

## حل مسئله تراوش با روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا (DSC)

رضا عطارنژاد<sup>۱\*</sup> و محمود ربانی بیدگلی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشیار دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

<sup>۲</sup>دانش آموخته کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۵/۱۱/۲۵، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۸/۸/۲۱، تاریخ تصویب ۸۸/۹/۳)

### چکیده

در این مقاله، به بررسی مسئله تراوش در محیط همگن به کمک روش عددی انتگرال حلقوی منفرد مجزا پرداخته می‌شود. الگوریتم انتگرال حلقوی منفرد مجزا<sup>۱</sup> از سال ۱۹۹۹ به بعد برای حل عددی مسائل مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است. زیربنای اصلی این الگوریتم، تئوری پخش و انتشار امواج است. این الگوریتم، دقت روش‌های کلی و انعطاف‌پذیری روش‌های محلی را در حل مسائل مکانیک سیالات و مکانیک جامدات را دارد. در این مقاله در ابتدا موضوع تراوش در یک محیط دوبعدی ساده و سپس در زیر سدهای بتنی و سدهای بتنی با پرده آبیند با معادله حاکم لاپلاس برای اولین بار به روش DSC و با استفاده از هسته شانون تنظیم‌شده، مورد تحلیل قرار گرفته و جواب‌های حاصل از این روش با روش تفاضلات محدود مقایسه شده‌اند؛ نتایج حاکی است که در حل معادله لاپلاس، با پذیرش حجم عملیات بیشتر (انتخاب عرض نوار محاسباتی بزرگتر (M)) و بهینه‌سازی عامل T، این روش جواب‌های دقیق‌تری نسبت به روش تفاضلات محدود دارد.

**واژه‌های کلیدی:** انتگرال حلقوی منفرد مجزا، تئوری پخش، تئوری موجک، هسته شانون تنظیم‌شده، تراوش، معادله لاپلاس

### مقدمه

دلتهای دیراک است که به عنوان تابعی شناخته می‌شود که در یک دامنه مشخص که در آن مقدار ندارد، قابل انتگرال‌گیری است. دیراک، اولین شخصی بود که خواص این تابع را در جلسات تدریس مکانیک کوانتومی، با صراحت تشریح کرد. تحلیل سری‌های متعامد عمومی این تابع، نخستین بار توسط Walter [۱۰] مطالعه شده است. با انتخاب مناسب عوامل به کار رفته در هسته DSC، این روش، دقت قابل کنترلی را برای مسئله ایجاد کرده و انعطاف‌پذیری چشمگیری در مدل‌سازی هندسه‌های پیچیده و شرایط مرزی به دست می‌دهد. جایگزین‌های دیگر روش DSC نظیر روش کلی، روش محلی، گالرکین، Collocation و تفاضلات محدود، می‌توانند از نقطه آغازین منفرد استنباط شوند. بنابراین الگوریتم DSC یک الگوی متحد برای این چنین روش‌های عددی ارائه می‌کند.

معادلات حاکم بر جریان دوبعدی و مسئله تراوش، معادلات دیفرانسیل جزئی از نوع بیضوی یا سهموی هستند که اغلب نسبت به متغیر مستقل، همگن و خطی هستند. به طور کلی روش‌های حل معادلات دیفرانسیل در مسائل مختلف تراوش یا به صورت تحلیلی و یا نیمه تحلیلی یا مدل‌سازی‌اند. همچنین طراحی و بهینه‌سازی

یک روش عددی جدید که دارای انعطاف‌پذیری روش‌های محلی و دقت روش‌های کلی است، الگوریتم انتگرال حلقوی منفرد مجزا (DSC) است. این روش از سال ۱۹۹۹ به بعد برای حل مسائل مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است. زیربنای اصلی این الگوریتم، تئوری پخش [۱] و تئوری موجک [۲] است. این الگوریتم در حل مسائل مکانیک سیالات و مکانیک جامدات مورد استفاده قرار گرفته است. به طور کلی این روش علاوه بر اینکه راه حل متفاوتی را برای مسائل تکینه ارائه می‌دهد، قادر است که برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به عنوان یک الگوی برتر و مفید مورد استفاده قرار گیرد. در حال حاضر روش DSC، در تعدادی از مسائل علمی و مهندسی به کار برده شده است. از آن جمله می‌توان به مسائل کوانتوم [۳]، مسائل فیزیک کلاسیک [۴]، تحلیل فرایندهای تصادفی، شبیه‌سازی جریان سیالات در دامنه‌های ساده و پیچیده [۵ و ۶]، تشکیل طرحواره‌های نانو مقیاس در دامنه‌های دایره‌ای [۷]، اشاره کرد. در تحلیل سازه‌ها، روش DSC تنها الگوریتم عددی موجود برای حل آن دسته از مسائلی است که نیاز به پیش‌بینی فرکانس‌های بالای ارتعاش را دارند [۸-۹] و [۴]. یکی از توزیع‌هایی که در این روش استفاده می‌شود، تابع

توزیع (پخش) در نظر گرفته و  $\eta(t)$  یک المان از فضای تابع آزمون خواهد بود. در این صورت انتگرال حلقوی منفرد به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t-x)\eta(x)dx \quad (۱)$$

در این رابطه،  $T(t-x)$  یک هسته منفرد است. بر اساس شکل و اجزای هسته  $T$ ، انتگرال حلقوی منفرد  $(F(t))$  یک توزیع مرکزی برای بسیاری از مسائل علمی و مهندسی است. انواع هسته‌های منفرد که در مسائل مختلف کاربرد دارند، به این قرار است:

#### الف - هسته‌های نوع هیلبرت

این هسته بیشتر در مسائل انتشار امواج، پرتونگاری و غیره کاربرد دارند و فرم کلی آنها به این ترتیب است:

$$T(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n > 0) \quad (۲)$$

#### ب - هسته‌های نوع دلتا

این نوع هسته‌ها در حل عددی معادلات دیفرانسیل کاربرد عمده دارند، شکل عمومی این هسته‌ها به این شکل است:

$$T(x) = \delta^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (۳)$$

به دلیل تکنیکی هسته‌ها و غیر قابل محاسبه بودن آنها با کامپیوتر، یک تقریب  $T_\alpha$  برای تابع توزیع  $T$  مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} T_\alpha(x) \rightarrow T(x) \quad (۴)$$

که  $\alpha_0$  یک حد عمومی است.

برای حل معادله لاپلاس، که موضوع تحقیق حاضر است، از هسته‌های نوع دلتای دیراک که برای حل معادلات دیفرانسل با مشتقات جزئی به کار می‌روند، استفاده می‌شود. بنابراین اگر  $T(x) = \delta(x)$  باشد،  $T_\alpha(x)$  نیز از نوع دلتا بوده و خواهیم داشت:

$$F_\alpha(t) = \sum_k T(t-x_k) f(x_k) \quad (۵)$$

$\{x_k\}$  یک مجموعه مناسب از نقاط مجزای شبکه است که این تقریب روی آنها تعریف می‌شود و  $F_\alpha(t)$  یک تقریب برای  $F(t)$  است. دو نمونه مختلف هسته دلتا که در مسائل مختلف کاربرد دارند، در ادامه معرفی می‌شوند:

سازه‌ها و فرآیندهای مهندسی اغلب بر اساس تئوری و آزمایش و تجربه انجام می‌شوند. با توجه به اینکه تجربیات مهندسی اغلب بسیار پرهزینه هستند و نیز بسیاری از مسائل طراحی مهندسی قابل بررسی توسط روش‌های تحلیلی نبوده یا تحلیل آنها با دشواری‌های زیادی همراه است، بنابراین مدل‌سازی عددی نقش بسیار مهمی را در تحلیل این نوع مسائل بر عهده دارد. بیشتر تلاش‌ها در این زمینه، بر توسعه روش‌های کلی یا محلی برای حل مسائل مختلف وابسته به زمان یا مستقل از زمان، تمرکز یافته‌اند. در حالت کلی، روش‌های کلی از روش‌های محلی دقت بیشتری دارند، در حالی که روش‌های محلی انعطاف‌پذیری بیشتری در مدل‌سازی هندسه پیچیده و شرایط مرزی مختلف دارند. از انواع روش‌های عددی محلی در حل مسئله تراوش می‌توان روش اجزا محدود، تفاضلات محدود و المان مرزی را نام برد. روش اجزای محدود مش‌بندی پیچیده دارد که این موضوع در جریان با سطح آزاد نمود بیشتری دارد و این روش را با مشکلات عمده‌ای مواجه می‌کند. همچنین روش المان مرزی در محیط‌های غیر همگن کارایی ندارد. به هر حال از میان روش‌های عددی، روش تفاضلات محدود جامعیت بیشتری در مدل‌سازی این پدیده دارد.

در این مقاله مسئله تراوش به وسیله الگوریتم جدید انتگرال حلقوی منفرد مجزا (DSC) حل شده است و در واقع یک روش جدید همراه با تعیین عوامل آن برای حل معادله لاپلاس ارائه شده است. در ابتدا برای تعیین دقت این روش و از آنجا که مسئله تراوش در محیط‌های با هندسه و شرایط مرزی پیچیده جواب دقیق ندارد، این پدیده در یک محیط دوبعدی ساده بررسی می‌شود و پس از آن معادله لاپلاس در زیر سدهای بتنی و سدهای بتنی با پرده آبنند حل می‌شود.

#### الگوریتم عددی انتگرال حلقوی منفرد مجزا (DSC)

این الگوریتم، یک روش عمومی برای حل عددی کانولوشن منفرد است. با به کارگیری و اختصاص دادن یا تقریب ساختار یک هسته منفرد، DSC می‌تواند یک الگوریتم مؤثر، با دقت و قابل اعتماد برای کاربردهای مختلف باشد [۱۱]. از آن جا که پایه و مبنای این روش، تئوری پخش<sup>۲</sup> است، بنابراین تابع  $T$  را به عنوان تابع

## هسته‌های نوع دلتای شانون

این تنظیم‌کننده سبب می‌شود که هسته شانون، قابلیت توزیع ملایم‌تری داشته و از نظر عددی برای استفاده در روش محلی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، عملکرد بسیار مناسبی نشان دهد [۱۲].

برای تقریب زدن مشتقات یک تابع نسبت به متغیرهای فضایی در یک نقطه مجزای مشخص، DSC به طور معمول یک ترکیب خطی وزن‌دار از مقادیر تابع در  $2M+1$  نقطه (M نقطه در سمت چپ و M نقطه در سمت راست نقطه مورد نظر) در جهت متغیرهای فضایی استفاده می‌کند که M نیمه عرض نوار محاسباتی است. m امین مشتق تابع  $f(x)$  در i امین نقطه به این شکل است:

$$f^{(m)}(x_i) \approx \sum_{k=-M}^M C_k^{(m)} \cdot f(x_i + k) \quad (12)$$

$$i = 0, 1, \dots, N - 1$$

$C_k^{(m)}$ : m امین مشتق هسته دلتای شانون تنظیم‌شده در نقطه k است و N تعداد کل نقاط شبکه در دامنه محاسباتی است. با نوشتن این رابطه به شکل ماتریسی، بخش دیفرانسیلی ماتریس ذکر شده به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$[D_q^m]_{i,j} = \begin{cases} C_{j-i}^{(m)} & \text{for } -M < j-i < M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

برای  $j = -M, \dots, N-1+M$ ،  $i = 0, \dots, N-1$  یک ماتریس دیفرانسیلی  $D_q^{(m)}$   $N \times (2M + N)$  است. q جهت دیفرانسیل‌گیری ( $q = x, y$ ) و m مرتبه مشتق‌گیری است. توسعه و گسترش به ابعاد بالاتر (دو بعد) با نمایش تحقق می‌یابد.  $C_k^{(m)}$  به صورت تحلیلی قابل محاسبه است، به عنوان مثال برای حالت  $x \neq x_k$  و با فرض هسته دلتای شانون تنظیم‌شده خواهیم داشت:

$$\delta_{\frac{x}{\Delta}, \sigma}^{(1)}(x_m - x_k) = \frac{\cos \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{(x - x_k)} x$$

$$\exp \left( -\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2} \right) - \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)^2} x \quad (14)$$

در زمینه اعمال شرایط مرزی در این روش، بررسی‌های زیادی انجام شد و این نتیجه به دست آمد که این روش برای اعمال شرایط مرزی، روابطی بین نقاط خارج از دامنه و نقاط داخل دامنه به دست می‌آورد. به عنوان مثال برای شرط مرزی معادل تکیه‌گاه گیردار از

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \langle \frac{\sin \alpha x}{\pi x}, \eta(x) \rangle = \eta(0) \quad (6)$$

هسته‌های نوع دلتای دیریکله:

$$\frac{\sin \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) (x - x') \right]}{2\pi \sin \left[ \frac{1}{2} (x - x') \right]} \quad (7)$$

نتایج بررسی روی معادلات به کار رفته در مسائل مهندسی و موضوعات حل شده با این روش نشان می‌دهد که استفاده از هسته دلتای شانون<sup>۳</sup> با اعمال تغییراتی، نتایج بسیار مطلوبی را به دست می‌دهد [۱۲]. با استفاده از الگوریتم نمونه‌گیری درونبایی در فرکانس Nyquist یعنی  $\alpha = \frac{\pi}{\Delta}$  هسته دلتای شانون به این ترتیب خواهد بود:

$$\frac{\sin [\alpha (x - x')] }{\pi (x - x')} \rightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta} (x - x_k)}{\frac{\pi}{\Delta} (x - x_k)} \quad (8)$$

اهمیت تئوری نمونه‌گیری شانون این است که با جداسازی و شبکه‌بندی مجموعه نامحدودی از مقادیر  $\{f(x_k)\}$ ، می‌توان یک تابع  $L^2$  (نوار محدود) را روی یک خط افقی پوشش داد. توالی و تناوب و نظم این هسته به کمک یک تنظیم‌کننده<sup>۴</sup>، بهبود می‌یابد [۱۱، ۱۲].

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} R_\sigma = 1 \quad (9)$$

برای تناوب دلتا، بر اساس رابطه (۴)، خواهیم داشت:

$$\int \lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_\alpha(x) R_\sigma(x) dx = R_\sigma(0) = 1 \quad (10)$$

شرط  $R_\sigma(0) = 1$  یکی از نیازهای اختصاصی برای نظم‌دهنده از نوع دلتا است. یک تنظیم‌کننده عمومی و تیپ که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابع از کلاس شوارتز<sup>۵</sup> بوده و با استفاده از آن هسته دلتای شانون به این قرار خواهد بود:

$$\frac{\sin \left( \frac{\pi}{\Delta} \right) (x - x_k)}{\left( \frac{\pi}{\Delta} \right) (x - x_k)} \rightarrow \frac{\sin \left( \frac{\pi}{\Delta} \right) (x - x_k)}{\left( \frac{\pi}{\Delta} \right) (x - x_k)} e^{-((x - x_k)^2 / 2\sigma^2)} \quad (11)$$

### معادله لاپلاس (حرکت آب در خاک)

در صورتی که حرکت آب در یک خاک همگن و ایزوتروپیک مورد مطالعه باشد، معادله (۱۸) به معادله لاپلاس تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial K_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial K_y}{\partial y} = 0$$

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (19)$$

اگر  $K_x = K_y$  باشد، داریم:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$

و شرایط مرزی حاکم بر مسائل مورد نظر از نوع دیریکله یا نیومن هستند.  
شرط مرزی دیریکله:

$$h = Const \quad (21)$$

شرط مرزی نیومن:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = Const \quad \text{or} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = Const \quad (22)$$

### استخراج فرمولاسیون معادله لاپلاس به کمک روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا

برای حل معادله لاپلاس به کمک روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا از فرمولاسیون زیر استفاده می‌شود.  
در کناره‌های محیط تامورد نیاز  $N=M$  از روش تفاضلات محدود داریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta y^2 (T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2 (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}) = 0$$

$$2T_{i,j} (\Delta y^2 + \Delta x^2) = \Delta y^2 (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2 (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) \quad (23)$$

$$T_{i,j} = \frac{\Delta y^2 (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2 (T_{i,j+1} + T_{i,j-1})}{2(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$$

در داخل محیط از مورد نیاز  $N \geq M$  از روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا داریم:

$$\sum_{k=-w}^{K-w} T_{i+k,j} \delta_{x,\sigma}^2 ((x_m - x_{m+k}), y_m) +$$

$$\sum_{k=-w}^w T_{i,j+k} \delta_{y,\sigma}^2 (x_m, (y_m - y_{m+k})) = 0$$

$$\Rightarrow [\delta_{x,\sigma}^2 (x_m, y_m) + \delta_{y,\sigma}^2 (x_m, y_m)] T_{i,j} =$$

$$- \sum_{k=-w}^{K-w} T_{i+k,j} \delta_{x,\sigma}^2 ((x_m - x_{m+k}), y_m) +$$

$$\sum_{k=-w}^w T_{i,j+k} \delta_{y,\sigma}^2 (x_m, (y_m - y_{m+k}))$$

$$, k \neq 0 \quad (24)$$

بسط متقارن و برای تکیه‌گاه ساده از بسط غیر متقارن استفاده می‌شود.

اما در زمینه اعمال شرایط مرزی نیومن و دیریکله، هیچ رابطه خاصی بین نقاط خارج از دامنه و نقاط داخل دامنه وجود ندارد. بنابراین از یک روشی ترکیبی به نام DSC-FD استفاده می‌شود. به این ترتیب که در گوشه‌های محیط که این شرایط حاکمند از روش تفاضلات محدود و در داخل آن از روش DSC استفاده می‌شود.

### معادله دیفرانسیل جریان آب در خاک (اشباع)

در صورتی که به جای مؤلفه‌های بردار سرعت در معادله پیوستگی جریان با استفاده از قانون دارسی شیب آبی را قرار دهیم (معادله ۱۵)، معادله دیفرانسیل جریان آب در خاک اشباع حاصل می‌شود.

$$U = -K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$V = -K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \quad (15)$$

$$W = -K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (-K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (-K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (-K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z}) = -S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (16)$$

در صورتی که در سیستم چاه یا چشمه وجود داشته باشد داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z}) \pm Q = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (17)$$

Q: دبی چشمه یا چاه (برای چشمه علامت مثبت و برای چاه علامت منفی)

معادله (۱۷) کلی‌ترین حالت حرکت آب در خاک‌های اشباع است.

با توجه به اینکه در این مقاله، فقط جریان‌های دائمی در حالت دوبعدی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، این معادله (۱۷) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y}) = 0 \quad (18)$$

می‌رسند. از آن جا که در مسئله مورد بررسی به علت دوبعدی بودن مسئله، حجم برنامه‌نویسی در حالت مستقیم زیاد و الگوریتم آن در حالات مختلف متفاوت است، بنابراین در این جا از روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات استفاده می‌شود. روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی ساده هستند و به راحتی می‌توان آنها را در برنامه کامپیوتری وارد کرد. هدف این روش‌ها، به دست آوردن جواب از روش تکرار است. از میان روش‌های تکراری می‌توان به روش ژاکوبی و روش گوس سایدل اشاره کرد. حسن روش تکراری گوس سایدل نسبت به روش تکراری ژاکوبی این است که در گام جدید، تکرار در نقاط مجاور از مقادیر جدیدشان استفاده می‌کند و این کار باعث افزایش سرعت همگرایی می‌شود. بنابراین برای حل این معادلات از روش تکرار گوس سایدل استفاده شده است.

بعد از اینکه فرمولاسیون روش در این قسمت استخراج شد و از آنجا که هیچ گونه حل تحلیلی برای مسئله تراوش سد بتنی وجود ندارد، بنابراین یک مثال دوبعدی ساده با معادله حاکم و شرایط مرزی مشابه که دارای حل تحلیلی است، برای نشان دادن دقت و کارایی روش DSC از طریق نشان دادن خطاهای  $L_2$  و  $L_\infty$  بیان می‌شود و سپس در دو مطالعه موردی به بررسی مسئله تراوش در زیر سد بتنی و سد بتنی با پرده آببند پرداخته می‌شود.

### حل معادله لاپلاس در یک محیط دوبعدی ساده

هندس و شرایط مرزی مسئله دوبعدی مورد بررسی در شکل (۱) نشان داده شده است. حل دقیق مسئله به این ترتیب است:

$$h(x, y) = h_b + \frac{(h_u - h_b)}{L_y} \cdot y \quad (28)$$

برای بیان دقت این روش، از دو نوع مقدار خطای  $L_\infty = \max |h_{ij} - h_j|$  و  $L_2 = (\Delta^2 \sum_j (\bar{h}_{i,j} - h_{i,j})^2)^{1/2}$  استفاده شده است. برای بررسی اثر عرض نوار، مقادیر  $W$  برابر با ۸، ۱۶، ۲۰، ۲۴ متناظر با عوامل تنظیم‌کننده  $\sigma/\Delta$  برابر با ۱.۷۵، ۲.۸، ۳.۱، ۴.۷ مورد بررسی قرار گرفت.

در این جا چون هدف حل معادله لاپلاس است، از هسته شانون تنظیم شده استفاده می‌شود:

$$C_{\frac{\pi}{\Delta}\sigma}(x - x_k) = \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{(\frac{\pi}{\Delta})(x - x_k)} e^{-(x-x_k)^2/2\sigma^2} \quad (25)$$

که مشتق مرتبه دوم آن در معادله قرار می‌گیرد. یعنی برای  $x \neq x_k$  داریم:

$$\begin{aligned} C_{\frac{\pi}{\Delta}\sigma}^2(x - x_k) &= -\frac{\frac{\pi}{\Delta} \sin \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{(x - x_k)} \times e^{-(x-x_k)^2/2\sigma^2} \\ &- 2 \frac{\cos \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{(x - x_k)^2} \times e^{-(x-x_k)^2/2\sigma^2} \\ &- 2 \frac{\cos \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{\sigma^2} \times e^{-(x-x_k)^2/2\sigma^2} \\ &+ 2 \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{\Delta} \times e^{-(x-x_k)^2/2\sigma^2} + \\ &\frac{\pi}{\Delta} (x - x_k)^3 \\ &\frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{\Delta} \times e^{-(x-x_k)^2/2\sigma^2} \\ &\frac{\pi}{\Delta} (x - x_k) \sigma^2 \\ &+ 2 \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{\Delta} \times (x - x_k) e^{-(x-x_k)^2/2\sigma^2} \\ &\frac{\pi}{\Delta} \sigma^4 \end{aligned} \quad (26)$$

و برای  $x = x_k$  داریم:

$$C_{\frac{\pi}{\Delta}\sigma}^2(0) = -\frac{1}{3} \frac{3 + \frac{\pi^2}{\Delta^2} \sigma^2}{\sigma^2} \quad (27)$$

برای حل این معادلات روش‌های مختلفی وجود دارد. این روش‌ها عبارتند از روش مستقیم و روش تکراری. برخی از روش‌های مشهور مستقیم عبارتند از قانون کرامر و روش حذفی گوس. عیب بزرگ این روش‌ها، عملیات ریاضی بسیار زیاد آنها برای ایجاد یک جواب است. روش‌های پیشرفته‌ای پیشنهاد شده‌اند که به زمان محاسبات کمتری نیاز دارند، ولی به طور تقریبی همه آنها عیب‌هایی دارند. اغلب این روش‌ها با یک یا چند شرط محدود می‌شوند که این شرایط عبارتند از: دستگاه مختصات دکارتی، قلمروی مستطیلی، اندازه ماتریس ضرایب، ظرفیت ذخیره بالا، شرایط مرزی و مشکل برنامه‌نویسی در آنها. در هر حال برخی از روش‌های مستقیم پیشرفته در پاره‌ای از کاربردها ابزار مفیدی به نظر

بررسی‌ها نشان می‌دهد که با انتخاب عوامل  $M=20$  و  $\Gamma_x=\Gamma_y=3.1$  ضمن اینکه حجم محاسبات اضافه نمی‌شود، جواب‌های با دقت بالا برای حل معادله لاپلاس حاصل می‌شود. بنابراین در همه برنامه‌های نوشته شده از این عوامل استفاده می‌شود.

جدول ۲: خطای  $L_\infty$  برای حل معادله لاپلاس.

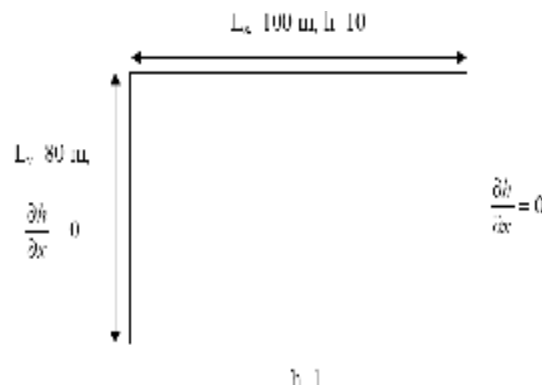
N	DSC			
	M=8	M=16	M=20	M=24
9	0.0318	-	-	-
17	0.0178	0.0158	-	-
21	0.0146	0.013	0.0127	-
25	0.012333	0.010933	0.010733	0.010733
33	0.0095	0.0084	0.0082	0.0082
50	0.006416	0.005517	0.005516	0.005416

### حل معادله لاپلاس در زیر سد بتنی و سد بتنی با پرده آببند به کمک روش ترکیبی انتگرال حلقوی منفرد مجزا و روش تفاضلات محدود

همان طور که در شکل‌های (۲) و (۳) مشهود است، ارتفاع آب در بالادست برابر ۳۰ متر و در پایین دست برابر ۱۰ متر، عرض سد برابر ۲۰ متر، عرض محیط بالادست برابر ۵۰ متر، عرض محیط پایین دست برابر ۵۰ متر، ارتفاع سپر آببند برابر ۱۰ متر و ارتفاع محیط خاک برابر ۲۰ متر در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از حل معادله لاپلاس در تعدادی از نقاط زیر سد بتنی و سد بتنی با پرده آببند به کمک روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا و مقایسه این نتایج با روش تفاضلات محدود در دقت‌های مورد نظر در نمودارهای (۴)، (۵)، (۶)، (۷)، (۸) آمده است. نقاط مورد بررسی در شکل‌های (۲) و (۳) نشان داده شده‌اند.

همان طور که در شکل‌های بالا مشاهده می‌شود، اختلاف بین دو روش (DSC و FD) با انتخاب عوامل  $M$  و  $\Gamma$  بالا بسیار اندک است و با افزایش نرخ همگرایی این اختلاف کمتر نیز می‌شود. البته با پذیرش حجم عملیات بیشتر و ریزتر شدن شبکه (انتخاب عرض نوارهای محاسباتی بزرگ‌تر  $(M)$ ) به طور حتم روش DSC با توجه به حل دقیق برای محیط دوبعدی ساده جواب‌های دقیق‌تری را ارائه می‌دهد.

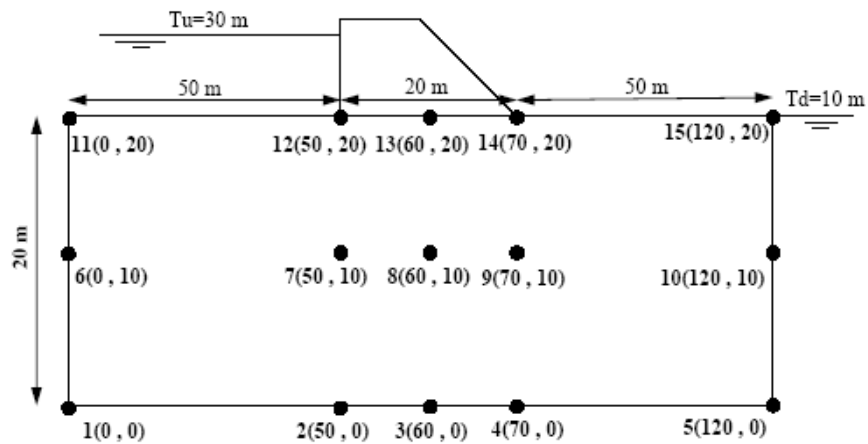
در جدول‌های (۱) و (۲) خطاهای  $L_2$  و  $L_\infty$  بین  $h$ ‌های محاسبه شده از روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا و حل دقیق (معادله ۲۸) برای شش مقدار مختلف  $N$  آمده است. مشاهده می‌شود که برای تعداد نقاط شبکه برابر با ۱۷، نتایج دارای دقتی تا دو رقم اعشار است. هنگامی که تعداد نقاط شبکه بیشتر می‌شود، دقت افزایش می‌یابد. هنگامی که تعداد نقاط شبکه به ۵۰ می‌رسد، دقت عددی افزایش مشهودی یافته است. این موضوع نشان‌دهنده نرخ بالای همگرایی این روش است. همچنین همان طور که مشاهده می‌شود، در یک تعداد ثابت، نقاط شبکه با افزایش  $M$  دقت افزایش می‌یابد. بنابراین حد پایینی  $N$  برابر با ۵۰ برای سد بتنی و سد بتنی با پرده آببند در نظر گرفته می‌شود. از این رو می‌توان گفت که این روش، در حل معادله لاپلاس با بهینه‌سازی مقادیر  $N$ ،  $M$  و بخصوص عامل  $\Gamma$  دقت بالایی دارد. همچنین با توجه به ماهیت روش DSC، برای یک مقدار  $N$  و  $M$  مساوی، تنها در یک مقدار  $\Gamma$  خاص، هر دو روش DSC و FD جواب یکسانی دارند. با این تفاوت که با تغییر عامل  $\Gamma$  و تعیین  $\Gamma$  بهینه، روش DSC جواب‌های دقیق‌تری نسبت به جواب‌های روش FD دارد.



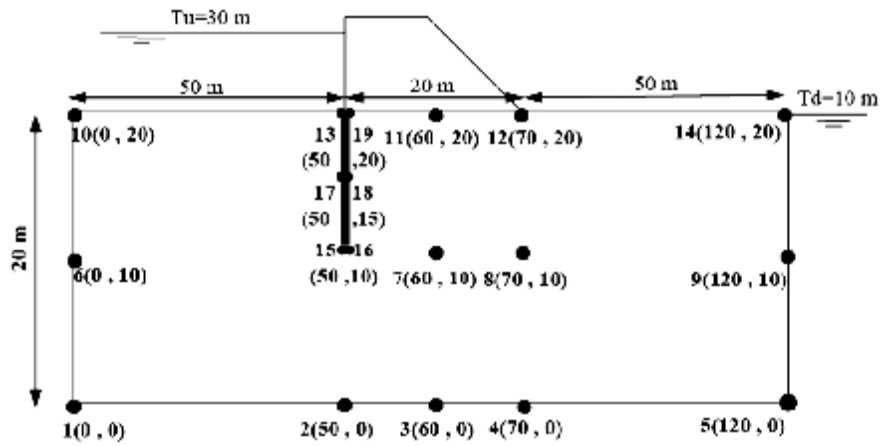
شکل ۱: هندسه و شرایط مرزی محیط دوبعدی.

جدول ۱: خطای  $L_2$  برای حل معادله لاپلاس.

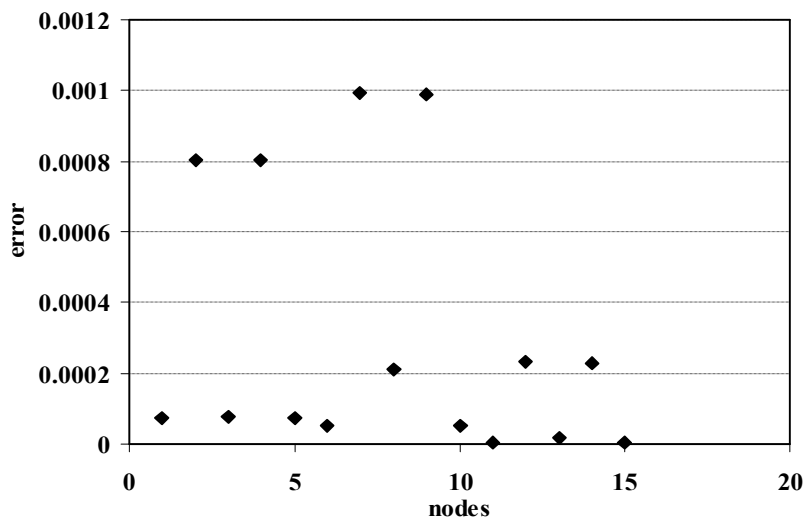
N	DSC			
	M=8	M=16	M=20	M=24
9	0.012665	-	-	-
17	0.009255	0.008294	-	-
21	0.007506	0.006739	0.006634	-
25	0.006298	0.005662	0.005592	0.005558
33	0.004851	0.004299	0.004237	0.004228
50	0.003018	0.002837	0.002805	0.002793



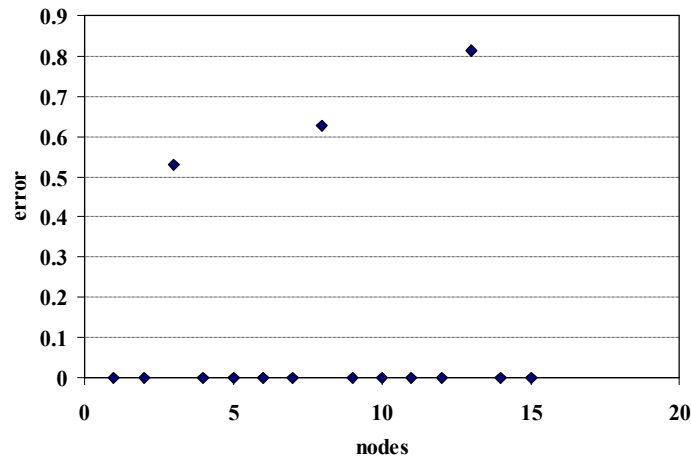
شکل ۲: شمایی از نقاط مورد بررسی در زیر سد بتنی.



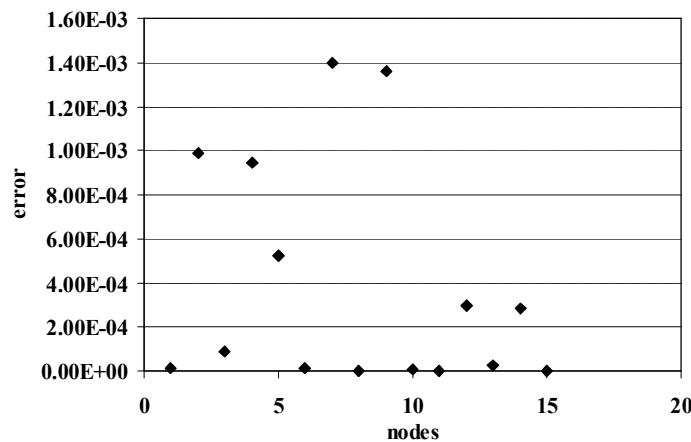
شکل ۳: شمایی از نقاط مورد بررسی در زیر سد بتنی با پرده آببند.



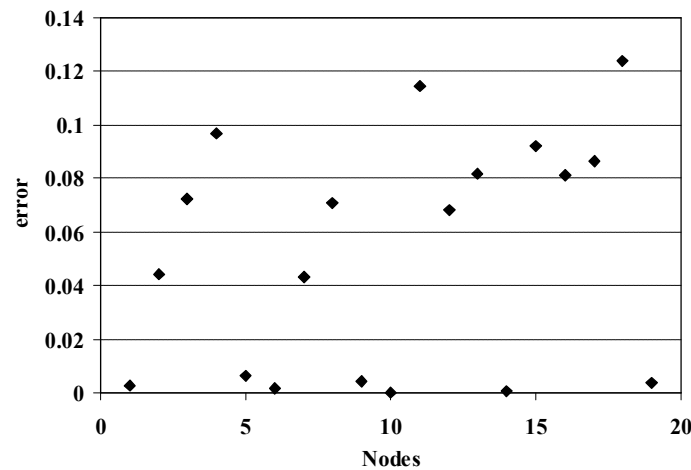
شکل ۴: اختلاف بین مقادیر حاصل از روش FD و DSC-RSK (Rx=Ry=3.1) با استفاده از شبکه ۵۰×۵۰ گره‌ای در دقت همگرایی برابر با e-8 در نقاط زیر سد بتنی.



شکل ۵: اختلاف بین مقادیر حاصل از روش DSC-RSK(Rx=Ry=3.1) و FD با استفاده از شبکه ۱۰۰ × ۱۰۰ گره‌ای در دقت همگرایی برابر با e-7 در نقاط زیر سد بتنی.

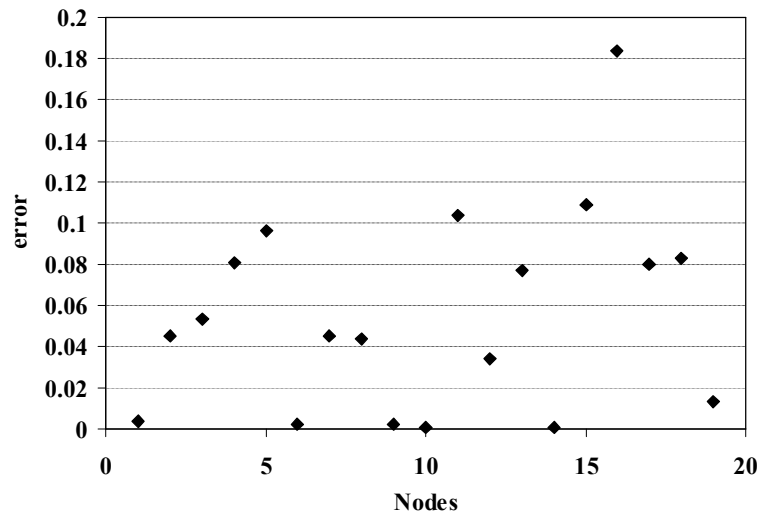


شکل ۶: اختلاف بین مقادیر حاصل از روش DSC-RSK(Rx=Ry=3.1) و FD با استفاده از شبکه ۱۰۰ × ۱۰۰ گره‌ای در دقت همگرایی برابر با e-8 در نقاط زیر سد بتنی.



شکل ۷: اختلاف بین مقادیر حاصل از روش DSC-RSK(Rx=Ry=3.1) و FD با استفاده از شبکه ۲۰۰ × ۲۰۰ گره‌ای در دقت همگرایی برابر با e-6 در نقاط زیر سد بتنی با پرده آببند.





شکل ۸: اختلاف بین مقادیر حاصل از روش DSC-RSK ( $R_x=R_y=3.1$ ) و FD با استفاده از شبکه ای شامل ۴۰۰ گره در جهت x و ۷۵ گره در جهت y در دقت همگرایی برابر با  $e-6$  در نقاط زیر سد بتنی با پرده آبیند.

مشاهده شود، اما در اینجا با ریزتر کردن شبکه، چون این روش از روش تفاضلات محدود به سمت روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا پیش می‌رود، اختلاف بین دو روش بیشتر نمایان می‌شود و شکل (۶) نسبت به شکل (۴) که هر دو دارای یک معیار همگرایی هستند مقدار اختلاف بیشتری را نشان می‌دهد، البته این اختلاف جزئی است و با افزایش تعداد نقاط نوار محاسباتی (M)، این اختلاف کم می‌شود.

۴- با توجه به شکل‌های سد بتنی، با افزایش نرخ همگرایی، حداکثر اختلاف بین دو روش در زیر سد بتنی در حد E-3 است که بسیار ناچیز است.

۵- شکل‌های (۷) و (۸) اختلاف بین دو روش DSC و FD (در زیر سد بتنی با پرده آبیند) را در دو نوع شبکه‌بندی مختلف (اولی: ۲۰۰ گره در هر جهت و دومی: ۴۰۰ گره در جهت x و ۷۵ گره در جهت y) در نرخ همگرایی E-6 نشان می‌دهد. حداکثر اختلاف مشاهده شده بین این دو روش در شکل‌ها برابر  $0.18$  است که روی نقطه انتهایی پرده آبیند اتفاق می‌افتد. البته با افزایش نرخ همگرایی، این اختلاف نیز کمتر خواهد شد.

۶- اگر چه روش DSC در شبکه‌های ریزتر دارای جوابی‌های اندکی دقیق‌تر نسبت به روش FD است، اما با ریزتر شدن شبکه، حجم عملیات در این روش بسیار بیشتر از روش FD است. بنابراین می‌توان با توجه به مرتبه خطای تقریباً مشابه دو روش برای شبکه‌های درشت‌تر و

## تفسیر نتایج

۱- روش DSC برای حل معادله لاپلاس در زیر یک سد بتنی و یک سد بتنی با پرده آبیند برای اولین بار مورد استفاده قرار گرفته است. در ابتدا از آنجا که هیچ گونه حل تحلیلی برای مسئله تراوش سد بتنی وجود ندارد، یک مثال ساده با معادله حاکم و شرایط مرزی مشابه که دارای حل تحلیلی است، برای نشان دادن دقت و کارایی روش DSC از راه نشان دادن خطاهای  $L_2$  و  $L_\infty$  بیان شد. نتایج نشان می‌دهد که با افزودن مقادیر M، N و انتخاب r بهینه دقت روش به مراتب افزایش می‌یابد. پس از تعیین دقت این روش، معادله لاپلاس در زیر یک سد بتنی و یک سد بتنی با پرده آبیند حل شد. مقایسه نتایج با روش تفاضلات محدود نشان می‌دهد که در نرخ‌های همگرایی بالای روش گوس سایدل و در شبکه‌های درشت‌تر اختلاف دو روش کم می‌شود و به حدود  $e-3$  می‌رسد. در شبکه‌های ریزتر چون روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا جواب‌های دقیق‌تری دارد (با توجه به حل دقیق)، اختلاف بین این روش و روش تفاضلات محدود، نمود بیشتری دارد.

۲- از شکل‌های (۵) و (۶) مشخص می‌شود که در یک شبکه‌بندی یکسان (به طور مثال  $100 \times 100$ )، هر چه معیار همگرایی بزرگ‌تری انتخاب شود، اختلاف بین دو روش کمتر می‌شود

۳- در یک معیار همگرایی خاص اگر شبکه کوچک‌تر شود (مقایسه شکل‌های ۴ و ۶) باید اختلاف کمتری

**تقدیر و تشکر**

مرسوم بودن روش FD در این کاربرد، از همان روش

تفاضلات محدود استفاده کرد.

در این جا لازم است از زحمات استاد ارجمند، مرحوم

دکتر هاشم مهرآذین برای کمک و همیاری‌شان در مراحل

اولیه این تحقیق تقدیر و تشکر کنیم.

**مراجع**

- 1 - Schwartz, L. (1951). *Theore des Distributions*, Hermann, Paris.
- 2 - Wei, G. W. (1988). "Quasi-wavelets and quasi interpolating wavelets." *Chem. Phys. Lett.* Vol. 296, PP. 215-222
- 3 - Wei, G. W. (2000). "Solving quantum eigenvalue problems by discrete singular convolution." *J. Phys. B.* 33, PP. 343-359.
- 4 - Wei, G. W. (2001). "Vibration analysis by discrete singular convolution." *J. Sound Vibration*, Vol. 244, PP. 535-553.
- 5 - Wan, D. C. and Wei, G. W. (2000). "Numerical study of Euler and Navier-Stokes equations by efficient discrete singular convolution method." *ACTA Mech. Sin.*, Vol. 16, No. 223.
- 6 - Wan, D. C., Zhou, Y. C. and Wei, G. W. (2002). "Numerical solutions for unsteady incompressible flow using discrete singular convolution method." *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 38, No. 789..
- 7 - Guan, S., Lai, C. H. and Wei, G. W. (2001). "Bessel- Fourier analysis of patterns in a circular domain." *Physica D.* 151, PP. 83-98.
- 8 - Wei, G. W., Zhao, Y. B. and Xiang, Y. (2001). "The determination of the natural frequencies of rectangular plates with mixed boundary conditions by discrete singular convolution." *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 43, PP. 1731-1746.
- 9 - Zhao, Y. B. and Wei, G. W. and Xiang, Y. (2002). "Discrete singular convolution for the prediction of high frequency vibration of plates." *Int. J. Solids, Structures*, Vol. 39, PP. 65-88.
- 10 - Walter, G.G. and Blum, J. (1979). "Probability density estimation using delta sequences." *Ann. Statist.* Vol. 7 PP. 328-340.
- 11 - Wei, G. W. (1999). "Discrete singular convolution for the Fokker-Planck equation." *J. Chem. Phys.* Vol. 110, PP. 8930-8942.
- 12 - Wei, G. W. (2001). "A new algorithm for solving some mechanical problems." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 190, PP. 2017-2030.

**واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن**

- 1 - Discrete Singular Convolution
- 2 - Distribution
- 3 - Shannon
- 4 - Regulator
- 5 - Schwartz