{cases}
y^{(1)} = T(y^{(0)}) + t; \\
y^{(k)} = 2T(y^{(k-1)}) - y^{(k-2)} + 2t;
\end{cases}
\qquad (۳۱)
$$

روش‌های کازمارز

تا اینجا نمونه‌هایی از روش‌های کلاسیک بازگشتی، مطرح شد که با آنها ضمن معرفی یک عملگر انقباضی در یک رابطه بازگشتی، دنباله‌ای همگرا از جواب‌های مسئله را ایجاد می‌شد. شاخه دیگری از روش‌های کلاسیک بازگشتی موسوم به روش‌های "کازمارز" وجود دارد که تا حدودی با روش‌های فوق تفاوت دارند. اختلاف روش‌های کازمارز با روش‌های کلاسیک پیش‌گفته قبلی در این است که رابطه بازگشتی معرفی شده در آنها دارای مفهومی هندسی است. شناخته‌شده‌ترین نوع از روش‌های کازمارز موسوم به فن بازسازی جبری (Algebraic Reconstruction Technique (ART)) است که در مبحث توموگرافی کاربرد فراوانی دارد (کاپیو و سمرسالو، ۲۰۰۴). برای مطالعه جزئیات روش کازمارز می‌توان به رفرنس (کاپیو و سمرسالو، ۲۰۰۴) مراجعه کرد.

فن بازسازی جبری در مبحث توموگرافی حالت ساده روش جامع کازمارز است که بلوک‌های سطری آن همان سطرهای دستگاه معادلات بدوضع گسسته‌اند. الگوریتم تکراری روش ART به صورت زیر خواهد بود (کاپیو و سمرسالو، ۲۰۰۴):

"ART" Algorithm:

$k = 0;\quad x^{(0)} = 0;$

Repeat Until "Semi-Convergence"

$\quad z0 = x^{(k)};$

$\quad$ for $j = 1 : m$

$$z^{(j)} = z^{(j-1)} + \left(\frac{1}{\left\|a_j\right\|_2^2}\right)(b_j - a_j^T z^{(j-1)}) a_j$$

$\quad$ end

$\quad x^{(k+1)} = z^{(m)};\quad k \leftarrow k+1;$

End

در روابط فوق a_j نشان‌دهنده سطرهای ماتریس A است.

۳-۲ پایدارسازی در زیرفضای کریلوف

روش‌های زیرفضای کریلوف روش‌هایی برای حل دستگاه‌هایی با ماتریس‌های مربعی‌اند. اساس این روش‌ها بر مبنای انتخاب جواب در هر گام تکرار از زیرفضای آشیانه‌ای کریلوف است. زیرفضای کریلوف برای دستگاه

معادلات $Ax = b$ در تکرار kام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Kr_k(A,b) = Span\{b, Ab, A^2b, ..., A^{k-1}b\} \quad (۳۲)$$

در هر گام تکرار زیرفضای کریلوف، بسط داده می‌شود و زیر فضاهای کریلوف در تکرارهای قبل را پوشش خواهد داد. از این رو به آنها زیرفضاهای آشیانه‌ای (Nested subspaces) کریلوف نیز گفته می‌شود.

$$Kr_1(A,b) \subseteq Kr_2(A,b) \subseteq ... \subseteq Kr_k(A,b) \quad (۳۳)$$

پرسشی که در ابتدا وجود دارد این است که آیا زیرفضای کریلوفی وجود دارد که جواب واقعی دستگاه، عضوی از آن باشد؟ برای پاسخ دادن به پرشش فوق به این مطلب بسنده می‌کنیم که اگر ماتریس A ماتریسی مربعی با رتبه کامل باشد، در این صورت چندجمله‌ای با حداقل درجه M مانند q_M به صورت زیر وجود دارد:

$$q_M(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + ... + \alpha_M A^M \qquad \alpha_0 \neq 0 \quad (۳۴)$$

به‌طوری‌که:

$$q_M(A) = 0 \quad (۳۵)$$

این معادله همان معادله‌ای است که مقادیر ویژه ماتریس A ریشه‌های آن است (هانسن، ۱۹۹۸). به این معادله در اصطلاح چندجمله‌ای مینیمال گفته می‌شود. از روابط فوق، معکوس ماتریس A به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} q_M(A) = \sum_{i=0}^{M} \alpha_i A^i = 0 &\Rightarrow \alpha_0 I = -\sum_{i=1}^{M} \alpha_i A^i \\ &\overset{\alpha_0 \neq 0}{\Rightarrow} I = A\left(-\frac{1}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{M} \alpha_i A^{i-1}\right) \\ &\Rightarrow I = \underbrace{\left(-\frac{1}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{M} \alpha_i A^{i-1}\right)}_{A^{-1}} A \end{aligned}$$

(۳۶)

در این صورت برای دستگاه معادلات مربعی و با رتبه کامل ($Ax = b$) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x = A^{-1}b \Rightarrow x &= \sum_{i=1}^{M} \frac{-\alpha_i}{\alpha_0} A^{i-1}b \\ &\Rightarrow x \in Span\{b, Ab, A^2b, ..., A^{M-1}b\} \\ &\Rightarrow x \in Kr_M(A,b) \end{aligned}$$

(۳۷)

پس می‌بینیم که در الگوریتم‌های تکراری به روش زیرفضاهای کریلوف، مرتبه‌ای از تکرار مانند M وجود دارد که جواب واقعی دستگاه با فرض نبود خطا در بردار b در زیرفضای کریلوف $Kr_M(A,b)$ قرار می‌گیرد. همچنین با فرض نبود هرگونه خطایی، انتظار آن است که از تکرار Mام به بعد، زیرفضای کریلوف ثابت باقی‌بماند و بسط داده نشود. این موضوع خود مزیتی برای روش‌های تکرار زیرفضای کریلوف به حساب می‌آید، زیرا که برای مثال در روش‌های کلاسیک بازگشتی، حداکثر تعداد تکرار مشخص نیست و برای حصول به جواب، ممکن است که تکرار تا بی‌نهایت صورت گیرد. اما در روش‌های تکراری زیرفضای کریلوف انتظار آن است که حداکثر تا تکرار $M \leq n$ به جواب خواسته شده برسیم. البته در عمل دیده می‌شود که تعداد تکرار را بایستی تا حدی بیشتر از M ادامه داد. اما به هر ترتیب روش‌های زیرفضای کریلوف نسبت به سایر روش‌های تکراری دارای سرعت همگرایی بیشتری‌اند. خاصیت دیگری که روش‌های زیرفضای کریلوف دارند، این است که روش‌های زیرفضای کریلوف یک جواب هموار ارائه می‌کنند. زیرا همان‌گونه که در تعریف زیرفضای کریلوف می‌بینیم، زیرفضای کریلوف در هر گام تکرار از بسط بردارهایی حاصل می‌شود که از تأثیر ماتریس A روی بردارهای زیرفضای کریلوف تکرار قبل و بردار مشاهدات b حاصل آمده‌اند. از طرفی ماتریس بزرگ مقیاس A حاصل از گسسته‌سازی عملگر انتگرالی است که هنوز

مجموعه خواص عملگر انتگرالی، از جمله خاصیت هموارسازی (به عبارتی دیگر خاصیت پیوسته‌سازی) عملگرهای انتگرالی را به همراه دارد. همچنین بردار b نیز بایستی با توجه به دستگاه $Ax = b$ برداری هموار باشد. این بدان معنا است که زیرفضای کریلوف از بسط بردارهایی هموار (و در حالت پیوسته از بسط توابعی پیوسته) حاصل می‌شود.

روش‌های زیرفضای کریلوف با توجه به اینکه چه ملاک‌هایی را در هرگام تکرار در انتخاب جواب از زیرفضاهای کریلوف در نظر بگیرد، انواع گوناگونی دارد. روش‌های متداول زیرفضای کریلوف، روش‌هایی با توجه به معیار GMRES است . در این روش‌ها جواب در هر گام تکرار از زیرفضای کریلوف به گونه‌ای اختیار می‌شود که دارای کمترین مقدار نرم باقی مانده‌ها باشد، به عبارت دیگر:

$$x^{(k)} = \underset{\substack{x \in Kr_k(A,b) \\ r(x)=Ax-b}}{\arg\operatorname{Min}} \left\| r(x) \right\|_2 \qquad (۳۸)$$

روش‌های خاص‌تر GMRES موسوم به روش‌های MINRES وجود دارند که مبنای آنها کار با عملگرهای متقارن است.

روش گرادیان مزدوج

گرادیان مزدوج (CG) روشی بسیار معروف در حل دستگاه‌های معادلات بزرگ‌مقیاس در آنالیز عددی است که گونه‌ای از روش‌های زیرفضای کریلوف مبتنی بر GMRES و MINRES، محسوب می‌شود. روش CG درحکم یک روش زیرفضای کریلوف برای دستگاه‌های دارای عملگرهای مثبت (PD, Positive Definite)، مطرح می‌شود. از این رو می‌توان از روش CG در حل دستگاه‌های معادلات نرمال نیز بهره جست. در برخی از کتاب‌ها و مقاله‌ها از روش گرادیان مزدوج در حل دستگاه‌های معادلات نرمال با نام‌های روش‌های CGNE,CGNR,CGLS نیز یاد شده است. در حل دستگاه‌های معادلات نرمال نیز به روش گرادیان مزدوج می‌توان از جای‌گذاری‌های زیر استفاده کرد (هانسن، ۱۹۹۶) (کاپیپو و سمرسالو، ۲۰۰۴):

$$\begin{aligned} A &\leftarrow A^T A \\ b &\leftarrow A^T b \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

الگوریتم روش‌های "CGLS، CGNE و CGNR" در حل هر دستگاه معادلات به صورت $Ax = b$ از قرار زیر خواهد بود:

<u>CGLS , CGNE & CGNR Algorithm:</u>

$$\begin{array}{l}
\text{Input } x^{(0)}; \\
r^{(0)} = b - Ax^{(0)};\;\; s_1 = r^{(0)}; \\
k = 1; \\
\text{Repeat Until "Semi-Convergence"} \\
\quad \alpha_k = \left\| A^T r^{(k-1)} \right\|_2^2 \Big/ \left\| As_k \right\|; \\
\quad x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k s_k; \\
\quad r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k A s_k; \\
\quad \beta_k = \left\| A^T r^{(k)} \right\|_2^2 \Big/ \left\| A^T r^{(k-1)} \right\|_2^2; \\
\quad s_{k+1} = r^{(k)} + \beta_k s_k; \\
\quad k \leftarrow k+1; \\
\text{End}
\end{array}$$

که در الگوریتم فوق $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ پایه‌ای برای زیرفضای کریلوف $Kr_k(A,b), k \le M$ است.

روش LSQR (روش CG با دو قطری‌سازی لنکزوز و تجزیه QR)

در روش گرادیان مزدوج برای حل دستگاه‌های معادلات نرمال (به عبارت دیگر در روش‌های: CGLS، CGNE و CGNR) استفاده از ابزار "دوقطری سازی لنکزوز" منجر

به روش دیگری از روش‌های زیرفضای کریلوف با معیار GMRES به نام روش "LSQR" خواهد شد. در روش دو قطری سازی لنکزوز در هر گام تکرار برای ماتریس A سه ماتریس مانند: $B_k \in \mathbb{R}^{(k+1)\times k}$، $\hat{U}_{k+1} \in \mathbb{R}^{m\times(k+1)}$ و $\hat{V}_k \in \mathbb{R}^{n\times k}$ ایجاد می‌شود، به طوری‌که (هانسن، ۱۹۹۸ و صفری، ۲۰۰۴):

$$A\hat{V}_k = \hat{U}_{k+1}B_k \qquad (۴۰)$$

ماتریس‌های $\hat{U}_{k+1}$ و $\hat{V}_k$ دارای ستون‌های اورتونرمال به ترتیب موسوم به "بردارهای چپ لنکزوز" و "بردارهای راست لنکزوز" اند. ستون‌های ماتریس $\hat{V}_k$ پایه‌ای ارتونرمال برای زیر فضای کریلوف $Kr_k(A^TA, A^Tb)$ (زیرفضای کریلوف در روش گرادیان مزدوج در دستگاه معادلات نرمال) محسوب می‌شود. پس جواب در هر گام تکرار به‌صورت ترکیب خطی از ستون‌های ماتریس $\hat{V}_k$ خواهد بود یا به عبارت دیگر

$$x^{(k)} = \beta_1 V_k B_k \hat{e}_1^{(k+1)} \qquad (۴۱)$$

برای سادگی کار، بردار اول چپ لنکزوز برابر بردار یکه در راستای بردار مشاهدات b در نظر گرفته می‌شود، به‌عبارت دیگر $u_1 = b / \beta_1,\ \beta_1 = \|b\|_2$ و $b = \beta_1 \hat{U}_{k+1}\hat{e}_1^{(k+1)}$ و در حالی‌که $\hat{e}_1^{(k+1)} = (1,0,\dots,0)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$. این روش یک روش تکراری قوی است.

۴ بررسی موردی

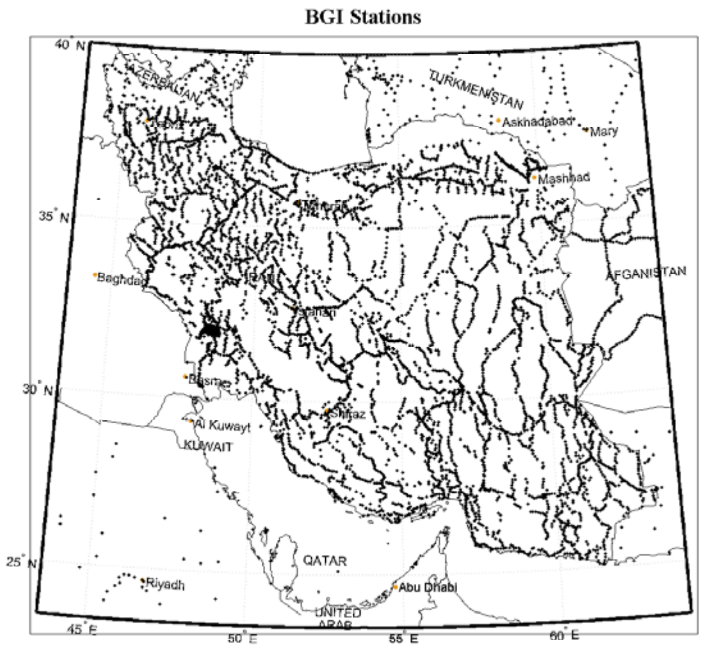
برای مقایسهٔ روش‌های گوناگون پایدارسازی و انتخاب بهترین روش، برای حل مسئلهٔ انتقال به سمت پایین تعیین ژئوئید با استفاده از داده‌های شتاب گرانی BGI، در منطقهٔ مطالعاتی ایران، در محل نقاط مشاهداتی شتاب گرانی زمینی BGI (شکل ۲) اقدام به تعریف یک مسئلهٔ شبیه‌سازی شده شد. برای تولید داده‌های گرانشی شبیه‌سازی شده از مدل PGM98CR استفاده شد (ونزل، ۱۹۹۸). این مدل ژئوپتانسیلی شامل ضرایب هارمونیک کروی تا درجه و مرتبهٔ ۷۲۰ است، که با ضریب از درجه و مرتبهٔ ۳۶۰ تا ۷۲۰ آن برای تولید شتاب جاذبه تفاضلی روی سطح زمین استفاده شد. با استفاده از همین مدل نیز مقادیر جواب روی سطح بیضوی مرجع روی یک گرید $2'\times 2'$ تولید شد. شکل ۳ تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع را در منطقهٔ مطالعاتی فارس ساحلی نشان می‌دهد.

به مشاهدات تفاضلی شتاب گرانی روی سطح زمین، خطایی با مشخصات جدول ۲ اضافه شد.

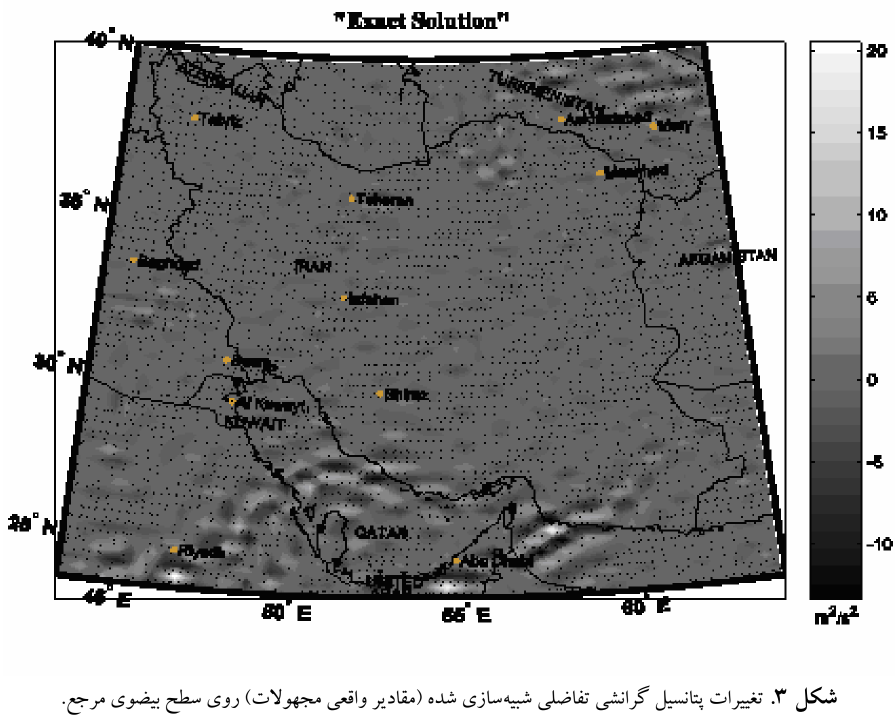
برای مقایسه روش‌های مختلف از خطای نسبی بیان شده با رابطه زیر استفاده شد:

$$\text{Relative Error} = \frac{\left\|x^{\text{exact}} - x^{\text{Reg}}\right\|_2}{\left\|x^{\text{exact}}\right\|_2} \qquad (۴۲)$$

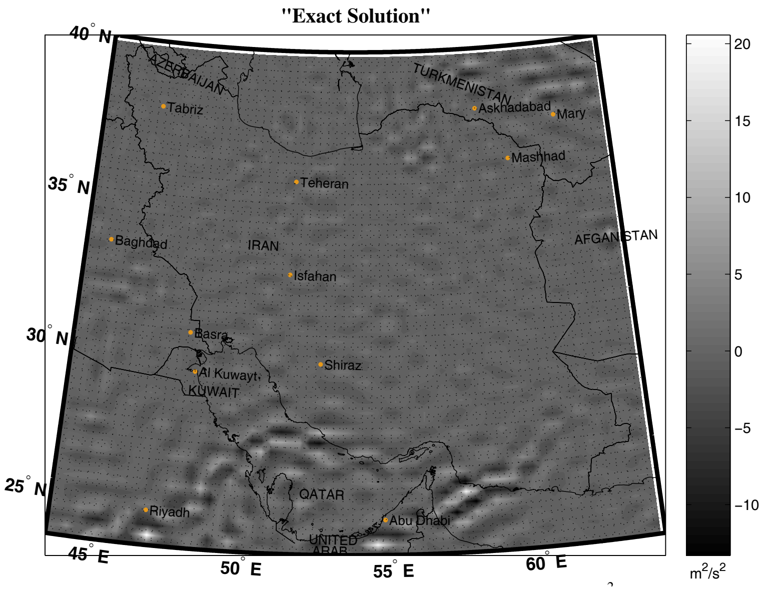
x^{exact} در رابطه فوق مقدار اختلاف بسط هامونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبهٔ ۳۶۰ از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبهٔ ۷۲۰ روی شبکهٔ $20'\times 20'$ یاد شده است، که در واقع محک برآورد کارایی روش‌های پایدارسازی مورد بررسی است. در جدول ۳ نتایج مقایسه روش‌های پایدارسازی گوناگون براساس محک فوق داده شده است. با ملاحظه نتایج به‌دست آمده از جدول ۳ دیده می‌شود که روش کازمارز (ART) بهترین روش برای انتقال به‌سمت پایین مشاهدات شتاب گرانی تفاضلی است. براساس این روش و با استفاده از مقادیر واقعی مشاهدات شتاب گرانی از فایل BGI پتانسیل گرانی تفاضلی بر روی بیضوی تعیین شد که نتیجه حاصل در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۲. توزیع نقاط گرانی BGI در منطقه جغرافیایی ایران.



شکل ۳. تغییرات پتانسیل گرانشی تفاضلی شبیه‌سازی شده (مقادیر واقعی مجهولات) روی سطح بیضوی مرجع.



شکل ٤. تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع با استفاده از روش ART.

جدول ۲. مشخصات آماری نویز اعمال شده به مشاهدات شتاب جاذبهٔ تفاضلی بر حسب میلی‌گال.

نوع داده	مینیموم	میانگین	ماکزیموم	انحراف معیار
خطای تصادفی	-0.4884	0.0037	0.6098	0.0980

جدول ۳. مقایسه خطای روش‌های پایدارسازی در مسئله انتقال به سمت پایین داده‌های شبیه‌سازی شده (خطای نسبی بدون واحد، و واحد کمیت‌های دیگر $m^2\ s^{-2}$ است).

خطای نسبی	مینیموم	متوسط	ماگزیموم	روش
0.7035	-20.2382	0.0072	10.5385	TSVD
0.8451	-19.7380	0.0075	17.2047	$TGSVD(L^1)$
5.1202	-61.1341	0.0075	79.7941	$TGSVD(L^2)$
0.6815	-19.9721	0.0083	10.3802	S-Tikh
0.7118	-18.2493	0.0726	12.4487	$G\text{-}Tikh(L^1)$
1.4960	-33.3710	0.0075	27.6701	$G\text{-}Tikh(L^2)$
0.6610	-19.628	0.0046	10.2977	$G\text{-}Tikh(W_2^1)$
0.6479	-19.2861	0.0033	10.1302	$G\text{-}Tikh(W_2^2)$
0.70	-20.24	0.01	10.68	Land- Frid
0.84	-19.38	0.006	11.71	Land- Frid (Cheb. Acc.)
0.75	-20.30	0.01	10.65	Iter- Tikh
0.84	-20.38	-0.003	10.71	Iter- Tikh (Cheb. Acc.)
0.49	-16.35	4.62e-4	8.1255	ART
0.74	-21.04	0.01	11.52	CGLS
0.74	-21.04	0.01	11.52	LSQR

۵ بحث و نتیجه‌گیری

همان‌گونه که اشاره شد، هدف از شبیه‌سازی صورت گرفته در بخش پیش، ایجاد یک مسئله بدوضع گسسته ناشی از گسسته‌سازی معادله انتگرالی آبل- پواسون بوده است که تا حد امکان به مسئله واقعی نزدیک باشد و سپس با تحلیل جواب‌های به‌دست آمده در هر روش، در مسئله واقعی که همان برآورد مجهولات تفاضلی با استفاده از داده‌های فایل BGI در رابطه انتگرالی آبل- پواسون است، روش بهتر به کار گرفته شود. نتایج حاصل از شبیه‌سازی صورت پذیرفته، در جدول ۳ در بخش قبل ارائه شده است.

با توجه به نتایج جدول ۳، دیده می‌شود که روش کازمارز (ART) مناسب‌ترین روش برای حل مسئله انتقال به‌سمت پایین در محاسبه ژئوئید بدون استفاده از روش استوکس است.

با استناد به تحلیل‌های فوق در مسئله واقعی(مسئله انتقال به سمت پایین مشاهدات گرانی به کمیت‌های پتانسیلی روی بیضوی مرجع) که ناشی از گسسته‌سازی معادله انتگرالی آبل‌پواسون روی یک شبکه $20' \times 20'$ با استفاده از ۸۸۶۸ نقطه گرانی بانک اطلاعاتی BGI است، روش کازمارز به مثابهٔ روش سازگار با این مسئله به کار گرفته شد و نتایج حاصل یا مجهولات پتانسیل تفاضلی روی شبکه پیش‌گفته در شکل ۴ آورده شده است.

تشکر و قدردانی

از معاونت پژوهشی دانشگاه تهران و پردیس دانشکده‌های فنی به سبب حمایت مالی از این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شماره ۸۱۰۳۹۱۸/۱/۰۳ تشکر و قدردانی می‌شود.

منابع

آزموده اردلان، ع.، صفری، ع.، و الله‌توکلی، ی.، ۲۰۰۶a، بررسی روش‌های تعیین پارامتر پایدارسازی در مسئله انتقال به سمت پایین، ارائه برای انتشار در مجله فیزیک زمین و فضا.

آزموده اردلان، ع.، صفری، ع.، و الله‌توکلی، ی.، ۲۰۰۶b، روش‌های تجزیه مقادیر منفرد منقطع و تیخونوف تعمیم یافته در پایدارسازی مسئله انتقال به سمت پایین، ارائه برای انتشار در نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران.

آزموده اردلان، ع.، صفری، ع.، و جمعگی، ع.، ۲۰۰۶c، مقایسه روش‌های پایدارسازی در مسئله انتقال به سمت پایین تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس، ارائه برای انتشار در نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران.

صفری، ع.، الله‌توکلی، ی.، ۲۰۰۷، بررسی شرط پیکارد در مسئله انتقال به سمت پایین در تعیین ژئوئید بدون استفاده از روش استوکس، ارائه برای انتشار در نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران.

Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2004, High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid, J. Geodesy, **78**, 138-156.

Baglama, J., and Lothar R., 2006, Decomposition methods for large linear discrete ill-posed problems, J. Comput. Appl. Math., ARTICLE IN PRESS.

Bert W. Rust, 2000, Parameter selection for constrained solutions to Ill-posed problems, Comput. Sci. Stat., **32**, 333-347.

Bjorck, A., 1990, Least Squares methods Handbook of Numerical Analysis vol I, ed P G Ciarlet and J. L. Lions (Amsterdam: Elsevier).

David Kincaid, D., Cheney, W., 1991, Numerical Analysis. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California.

Grafarend, E. W., and Ardalan, A. A., 1999b, World Geodetic Datum 2000, J. Geodesy, **73**, 611-623.

Hansen P. C., 1990, Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve SIAM Review in.

Hansen P. C., 1992, Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equations of

Surveying and Geomatics Engineering University of Tehran (In Persian).

Safari, A., Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2005, A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: The geoid of Iran , J. Geodyn., **39** , 545-568.

Schwarz, K. P., 1979, Geodetic Improperly Posed Problems and Their Regularization, Bolletino di Geodesia e Scienze Affini, **38**, No.3, pp.389-416.

Tikhonov, A. N., 1963, Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, Soviet Math. Dokl., 4 , pp. 1035-1038; English translation of Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 151 (1963), pp. 501-504.

Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. A., 1977, Solutions of Ill-posed Problems. Winston & Sons, Washington, ISBN 0470991240.

Wahba, G., 1980, Ill-Posed problems : numerical and statistical method for mildly, moderately and severely ill-posed problems with noisy data, University of Wisconsin, Technical Report No. 595.

Wenzel, H. G., 1998, Ultra hochauflösende Kugelfunktionsmodelle GPM98A und GPM98B des Erdschwerefeldes. In: Progress in Geodetic Science,W. Freeden (ed.) pp. 323-331, Shaker Verlag, Aachen 1998.

Zhdanov, M. S., 2002, Geophysical inverse theory and regularization problems: Elsevier, Amsterdam-New York-Tokyo, 628 pp.

first kind, Inverse Problems 8:849-872. Printed in the UK.

Hansen, P. C., 1996, Rank-Deficient and Discrete Ill-posed problems. Doctoral Dissertation. Department of mathematical modeling building 305, technical university of Denmark, Dk-2800 Lyngby, Denmark.

Hansen, P. C., 1998, Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems, SIAM, Philadelphia. USA.

Hansen, P. C., 2001, Regularization tools; A MATLAB package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. Department of masthematical modeling building 305, technical university of Denmark, Dk-2800 Lyngby, Denmark.

Hansen, P. C., 2001, The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems; invited chapter in P. Johnston (Ed.), Computational Inverse Problems in Electrocardiology, WIT Press, Southampton, 2001; pp. 119-142.

Hansen, P. C., Koldborg, J., and Rodriguez Giuseppe 2006, An adaptive pruning algorithm for the discrete L-curve criterion, J. Comput. Appl. Math., ARTICLE IN PRESS.

Hansen, P. C., and O'Leary, D. P:, 1993, The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems, SIAM J. Sci. Comput., **14**, 1487-1503.

Kaipio, J., and Somersalo, E., 2004, Statistical and computational inverse problem. Springer verlag.

Kern, M., 2003, An analysis of the combination and downward continuation of satellite, airborne and terrestrial gravity data. Ph.D. thesis. Department of Geomatics engineering, university of Calgary, Alberta, Canada.

Kincaid, D.,Cheney, W., 1991, "Numerical Analysis", Brooks/Cole Publishing Company.

Lason, C.L., Hanson R.J., 1974, Solving least square peoblems. ENGLEWOOD CLIFFS, NEW JERSEY. USA.

Pich, R., 2004, Regularization operator for multi-dimensional inverse problems with kronecker product structure, ECCOMAS.

Phillips, D. L., 1962, A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, J. Assoc. Comput. Mach., **9**, 84-97.

Safari, A., 2004, Ellipsoidal boundary value problem for geoid computations via modulus of gravity, astronomical longitude, astronomical latitude, and satellite altimetry observations. Ph.D. thesis. Department of