کمینه‌سازي مجموع بیشینه‌هاي زودکرد و دیرکرد در مسئله زمان‌بندي ماشین‌هاي موازي یکسان

قاسم مصلحي*[۱] و مهدي مهنام[۲]
[۱] دانشیار دانشکده مهندسي صنایع و سیستم‌ها- دانشگاه صنعتي اصفهان
[۲] دانش‌آموخته کارشناسي ارشد مهندسي صنایع و سیستم‌ها- دانشگاه صنعتي اصفهان
(تاریخ دریافت ۸۷/۴/۲۲ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۸۹/۵/۱۰ ، تاریخ تصویب ۸۹/۷/۲۷)

چکیده

در این مقاله مسئله کمینه‌سازي مجموع بیشینه زودکرد و دیرکرد بر ماشین‌هاي موازي یکسان مورد بررسي قرار گرفته است. در این مقاله نشان داده شده است که این مسئله NP-hard است. با استفاده از حدود بالا و پایین و اصول غلبه مناسبي که براي مسئله توسعه داده شده است، یک رویه شاخه وکران براي دستیابي به زمان‌بندي‌هاي بهینه ارائه شده است. در ادامه براي حل این مسئله، از دو روش فراابتکاري شامل الگوریتم ژنتیك و بهینه‌سازي گروه ذرات براي یافتن توالي مناسب مسئله در زمان کوتاه استفاده شده است. با تولید ۱۹۲۰ نمونه به طور تصادفي، کارآیي روش شاخه وکران و با ٤٤٨٠ نمونه، کارآیي الگوریتم‌هاي ابتکاري و فراابتکاري مورد بررسي قرار گرفته است. نتایج نشان مي‌دهند که الگوریتم شاخه وکران در اندازه‌هاي کوچک و متوسط و الگوریتم ژنتیك پیشنهادي در اندازه‌هاي بزرگ به طور مؤثري عمل مي‌کنند.

واژه‌هاي کلیدي: زمان‌بندي، زودکرد/ دیرکرد، ماشین‌هاي موازي، روش شاخه وکران، الگوریتم‌هاي فرا ابتکاري

مقدمه

زمان‌بندي، یک فرآیند تصمیم‌گیري است که با تخصیص بهینه منابع به فعالیت‌هاي اصلي تولید در طول زمان در ارتباط است [۱]. مسائل زمان‌بندي را مي‌توان از دو دیدگاه مدیریت و مشتري مورد بررسي قرار داد. از دید مدیریت، کمینه‌سازي معیارهایي مانند بیشینه زمان تکمیل و بارگذاري ماشین، مورد توجه است؛ در حالي که از دیدگاه مشتري تحویل به موقع در موعد تحویل در اولویت قرار دارد که در سیستم تولید به موقع (JIT[۱]) کاربرد زیادي دارد. بنابراین توجه نکردن به موعد تحویل، ممکن است سبب از دست دادن مشتري یا هزینه تأخیر و از طرف دیگر، اتمام کار زودتر از موعد تحویل آن ممکن است سبب هزینه یا فساد محصول شود. به عبارت دیگر، دیرکرد بیان‌کننده رضایت نداشتن مشتري و زودکرد نشان‌دهنده عملکرد موجودي است.

از طرف دیگر، در بیشتر خطوط تولید و مونتاژ، اغلب براي جلوگیري از توقف خط به ویژه در گلوگاه‌ها از چندین ماشین یا پردازشگر به طور موازي استفاده مي‌شود. بنابراین بهبود زمان‌بندي کارها در گلوگاه تولید به بهبود کل سیستم کمك مي‌کند. همچنین در محیط‌هاي خدماتي مي‌توان به زمان‌بندي بارگیري کشتي‌ها و تخصیص بیماران به گروه‌هاي پزشکي اشاره کرد. علاوه بر این، زمان‌بندي ماشین‌هاي موازي یک مبحث مهم در علوم رایانه براي تخصیص کارآیي وظایف به پردازشگرها و استفاده از ریزپردازنده‌هاي موازي است.

در مسئله کلاسیک، زمان‌بندي ماشین‌هاي موازي n کار با زمان فرآیند معین باید روي m ماشین تحت عملیات قرار گیرند. در این مسئله هر کار مي‌تواند روي یکي از ماشین‌هاي بیکار مورد پردازش قرار گرفته و با تکمیل کار، ماشین بیکار شده و کار از سیستم خارج مي‌شود. بنابراین در حالي که در مسئله زمان‌بندي تک ماشین فقط تعیین ترتیب بهینه کارها مطرح است، در مسائل زمان‌بندي با ماشین‌هاي موازي، با دو مرحله تصمیم‌گیري تخصیص کارها به ماشین‌ها و تعیین توالي کارها بر هر ماشین رو به رو هستیم. مسائل ماشین‌هاي موازي مي‌توانند به سه صورت یکسان[۲]، یکنواخت[۳] و نامرتبط[٤] در نظر گرفته شوند. در ماشین‌هاي یکسان، مدت زمان فرآیند کارها مستقل از ماشین است؛ در حالي که در دو حالت دیگر زمان فرآیند کارها روي ماشین‌ها بر اساس نوع ماشین تغییر مي‌کند.

در این تحقیق به بررسي مسئله زمان‌بندي ماشین‌هاي

* نویسنده مسئول : تلفن : ۰۳۱۱ -۳۹۱۵۵۰۹ , فاکس : ۰۳۱۱ -۳۹۱۵۵۲۶ ، Email: moslehi@cc.iut.ac.ir

موازي با هدف كمينه‌كردن مجموع بيشينه‌هاي زودكرد و ديركرد به عنوان يک معيار جديد و كاربردي پرداخته مي‌شود. ابتدا از الگوريتم شاخه وكران براي يافتن جواب بهينه در اندازه‌هاي كوچک و متوسط و الگوريتم‌هاي ابتكاري براي رسيدن به جواب‌هاي مناسب در مدت زمان كوتاه استفاده شده است. سپس از الگوريتم‌هاي فراابتكاري براي دستيابي به جواب‌هاي مناسب در زمان معقول در مسائل با اندازه بزرگ مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

ساختار كلي مقاله در ادامه بدين شرح است: در بخش بعدي مروري بر ادبيات موضوع انجام مي‌گيرد. در بخش سوم تعريف مسئله، فرضيه‌ها و پيچيدگي آن بررسي مي‌شود. در بخش چهارم، يک الگوريتم شاخه وكران و در بخش پنجم الگوريتم‌هاي فراابتكاري براي حل مسئله مورد نظر ارائه مي‌شود. چگونگي توليد مسائل تصادفي و كارآيي الگوريتم‌ها در بخش ششم مورد بررسي قرار مي‌گيرد. درآخرين بخش نيز به نتيجه‌گيري و ارائه پيشنهادها براي تحقيقات آتي پرداخته خواهد شد.

مروري بر ادبيات موضوع

مسئله زمان‌بندي زودكرد/ ديركرد در طول دهه‌هاي اخير مورد توجه بسياري از محققان بوده است. اين مسئله براي اولين بار توسط سيدني [۲] به شكل كمينه‌سازي بيشينه جريمه زودكرد يا ديركرد معرفي شد. پس از آن طيف گسترده‌اي از مسائل بر اساس انواع جريمه‌ها، موعد تحويل و بيكاري عمدي مورد مطالعه قرار گرفتند. بيكر و اسكودر [۳] مرور جامعي بر انواع اين مسائل داشته‌اند.

هنگامي كه موعد تحويل كارها مجزا است، زمان‌بندي بهينه ممكن است شامل زمان‌هاي بيكاري عمدي باشد. حالتي كه امكان اعمال بيكاري وجود نداشته باشد، طيف گسترده‌اي از كاربردهاي صنعتي را در برمي‌گيرد. اين حالت مي‌تواند نتيجه محدوديت‌هاي تكنولوژيكي ناشي از هزينه زياد نگهداري ماشين به صورت بيكار باشد، بدين معني كه اين هزينه بيش از سود حاصل از پردازش سريع‌تر كارها است. در مواردي نيز كه ظرفيت ماشين در مقايسه با تقاضا محدود است، ماشين همواره در حالت كار نگه داشته مي‌شود و در نتيجه بيكاري عمدي مجاز نيست [٤].

تحقيقات متعددي روي مسئله زمان‌بندي زودكرد/ ديركرد بدون در نظرگرفتن بيكاري عمدي انجام گرفته و روش‌هاي حل دقيق و ابتكاري متعددي براي آن ارائه شده است. از بين روش‌هاي حل دقيق مي‌توان به مطالعات والنته و آلوس [٤]، عبدالرزاق و پاتس [٥] و عزيزاوغلو و همكاران [٦] اشاره كرد كه همگي از روش شاخه وكران استفاده كرده‌اند. در بين رويكردهاي ابتكاري نيز مطالعات الميدا و سنتنو [۷]، والنته و آلوس [۸] و امهلاح [۹] اهميت ويژه‌اي دارند كه از روش‌هاي ابتكاري محلي و روش‌هاي فراابتكاري تركيبي استفاده كرده‌اند.

بيشتر مطالعات زمان‌بندي زودكرد/ديركرد، معيارهاي كمينه مجموع[5] را مدنظر قرار داده‌اند. ممكن است در نتايج حاصل از كمينه كردن ميانگين هزينه‌ها، مقادير بزرگ زودكرد يا ديركرد براي بعضي از كارها وجود داشته باشد كه سبب اشكال در سيستم توليدي مي‌شود. اين مشكل با استفاده از اهداف مبتني بر كمينه‌سازي بيشينه[6] كه هدف خود را كاهش واريانس هزينه‌ها قرار داده‌اند، مرتفع مي‌شود. از جمله اين معيارها، مي‌توان به مجموع بيشينه‌هاي زودكرد و ديركرد (ET_{max}) اشاره كرد. اين معيار براي اولين بار مورد توجه امين نيري و مصلحي [۱۰] قرار گرفت. وي يک الگوريتم شاخه وكران براي اين مسئله در حالت تک ماشين ارائه كرده است. همچنين مصلحي و همكاران [۱۱] با ارائه اصول غلبه كارآ و يک روش ابتكاري جديد به عنوان حد بالا، الگوريتم شاخه وكران ارائه‌شده را بهبود بخشيده‌اند. از آن جا كه ET_{max} يك معيار نامنظم است، با استفاده از بيكاري عمدي مي‌توان به جواب‌هاي بهتري دست يافت. توكلي‌مقدم و همكاران [۱۲] يك الگوريتم بهينه براي به دست آوردن مقدار بيكاري عمدي در يك توالي معلوم با معيار ET_{max} ارائه كردند. در ادامه، توكلي‌مقدم و همكاران [۱۳] با استفاده از اين الگوريتم يك روش شاخه وكران براي اين مسئله توسعه داده‌اند. به تازگي، مهنام و مصلحي [۱۴] معيار ET_{max} را در زمان‌بندي تک ماشين با فرض ورود غيرهمزمان كارها و نكويي‌مهر و مصلحي [۱۵] اين مسئله را با در نظرگرفتن زمان‌هاي آماده‌سازي وابسته به توالي با روش‌هاي دقيق و ابتكاري مورد بررسي قرار داده‌اند.

از طرف ديگر، رويه‌هاي متعدد حل دقيق و ابتكاري بر مسئله زمان‌بندي ماشين‌هاي موازي ارائه شده است. لم و كينگ [١٦] و موكوتوف [١٧] مرور جامعي بر مطالعات زمان‌بندي ماشين‌هاي موازي و معيارها و روش‌هاي حل به كار رفته در اين مسئله داشته‌اند. اين مسئله در حالتي

که موعد تحویل به شکل مجزا توسط محققان بسیاري از جمله هیدي و زو [۱۸]، عزیزاوغلو و کیرکا [۱۹]، بالاکریشنان و همکاران [۲۰]، زو و هیدي [۲۱] و ونتورا و کیم [۲۲] مورد بررسي قرار گرفته است. کداد-سیدهام و همکاران [۲۳] حدود پایین و بالاي مناسبي براي مسئله زمان‌بندي زودکرد / دیرکرد در ماشین‌هاي موازي ارائه کرده‌اند. توکلي‌مقدم و همکاران [۲٤] براي مسئله زمان‌بندي ماشین‌هاي موازي نامرتبط با هدف کمینه‌کردن کل جریمه‌هاي زودکرد و دیرکرد و هزینه‌هاي ماشین یک مدل ریاضي و یک الگوریتم ژنتیک ارائه کرده‌اند. در ادامه، توکلي‌مقدم و همکاران [۲۵] یک الگوریتم جستجوي پراکنده چند هدفه براي این مسئله توسعه داده‌اند. جولاي و همکاران [۲٦] نیز یک الگوریتم ابتکاري براي مسئله زمان‌بندي ماشین‌هاي موازي یکسان با هدف کمینه‌سازي کل دیرکرد با کارهاي قابل تقسیم و زمان‌هاي راه‌اندازي وابسته به توالي ارائه و کارآیي آن را با توجه به نتایج مدل ریاضي ارائه شده نشان داده‌اند.

تعریف مسئله

در مسئله زمان‌بندي با هدف کمینه‌کردن مجموع بیشینه زودکرد و دیرکرد بر ماشین‌هاي موازي یکسان مجموعه $J= \{۱، ۲، ۳، ...، n\}$ شامل n کار باید روي m ماشین موازي یکسان انجام شوند، به طوري که هر کار j داراي مدت زمان فرآیند p_j و موعد تحویل مشخص d_j است. با در نظر گرفتن زمان تکمیل کار j به صورت C_j مقادیر زودکرد و دیرکرد به ترتیب به صورت زیر به دست مي‌آیند:

$$E_j= \max\{۰ , d_j-C_j\} \quad (۱)$$

$$T_j= \max\{۰ , C_j-d_j\} \quad (۲)$$

و تابع هدف ET_{max} به شکل زیر تعریف مي‌شود:

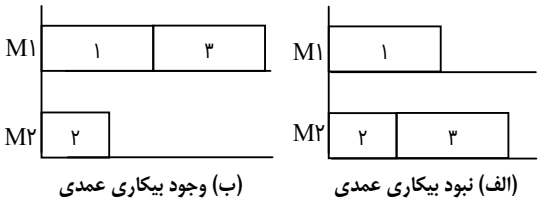
$$ETmax= Emax + Tmax \quad (۳)$$

که E_{max} بیشینه زودکرد و T_{max} بیشینه دیرکرد کارها است. در ادامه، فرضیه‌هاي زیر نیز در مسئله در نظر گرفته شده است:

- ماشین‌هاي موازي، یکسان و همواره در دسترس هستند.
- ماشین در هر لحظه فقط قادر به انجام یک کار است.
- هر کار فقط شامل یک مرحله بوده و نمي‌تواند به طور همزمان روي چند ماشین مورد پردازش قرار گیرد.
- همه کارها در لحظه صفر در دسترس بوده و انقطاع کارها مجاز شمرده نمي‌شود.
- بیکاري عمدي براي کار و ماشین مجاز نیست.
- مدت زمان آماده‌سازي مستقل از ترتیب کارها بوده و در زمان پردازش در نظر گرفته شده است.

مسئله مورد بررسي بر اساس نمایش سه جزیي به صورت $Pm||ET_{max}$ نشان داده مي‌شود. این تابع هدف نامنظم است، بدین معني که با افزایش زمان تکمیل کارها لزوماً معیار مسئله کاهش نمي‌یابد. ماندل و موشیو [۲۷] ثابت کرده‌اند که مسئله $Pm||E_{max}$ داراي پیچیدگي NP-hard است. با توجه به رابطه(۳)، با تعیین موعدهاي تحویل در یک نمونه خاص به گونه‌اي که امکان دیرکرد هیچ کاري وجود نداشته باشد، مسئله $Pm||ET_{max}$ به $Pm||E_{max}$ تبدیل مي‌شود. بنابراین مسئله $Pm||ET_{max}$ که حالت کلي‌تري از $Pm||E_{max}$ است، حداقل پیچیدگي NP-hard را دارد.

از آنجایي که بیکاري عمدي بر اساس فرضیه‌هاي مسئله مجاز نیست، مدت زمان بیکاري در بین کارهاي مجاور و یا هنگامي که کاري در دسترس باشد، مجاز شمرده نمي‌شود. شکل (۱) حالتي از بیکاري ماشین که در نتیجه تخصیص کارها به ماشین ایجاد مي‌شود را نشان مي‌دهد. بنابراین با در نظر گرفتن فرض مجاز نبودن بیکاري عمدي، ترتیب کارها نشان‌دهنده تخصیص کارها به ماشین‌ها نیز هست؛ بدین صورت که هر کار به ماشین با کمترین زمان فرآیند اختصاص مي‌یابد[۲۷].



(ب) وجود بیکاری عمدی (الف) نبود بیکاری عمدی

شکل ۱: بررسی تأثیر تخصیص کارها در ایجاد بیکاری عمدی.

روش شاخه وکران

در این بخش، با توجه به پیچیدگي مسئله، یک الگوریتم شاخه وکران براي به دست آوردن جواب بهینه مسئله ارائه شده است. این روش مبتني بر استراتژي جستجو، حدود پایین و بالا و اصول غلبه‌اي است که براي مسئله به صورت کارآ توسعه داده شده است.

استراتژي جستجو

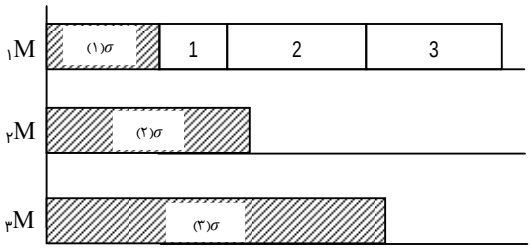
در اين الگوريتم، همه ترتيب كارها بررسي شده و جواب بهينه به دست مي‌آيد. در اين رويه σ نشان‌دهنده ترتيب جزيي كارها و σ' مجموعه كارهاي زمان‌بندي نشده است. $ET_{max}(\sigma)$ نشان‌دهنده مقدار تابع هدف حاصل از ترتيب جزيي σ، $LB(\sigma)$ حد پايين حاصل از كارهاي زمان‌بندي نشده و $f(\sigma)$ برابر بيشينه مقادير $ET_{max}(\sigma)$ و $LB(\sigma)$ است. در اين الگوريتم، ترتيب كارها به صورت پيشرو[7] بررسي شده و از استراتژي عمقي[8] براي انتخاب گره براي شاخه‌زدن استفاده شده است. در هر مرحله با داشتن يك زمان‌بندي جزيي از كارها $\sigma = J_{[1]}J_{[2]}...J_{[K]}$، با اضافه‌كردن كارهاي زمان‌بندي نشده به انتهاي مجموعه σ كه شرايط امكان‌پذيري و اصول غلبه را ارضا مي‌كنند، شاخه‌هاي جديد زده مي‌شود. در نتيجه يک كار از مجموعه كارهاي زمان‌بندي‌نشده (σ') كاسته و به توالي جزيي σ منتقل مي‌شود. هنگامي كه هيچ كاري براي زمان‌بندي باقي نماند، σ يك زمان‌بندي كامل است. در طول رويه جستجو، مقدار تابع هدف بهترين زمان‌بندي با حد بالا مقايسه و به هنگام مي‌شود.

حد پايين

چنانچه پيش از اين اشاره شد، معيار ET_{max} از مجموع بيشينه زودكرد و بيشينه ديركرد كارها به دست مي‌آيد. بنابراين مي‌توان براي به دست آوردن حد پايين الگوريتم شاخه وكران، مسئله را به دو زيرمسئله كمينه‌سازي بيشينه زودكرد ($Pm||E_{max}$) و ديركرد ($Pm||T_{max}$) تجزيه و با جمع جواب‌هاي بهينه حاصل، حد پايين را محاسبه كرد. ثابت شده است كه مسئله اول يک مسئله NP-hard است [۲۷] و نشان داده مي‌شود كه مسئله دوم نيز پيچيدگي NP-hard را دارد(پيوست الف)؛ بنابراين حل بهينه هر يك از زيرمسئله‌ها با استفاده از يك الگوريتم چندجمله‌اي[9] امكان‌پذير نيست. در نتيجه از مجموع حد پايين دو زيرمسئله براي محاسبه حد پايين مسئله $Pm||ET_{max}$ استفاده شده است.

حد پايين زيرمسئله $Pm||E_{max}$

در اين زيرمسئله، كارهاي زمان‌بندي نشده بر اساس قاعده MST مرتب شده و با توجه به اينكه بيكاري عمدي مجاز نيست، پردازش آن‌ها فقط روي ماشين با كمترين زمان تخصيص‌يافته در نظر گرفته مي‌شود. در ترتيب MST كارها بر اساس اختلاف موعد تحويل و مدت زمان پردازش به شكل غيرنزولي مرتب مي‌شوند. شرايط و نحوه محاسبه حد پايين اين زيرمسئله به طور نمونه در شكل (۲) نشان داده شده است. $\sigma(k)$ نشان‌دهنده ترتيب جزيي كارهاي زمان‌بندي شده روي ماشين kام است.



شكل ۲: نمايش نحوه‌محاسبه حدپايين زيرمسئله $Pm||E_{max}$.

حد پايين زيرمسئله $Pm||T_{max}$

در اين حالت ابتدا يک حد پايين براي بيشينه زمان تكميل كارهاي باقيمانده محاسبه مي‌شود. موكوتوف [۱۷] بهترين حد پايين مسئله كمينه‌سازي بيشينه زمان تكميل كارها را به اين ترتيب ارائه كرده است:

$$C^*_{\max} \le C_m = \max\left(\frac{1}{m}\sum_{i\in\sigma'} p_i, \max_{i\in\sigma'}\{p_i\}, p_m + p_{m+1}\right) \qquad (۴)$$

كه C^*_{max} مقدار كمينه بيشينه زمان تكميل كارها است. بخش اول بر اساس زمان‌بندي كارهاي باقيمانده با فرض انقطاع و بخش دوم با در نظر گرفتن بيشينه زمان پردازش كارهاي زمان‌بندي نشده است. در بخش سوم نيز كارهاي باقيمانده بر اساس قاعده LPT[10] مرتب شده و مدت زمان پردازش دو كار m و $m+1$ مورد استفاده قرار مي‌گيرد. با در نظر گرفتن مقدار حد پايين بيشينه زمان تكميل كارهاي زمان‌بندي نشده (C_m) و بيشينه موعد تحويل (d_{max}) آن‌ها، حد پايين بيشينه ديركرد به اين شكل به دست مي‌آيد:

$$L_{T\max} = \max(t_{\min} + C_m - d_{\max}, 0) \qquad (۵)$$

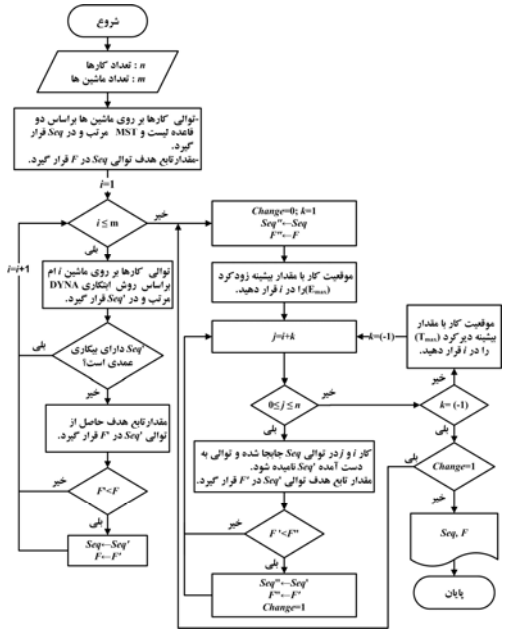
كه t_{min} مقدار كمينه زمان تخصيص يافته به ماشين‌ها است.

اين حد پايين با وجود سادگي سرعت محاسبه بالا و كارآيي مناسبي در مقايسه با حدود پايين ديگر دارد.

حد بالا

در اين بخش، با هدف به دست آوردن جواب‌هاي مناسب در زمان كوتاه، يک روش ابتكاري با نام MDP[11]

ارائه مي‌شود. بدين منظور، ابتدا كارها بر اساس قاعده MST مرتب شده و به ترتيب به ماشين‌ها تخصيص داده مي‌شوند. اين قاعده با توجه به تحقيقات اوليه نسبت به ساير قواعد برتري دارد. سپس اين توالي در دو مرحله بهبود مي‌يابد. در مرحله اول كارهاي هر ماشين بر اساس روش ابتكاري DYNA در حالت تك‌ماشين [۱۰] مرتب مي‌شوند. از آن جايي كه تغيير مكان كارها ممكن است سبب ايجاد بيكاري عمدي شود، امكان‌پذيري توالي در هر ماشين طبق فرضيه‌هاي مسئله بررسي شده و در صورت نبود بيكاري عمدي در توالي و بهبود تابع هدف جايگزين حد بالا مي‌شود. در مرحله دوم، از يك رويه جستجوي محلي براي يافتن همسايگي‌هاي بهتر استفاده مي‌شود. بدين منظور با الهام از روش ابتكاري فاطمي قمي و جولاي [۲۸]، از جابه‌جايي جفتي كارها براي بهبود حد بالا استفاده مي‌شود. ابتدا كارها با مقدار بيشينه زودكرد و ديركرد در توالي مشخص شده، سپس تعويض جفتي كار با مقدار E_{max} با كارهاي سمت راست و كار با مقدار T_{max} با كارهاي سمت چپ توالي بررسي شده و الگوريتم، بار ديگر به نقطه آغاز برمي‌گردد. الگوريتم تا زماني ادامه مي‌يابد كه هيچ همسايگي بهتري وجود نداشته باشد. روند نماي كلي الگوريتم در شكل (۳) نشان داده شده است.



شكل ۳: روندنماي كلي روش ابتكاري MDP.

قواعد غلبه

در اين بخش، برخي ويژگي‌هاي شرايط بهينگي مسئله، مورد بررسي قرار مي‌گيرد. در ادامه فرض مي‌شود كه به ترتيب با افزودن كارهاي i و j به انتهاي σ، توالي جزيي σ_{ij} و با تعويض موقعيت كارهاي i و j يک توالي جديد به شكل σ_{ji} به دست مي‌آيد.

قاعده همساني

اين قاعده مبتني بر وجود همزمان دو يا چند ماشين با كمترين زمان تكميل بين ماشين‌ها است.

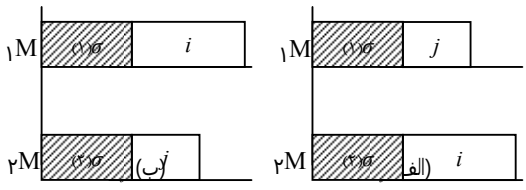
لم ۱ (قاعده غلبه ۱)- اگر زمان تكميل كارها روي دو ماشين M_1 و M_2 برابر بوده و كوچک‌تر يا مساوي زمان تكميل ماشين‌هاي ديگر باشد، به طوري كه

$$t_{M1} = t_{M2} \le t_k \quad \forall k = 1,2,...,m \qquad (6)$$

آنگاه تنها كافي است كه يكي از دو توالي جزيي σ_{ij} و σ_{ji} مورد بررسي قرار گيرد.

اثبات- با توجه به قاعده چيدن كارها روي ماشين با كمترين زمان تكميل، واضح است كه قرار گرفتن دو كار i و j روي هر يک از دو ماشين M_1 و M_2، تأثيري در تابع هدف و حتي ترتيب كارهاي بعدي ندارد(شكل٤). بنابراين مي‌توان به دلخواه هر يک از دو ترتيب جزيي را انتخاب كرد.

در اين حالت، براي سادگي كار با انديس كوچک‌تر به ماشين با انديس كوچک‌تر تخصيص داده شده است.



شكل ۴: نمايش دو توالي جزيي σ_{ij} و σ_{ji} در قاعده همساني.

جابه‌جايي جفتي كارهاي مجاور

از آنجا كه مسئله ماشين‌هاي موازي حالت عام‌تر مسئله تك‌ماشين است، مي‌توان از اصول غلبه اين مسئله با در نظر گرفتن شرايط پيچيده‌تر در ماشين‌هاي موازي استفاده كرد. مصلحي و همكاران [۱۱] قضايايي براي تقدم و تأخر دو كار در تعيين توالي ارائه كرده‌اند. فرض كنيد دو كار دلخواه i و j در زمان t نامزد قرار گرفتن روي يک

ماشین هستند، به طوري که $E_{max}(ij)$ بیشینه زودکرد و $T_{max}(ij)$ بیشینه دیرکرد کارهاي i و j در توالي جزيي σ_{ij} است. مي‌توان روابطي به دست آورد که مقدم بودن یک کار نسبت به کار دیگر را نشان دهد.

لم ۲- در مسئله $ET_{max}||1$، اگر $E_{max}(ij)>E_{max}(ji)$ و $T_{max}(ij)\geq T_{max}(ji)$ یا $T_{max}(ij)>T_{max}(ji)$و$E_{max}(ij)\geq E_{max}(ji)$ باشند، آنگاه $ET_{max}(\sigma_{ij})\geq ET_{max}(\sigma_{ji})$ است [۱۳].

براي پیداکردن شرایطي که فرض‌هاي لم ۲ را فراهم کند، ترکیب زودکرد و دیرکرد دو کار i و j در ترتیب (ij) و (ji)، ۱۶ حالت را ایجاد مي‌کند. این ۱۶ حالت توسط مصلحي و همکاران [۱۱] مورد بررسي قرار گرفته است. بر خلاف حالت تک‌ماشین که تعویض جفتي دو کار تأثیري بر بررسي توالي‌ها ندارد، در ماشین‌هاي موازي ممکن است گره توالي جزيي σ_{ij} بر اساس این شرایط قطع شده و توالي جزيي σ_{ji} نیز به دلیل به وجود آمدن بیکاري عمدي در نظر گرفته نشده و در نتیجه بخشي از درخت جستجو بررسي نشود. بنابراین باید به دنبال شرایطي بود که تعویض دو کار تأثیري بر زمان تکمیل کارهاي بعدي نگذارد. در این مسئله در دو لم ۳ و ٤ مي‌توان از شرایط لم ۲ براي کاهش فضاي جستجو استفاده کرد.

لم ۳ (قاعده غلبه ۲)- در صورتي که مدت زمان فرآیند دو کار i و j در توالي σ_{ij} برابر باشد، امکان بررسي قواعد غلبه حالت تک‌ماشین وجود دارد.

اثبات- واضح است که با جابه‌جایي دو کار با مدت زمان پردازش برابر، حتي روي دو ماشین متفاوت، زمان تکمیل دیگر کارها ثابت خواهد ماند. از طرف دیگر در این شرایط این اطمینان وجود دارد که هر دو توالي σ_{ij} و σ_{ji} نیز بررسي مي‌شوند.

لم ٤ (قاعده غلبه ۳)- در صورتي که k ماشین با کمترین زمان تکمیل در توالي جزيي σ، t_k زمان تکمیل ماشین k و t_s دومین مقدار کمینه زمان تکمیل در بین m ماشین در توالي σ و دو کار i و j به ترتیب دو کار افزوده شده به انتهاي توالي جزيي σ روي ماشین k (σ_{ij}) باشند، اگر حداقل یکي از شرایط (۷)، (۸) یا (۹) برقرار باشد، امکان بررسي شرایط غلبه حالت تک‌ماشین وجود دارد.

$$p_j \leq t_s - t_k \quad (۷)$$

$$p_j \leq p_i \quad (۸)$$

$$t_k + p_i + p_j \leq C_m - p_{\max} \quad (۹)$$

که در آن C_m برابر حد پایین C_{max} مطابق رابطه (٤) و p_{max} بیشینه زمان فرآیند کارهاي باقیمانده است.

اثبات- در این قضیه امکان جابه‌جایي دو کار متوالي i و j روي ماشین k بررسي مي‌شود. از آن جایي که جابه‌جایي دو کار متوالي روي یک ماشین تأثیري بر زمان تکمیل کارهاي بعدي ندارد، تنها امکان ایجاد بیکاري عمدي بررسي مي‌شود. در صورت برقراري رابطه (۷)، همواره $t_k+p_j\leq t_s$ و در نتیجه $C_j\leq t_s$ است. بنابراین امکان ظهور بیکاري عمدي در اثر جابه‌جایي دو کار i وj در توالي جزيي σ_{ji} وجود ندارد. همچنین مطابق رابطه (۸) از آن جهت که$p_i\geq p_j$ بوده و توالي جزيي σ_{ij} روي ماشین k بدون وجود بیکاري عمدي بررسي شده و در نتیجه $t_k+p_i\leq t_s$ است، با جابه‌جایي دو کار i و j نیز $t_k+p_j\leq t_s$ بوده و این موضوع نمي‌تواند سبب ایجاد بیکاري عمدي و در نتیجه نبود بررسي توالي جزيي σ_{ji} شود. از طرف دیگر، رابطه (۹) بر اساس این مفهوم است که همه ماشین‌ها حداقل تا آستانه زماني C_m-p_{max} به طور کامل مشغول هستند و اگر کارهاي i و j پیش از این زمان اجرا شوند، امکان ایجاد بیکاري عمدي روي هیچ یک از ماشین‌ها وجود ندارد. ابتدا فرض کنید که C_m برابر حد پایین بیشینه زمان تکمیل کارها باشد، بنابراین زمان شروع آخرین کار حداقل در نقطه C_m-p_{max} خواهد بود. بنابراین هیچ ماشین دیگري مانند l وجود ندارد که زمان تکمیلي کمتر از مقدار C_m-p_{max} داشته باشد؛ زیرا در این صورت براي دوري از بیکاري عمدي، آخرین کار باید روي ماشین l قرار گیرد.

رویکرد فراابتکاري

رویکرد اصلي در این تحقیق، بررسي یک روش دقیق براي حل مسئله است، ولي از آن جایي که در این رویکرد با افزایش ابعاد مسئله زمان حل به شکل چشمگیري افزایش مي‌یابد، به کارگیري الگوریتم‌هاي فراابتکاري به ویژه در ابعاد بزرگ، اجتناب‌ناپذیر است. در این راستا، از الگوریتم‌هاي تکاملي به عنوان یکي از کارآترین و پرکاربردترین روش‌هاي فراابتکاري با دو رویکرد متفاوت زمان‌بندي مبتني بر ترتیب[۱۲] و زمان‌بندي مبتني بر اولویت[۱۳] استفاده شده است. در رویکرد مبتني بر ترتیب، یک توالي از کارها مشخص شده و زمان‌بندي بر اساس آن انجام مي‌گیرد؛ در حالي که در رویکرد مبتني بر اولویت،

به هر کار اولويتي نسبت داده شده و کارها بر اساس اولويت زمان‌بندي مي‌شوند. در اين تحقيق، در رويکرد مبتني بر ترتيب از الگوريتم ژنتيک و در رويکرد مبتني بر اولويت از بهينه‌سازي گروه ذرات بهره گرفته شده است.

الگوريتم ژنتيک

الگوريتم ژنتيک (GA[14]) يکي از روش‌هاي بهينه‌سازي تکاملي و الهام گرفته شده از قوانين طبيعي است که اولين بار توسط هالند [۲۹] معرفي شد. اين الگوريتم با يک مجموعه اوليه از جواب‌ها (جمعيت اوليه) شروع مي‌کند. هر يک از اعضاي جمعيت يک کروموزوم ناميده مي‌شود که بيانگر يک جواب مسئله است. کروموزوم‌ها بر اساس معيار عملکرد، مورد ارزيابي قرار گرفته و طي تکرارهاي متوالي تکامل مي‌يابند. براي توليد هر نسل، کروموزوم‌هاي جديد با ترکيب (عملگر تقاطع) يا اصلاح (عملگر جهش) کروموزوم‌هاي نسل پيشين توليد مي‌شوند. اين فرآيند تا رسيدن به معيار توقف الگوريتم ادامه مي‌يابد. در ادامه هر يک از اجزاي الگوريتم ژنتيک ارائه‌شده تشريح مي‌شود.

الف) نمايش کروموزوم: در اين مطالعه هر کروموزوم به شکل رشته‌اي از اعداد غير تکراي از ۱ تا n است. بنابراين هر کار بعد از همه پيش‌نيازها قرار مي‌گيرد. در شکل (۵) يک نمونه کروموزوم نشان داده شده است.

۸	۱	۶	...	۱۵	۱۰	۲	۱۲

شکل ۵: موقعيت تصادفي يك کروموزوم.

ب) جمعيت اوليه: در اين تحقيق دو جواب اوليه با استفاده از دو قاعده توزيع EDD و MST براى بهبود عملکرد الگوريتم ژنتيک به دست آمده و باقيمانده به طور تصادفي توليد شده‌اند.

ج) انتخاب: هدف انتخاب، حذف کروموزوم‌هاي ضعيف و افزايش سرعت همگرايي است. بدين منظور در توليد هر نسل تعدادي از والدين براي توليد فرزندان نسل بعد انتخاب مي‌شوند. در اين صورت کروموزومي که داراي تابع برازندگي بهتر باشد، احتمال بيشتري براي پذيرش به عنوان والد دارد. در اين تحقيق از روش چرخ گردان[15] براي انتخاب والدين استفاده شده است [۳۰]. علاوه بر اين، در اين الگوريتم از استراتژي نخبه‌گرا[16] بهره گرفته شده که در آن بهترين کروموزوم‌ها بدون تغيير ساختار ژني از مراحل قبلي به مرحله کنوني منتقل مي‌شوند.

د) عملگر تقاطع: اين عملگر با ترکيب ويژگي کروموزوم‌ها سبب افزايش همگرايي جامعه به سمت جواب بهينه مي‌شود. عملگر تقاطع در حوزه زمان‌بندي بايد به گونه‌اي باشد که از توليد جواب‌هاي امکان‌ناپذير جلوگيري کند. بدين منظور عملگرهاي LOX[17]، PMX[18] و CYCLE بررسي شده و مشخص شد که عملگر LOX بهترين کارآيي براي مسئله مورد نظر را دارد. ويژگي اين عملگر آن است که تا حد امکان موقعيت کارها نسبت به يکديگر را در توالي حفظ مي‌کند. بدين منظور ابتدا در طول دو کروموزم دو نقطه مشترک، به طور تصادفي تعيين مي‌شود. سپس ژن‌هايي که در والد اول در ناحيه مياني قرار دارند از والد دوم حذف شده و باعث ايجاد حفره‌هايي مي‌شوند. در ادامه حفره‌ها از دو طرف کروموزوم به سمت مرکز هدايت شده تا به ناحيه مياني برسند. در نهايت، ناحيه مياني هر والد با ژن‌هاي ناحيه مياني والد ديگر جايگزين مي‌شود[۳۰]. يک نمونه نحوه عملکرد عملگر LOX در شکل (٦) نشان داده شده است.

P۱:	۳	۷	۵	۸	۴	۶	۹	۱	۲
	۳	H	۵	۸	۴	۶	H	۱	H
	۳	۵	۸	H	H	H	۴	۶	۱
C۱:	۳	۵	۸	۲	۹	۷	۴	۶	۱
P۲:	۵	۶	۳	۲	۹	۷	۸	۱	۴
	۵	H	۳	۲	۹	۷	H	۱	H
	۵	۳	۲	H	H	H	۹	۷	۱
C۲:	۵	۳	۲	۸	۴	۶	۹	۷	۱

شکل ۶: نحوه عملکرد عملگر تقاطع LOX.

ه) عملگر جهش: اين عملگر، کروموزوم جديدي را با تغيير تصادفي تعدادي از اعضاي توالي ايجاد و از همگرايي زودرس جلوگيري مي‌کند. در اين تحقيق از عملگر جهش تعويض[19] استفاده شده است. در اين نوع جهش، دو ژن يک کروموزوم به طور تصادفي انتخاب و مقادير آن‌ها با يکديگر جابه‌جا مي‌شوند. يک نمونه نحوه عملکرد عملگر جهشي تعويض در شکل (۷) نشان داده شده است.

کروموزوم اصلی	۳	۷	۵	۸	۶	۹	۱
کروموزوم جهش یافته	۳	۷	۹	۸	۶	۵	۱

شکل ۷: نحوه عملکرد عملگر جهش تعويض.

و) شرط توقف: حداکثر تعداد نسل‌هايي که بهترين جواب الگوريتم تغيير نکند، معيار توقف الگوريتم است.

بهينه‌سازي گروه ذرات

بهينه‌سازي گروه ذرات (PSO[۲۰])، يک روش بهينه‌سازي تصادفي بر مبناي جمعيت و تکامل است که توسط کندي و ابرهارت [۳۱] توسعه داده شده است. در اين روش، هر جواب مانند يک پرنده در فضاي جستجو است که ذره[۲۱] ناميده مي‌شود. هر ذره برداري دارد که جهت و سرعت پرواز آن را مشخص مي‌کند. ذرات در فضاي جستجو در قالب يک گروه[۲۲] به دنبال بهترين جواب پرواز مي‌کنند. در هر مرحله سرعت هر ذره در فضاي D بعدي به طور پويا و با توجه به تجربيات خود و همکارانش بر اساس رابطه (۱۰) به هنگام مي‌شود و سپس به بردار موقعيت بر مبناي رابطه (۱۱) اضافه مي‌شود. بخش اول معادله (۱۰) ماندگاري سرعت پيشين را نشان مي‌دهد. بخش دوم بيان‌کننده آگاهي ذره از تجربه خود و سومين قسمت، نشان‌دهنده همکاري بين ذرات گروه است.

$$V_{i,t} = W_t \times V_{i,t-1} + C_1 \times Rand \times (P_i - X_{i,t-1}) + C_2 \times rand \times (P_g - X_{i,t-1}) \quad (۱۰)$$

$$X_{i,t} = X_{i,t-1} + V_{i,t} \quad (۱۱)$$

که $V_{i,t}$ سرعت ذره iام در تکرار t و $X_{i,t}$ موقعيت ذره iام در تکرار t است. P_i بهترين جوابي است که ذره در مسير خود به آن رسيده (pbest) و P_g بهترين جواب جهاني در بين ذرات(gbest) است. W وزني است که ماندگاري سرعت قبلي و موازنه بين جستجوي جهاني و محلي را مشخص مي‌کند و پرکاربردترين نحوه استفاده از آن کاهش خطي است [۳۲]. c_1 و c_2 ثابت‌هايي هستند که شتاب ذره به سمت P_i و P_g را مشخص مي‌کنند. $Rand$ و $rand$ نيز دو عدد تصادفي در بازه [۰, ۱] هستند. روند الگوريتم PSO به‌صورت زير است:

۱. گروهي از ذرات با موقعيت و سرعت‌هاي تصادفي در يک فضاي D بعدي از مسئله توليد مي‌شوند.
۲. تابع برازندگي هر ذره ارزيابي مي‌شود.
۳. برازندگي هر ذره با برازندگي pbest آن ذره مقايسه و pbest به هنگام مي‌شود.
٤. برازندگي هر ذره با برازندگي gbest مقايسه و gbest به هنگام مي‌شود.
۵. موقعيت و سرعت ذرات به هنگام مي‌شود.
٦. شرط اختتام بررسي شده اگر برآورده نشده باشد، به گام ۲ باز مي‌گردد.

الف) نمايش ذره: در فرم اولويت، موقعيت هر درايه بردار جواب، نشان‌دهنده کار و مقدار مرتبط با آن بيان‌کننده اولويت آن کار است. ويژگي مهم اين روش آن است که همه ذرات امکان‌پذير هستند. يک ذره مبتني بر اولويت در شکل (۸) نشان داده شده است.

۰/۸	۰/۶	۰/۲	...	۰/۳	۰/۹	۰/۷	۰/۴

شکل ۸: موقعيت تصادفي يک ذره.

ب) جمعيت اوليه: اندازه جمعيت انتخابي وابسته به مسئله بوده و اغلب بين ۲۰ تا ۵۰ است [۳۲]. مشابه الگوريتم ژنتيک از دو الگوريتم ابتکاري EDD و MST استفاده شده و باقيمانده گروه نيز به طور تصادفي توليد شده‌اند.

ج) همسايگي ذرات: چنانچه اشاره شد gbest بهترين جواب جهاني در بين همه ذرات است. اندازه همسايگي بالا، سرعت همگرايي را بالا مي‌برد، در حالي که اندازه همسايگي پايين به جلوگيري از همگرايي زودرس کمک مي‌کند. کندي و همکاران [۳۳] ساختارهاي مختلف همسايگي و تأثيرات آن را بر عملکرد الگوريتم بررسي کرده‌اند. در اين تحقيق از همسايگي اجتماعي که در آن فقط ليستي از ذرات بدون توجه به موقعيت در نظر گرفته مي‌شود، بهره گرفته شده است. بدين منظور در صورتي که پس از تعداد معين g_1 تکرار جواب‌ها بهبود نيابد، همسايگي برداشته شده و الگوريتم به شکل جهاني عمل مي‌کند. اين تصميم، امکان جستجوي مرزهاي بين همسايگي‌ها را نيز فراهم مي‌کند. در نهايت در صورت رسيدن به نقطه بهينه محلي و نرسيدن به جواب‌هاي بهتر پس از g_2 تکرار در حالت دوم، الگوريتم خاتمه مي‌يابد.

آزمايش‌های عددي

در اين بخش برای تحليل کارآيي الگوريتم شاخه‌وکران و روش‌هاي فراابتکاري، تعداد زيادي نمونه به طور تصادفي توليد شده و حل مي‌شوند. همه رويه‌ها در نرم‌افزار ويژوال C++ نوشته شده و روي يک رايانه پنتيوم IV با پردازشگر ۳/٤ گيگا هرتز و ۵۱۲ مگابايت RAM و سيستم عامل ويندوز XP اجرا شده است.

طراحي مسئله

در اين تحقيق براي توليد عوامل مسئله از رويه عزيزاوغلو و کيرکا [٦] بهره گرفته شده است. بر اساس اين رويه، ابتدا زمان فرآيند کارها به طور تصادفي با توزيع

یکنواخت گسسته در بازه [۱، ۱۰۰] تولید می‌شوند. در ادامه، برای تعیین موعدهای تحویل، دو عامل دیرکرد (τ) و دامنه موعد تحویل (R) مدنظر قرار گرفته است. بدین منظور برای هر کار J_j، موعد تحویل عدد صحیح d_j از توزیع گسسته [$P\ (1-\tau+R/2)$, $P\ (1-\tau-R/2)$] تولید می‌شود که $P=(1/m)\sum p_i$ است.

برای تحلیل کارآیی الگوریتم‌ها، چهار دسته مسئله به صورت R=۰/۶ و τ=۰/۲، R=۰/۶ و τ=۰/۶، R=۱/۶ و τ=۰/۲ و R=۱/۶ و τ=۰/۶ در نظر گرفته شده است. در رویکرد حل دقیق در هر دسته، تعداد ۲۴ (۴*۶) اندازه مسئله با تعداد کار برابر ۷، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰ و ۲۵ و تعداد ماشین برابر ۲، ۳، ۴ و ۵ در نظر گرفته شده است. در هر ترکیب از مسائل، تعداد ۲۰ نمونه و در مجموع ۱۹۲۰ (۴*۲۰*۲۴=۱۹۲۰) مسئله تولید و حل شده است. در رویکرد روش‌های فرا‌ابتکاری با توجه به حل مسائل در ابعاد بزرگ‌تر، در ۵۶ اندازه تعداد کارها برابر ۷، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰، ۲۰۰، ۳۰۰ و ۵۰۰ و تعداد ۲، ۳، ۴، ۵ و ۱۰ ماشین مد نظر قرار گرفته است. در نتیجه با تولید ۲۰ نمونه در هر اندازه در مجموع ۴۴۸۰ (۴*۲۰*۵۶=۴۴۸۰) مسئله تولید و حل شده است.

برای تحلیل عملکرد روش‌های ابتکاری و فرا‌ابتکاری، علاوه بر مدت زمان حل، دو معیار کیفی نیز در نظر گرفته شده‌اند. معیار اول، تعداد دفعات دستیابی به پاسخ بهینه و معیار دوم درصد خطای نسبی بین جواب ابتکاری و بهینه (ARE[۲۳]) است که بر اساس رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود:

$$ARE=(1/k)\times\sum_{j=1}^{k}\frac{OPT_j-H_j}{OPT_j}\times 100 \qquad (12)$$

که در آن k تعداد نمونه و OPT_j و H_j به ترتیب مقدار تابع هدف حاصل از روش شاخه‌وکران و روش ابتکاری هستند.

در این تحقیق، مقادیر مختلف عوامل دو الگوریتم به روش سعی و خطا آزمایش شده و مشخص شده که مقادیر زیر کارآیی بیشتری دارند:

الگوریتم ژنتیک	بهینه‌سازی گروه ذرات
اندازه جمعیت: ۵۰	اندازه گروه: ۵۰
تعداد تکرار بدون بهبود (شرط اختتام): ۵۰۰	اندازه همسایگی: ۱۰
تعداد بهترین کروموزوم‌های نسل پیشین حاضر در نسل جاری: ۴	g_1: ۳۰۰
احتمال تقاطع: ۰/۸	g_2 (شرط اختتام): ۵۰۰
احتمال جهش: ۰/۱	بیشینه وزن ماندگاری (w_{max}): ۱
	کمینه وزن ماندگاری (w_{min}): ۰/۴۵
	شتاب ذره به سمت $pbest$ (c_1): ۲
	شتاب ذره به سمت $gbest$ (c_2): ۱

نتایج محاسباتی

جدول (۱) نتایج محاسباتی الگوریتم شاخه‌وکران را در چهار دسته مسئله در اندازه‌های مختلف نشان می‌دهد. در اجرای الگوریتم، محدودیت ۳۶۰۰ ثانیه اعمال شده و هر مسئله که در محدوده زمانی فوق حل شود به جواب بهینه دست یافته است. از بین ۲۰ نمونه حل‌شده، تعداد مسائلی که جواب بهینه آن‌ها به دست آمده در ستون "تعداد نمونه بهینه" مشخص شده‌اند. همچنین برای بررسی کارآیی روش شاخه‌وکران، درصد گره‌های قطع‌شده با توجه به "حد پایین" و "قواعد غلبه" نشان داده شده است. میانگین زمان حل بهینه، مطابق انتظار و با افزایش ابعاد روندی صعودی دارد. مشاهده می‌شود که روش شاخه‌وکران به خوبی قادر به حل مسائل تا ۲۰ کار شده که نشان‌دهنده کارآیی مناسب الگوریتم است. این روند در تعداد ماشین‌ها به طور مشخص مشاهده نمی‌شود. مقایسه دسته مسائل چهارگانه بر اساس میانگین زمان حل در شکل (۹) نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که دسته دوم بیشترین پیچیدگی زمانی را داشته و دسته‌های سوم، چهارم و اول به ترتیب در رتبه‌های بعدی قرار می‌گیرند. همچنین بیشترین تعداد نمونه بهینه مربوط به دسته اول با ۴۷۳ (۹۸/۵۴درصد) مسئله است و دسته‌های دوم تا چهارم به ترتیب دارای ۳۹۳ (۸۱/۸۷درصد)، ۴۱۶ (۸۶/۶۷درصد) و ۴۴۲ (۹۲/۱درصد) نمونه بهینه هستند. از طرف دیگر نتایج جدول (۱) نشان می‌دهند که بیشترین درصد قطع گره‌ها مربوط به حد پایین بوده و نشان‌دهنده کارآیی مناسب حد پایین و بالای مورد استفاده است. همچنین قواعد غلبه ۱، ۳ و ۲ به ترتیب بیشترین درصد قطع گره‌ها را دارند.

برای مقایسه روش‌های ابتکاری، میانگین زمان حل دسته‌ها در اندازه‌های مختلف در شکل (۱۰) نشان داده شده است. مدت زمان حل نمونه‌ها در دسته‌های چهارگانه روند تقریباً مشابهی دارند. روش MDP در اندازه مسائل کوچک زمان حل کمتری نسبت به دو الگوریتم دیگر دارد، ولی با افزایش ابعاد مسئله، زمان حل آن با ضریب بیشتری نسبت به دو الگوریتم GA و PSO افزایش یافته، به طوری که در مسائل با تعداد کار ۵۰۰ اختلاف معناداری با زمان حل دو روش دیگر دارد. از طرف دیگر، روش GA در همه نمونه‌ها زمان حل کمتری نسبت به الگوریتم PSO دارد. همچنین متوسط درصد اختلاف جواب روش‌های ابتکاری

در اندازه‌هاي مختلف در شکل (۱۱) نشان داده شده است. مشخص است که در هر سه روش ابتکاري با افزايش تعداد ماشين‌ها، درصد اختلاف با بهترين جواب کاهش يافته و شکل فرم نوساني بالا دارد. از طرف ديگر با افزايش ابعاد مسئله نيز درصد اختلاف کاهش يافته که البته داي‌ل آن را بيشتر به دليل کاهش کيفيت بهترين جواب حاصل مي‌توان توجيه کرد. بنابراين با توجه به مدت زمان حل پايين و کيفيت بالاي نتايج، در دسته اول و دوم، روش GA به عنوان روش برتر برگزيده مي‌شود. در دسته‌هاي سوم و چهارم الگوريتم PSO با اختلاف نسبتاً کم نتايج بهتري نسبت به دو الگوريتم ديگر دارد. در نهايت، با توجه به زمان کوتاه‌تر الگوريتم ژنتيک و اختلاف کم آن با الگوريتم PSO در دسته‌هاي سوم و چهارم، مي‌توان اين الگوريتم را براي حل مسئله پيشنهاد کرد:

جدول ۱: نتايج محاسباتي الگوريتم شاخه وکران.

	ردیف	*n*	*m*	تعداد نمونه بهینه	میانگین زمان حل (ثانیه)	میانگین درصد گره های قطع شده			
						حد پایین	قاعده غلبه ۱	قاعده غلبه ۲	قاعده غلبه ۳
دسته 1	1	7	2	20	0.00	66.35	13.53	0.11	4.06
	2		3	20	0.00	43.80	38.60	0.11	0.77
	3		4	20	0.00	32.14	50.38	0.00	0.00
	4		5	20	0.00	23.86	57.12	0.00	0.00
	5	10	2	20	0.00	86.07	3.21	0.26	5.27
	6		3	20	0.00	54.57	23.06	0.00	5.48
	7		4	20	0.00	37.03	48.36	0.05	1.16
	8		5	20	0.00	22.35	64.22	0.01	0.04
	9	12	2	20	0.03	89.73	0.20	0.09	6.66
	10		3	20	0.04	63.45	16.08	0.07	7.76
	11		4	20	0.01	48.39	32.28	0.15	4.10
	12		5	20	0.01	30.99	56.98	0.00	0.63
	13	15	2	20	0.52	81.65	0.33	0.20	16.04
	14		3	20	0.41	66.08	16.28	0.10	9.28
	15		4	20	0.36	54.55	23.32	0.04	10.13
	16		5	20	0.46	43.85	41.11	0.17	2.92
	17	20	2	20	94.79	87.92	2.50	0.15	9.34
	18		3	20	188.56	67.90	21.20	0.06	8.22
	19		4	20	65.84	52.65	24.71	0.23	16.40
	20		5	19	384.24	59.06	20.11	0.23	12.24
	21	25	2	19	240.22	90.22	4.67	0.02	4.31
	22		3	20	0.00	62.77	34.72	0.00	0.00
	23		4	18	360.98	45.55	45.17	0.03	5.47
	24		5	17	588.53	44.79	42.41	0.07	8.42
دسته 3	1	7	2	20	0.00	66.77	15.22	0.16	1.32
	2		3	20	0.00	47.36	32.32	0.00	1.17
	3		4	20	0.00	39.36	43.61	0.00	0.31
	4		5	20	0.00	18.48	60.76	0.00	0.04
	5	10	2	20	0.00	66.18	11.74	0.11	5.52
	6		3	20	0.00	58.01	21.34	0.09	2.38
	7		4	20	0.01	41.02	40.01	0.11	0.69
	8		5	20	0.00	30.71	54.45	0.00	0.65
	9	12	2	20	0.03	69.13	2.63	0.18	9.42
	10		3	20	0.05	69.29	8.36	0.11	3.03
	11		4	20	0.06	53.49	24.03	0.15	1.41
	12		5	20	0.01	38.55	43.87	0.12	1.02
	13	15	2	20	0.81	71.08	1.87	0.05	11.44
	14		3	20	0.68	69.41	9.63	0.28	4.82
	15		4	20	1.05	69.10	5.31	0.24	3.57
	16		5	20	1.79	60.47	15.40	0.00	2.40
	17	20	2	19	326.75	72.49	0.93	0.09	13.85
	18		3	20	299.92	74.65	1.34	0.14	6.97
	19		4	17	877.70	73.74	3.40	0.07	4.38
	20		5	16	838.58	72.45	4.18	0.10	3.59
	21	25	2	12	2013.19	73.51	0.69	0.25	15.62
	22		3	4	3061.25	68.89	1.30	0.11	13.32
	23		4	3	3114.78	69.91	2.03	0.21	9.22
	24		5	5	2708.08	72.00	6.73	0.22	3.14

	ردیف	*n*	*m*	تعداد نمونه بهینه	میانگین زمان حل (ثانیه)	میانگین درصد گره های قطع شده			
						حد پایین	قاعده غلبه ۱	قاعده غلبه ۲	قاعده غلبه ۳
دسته 2	1	7	2	20	0.00	53.18	16.31	0.06	8.73
	2		3	20	0.00	44.48	34.82	0.07	3.29
	3		4	20	0.00	67.53	24.16	0.00	0.06
	4		5	20	0.00	75.56	18.25	0.00	0.00
	5	10	2	20	0.01	58.89	4.00	0.32	15.69
	6		3	20	0.00	56.75	23.05	0.30	4.29
	7		4	20	0.00	43.17	44.07	0.03	1.29
	8		5	20	0.00	50.02	40.35	0.01	0.36
	9	12	2	20	0.05	53.86	2.47	0.84	25.67
	10		3	20	0.07	60.74	7.68	0.25	13.58
	11		4	20	0.01	48.25	38.38	0.02	2.35
	12		5	20	0.01	57.47	35.08	0.04	0.46
	13	15	2	20	2.08	47.62	0.78	0.31	35.06
	14		3	20	3.47	60.27	5.64	0.50	18.20
	15		4	20	8.81	62.18	10.02	0.39	11.02
	16		5	20	0.54	63.91	23.17	0.35	3.04
	17	20	2	18	569.59	44.35	0.87	0.42	43.01
	18		3	13	1628.30	52.95	1.71	0.49	31.23
	19		4	17	760.93	63.41	2.37	0.42	20.94
	20		5	18	494.01	59.84	11.25	0.28	16.30
	21	25	2	3	3367.71	36.70	0.89	0.46	54.66
	22		3	3	3340.34	48.09	1.65	0.47	39.07
	23		4	0	3600.01	59.16	2.79	0.46	27.26
	24		5	1	3569.31	61.55	3.52	0.38	24.17
دسته 4	1	7	2	20	0.00	72.52	12.99	0.00	1.71
	2		3	20	0.00	54.23	29.77	0.06	1.25
	3		4	20	0.00	41.64	42.49	0.00	0.56
	4		5	20	0.00	43.97	41.55	0.00	0.06
	5	10	2	20	0.00	67.74	10.62	0.15	5.77
	6		3	20	0.00	70.59	14.25	0.08	3.29
	7		4	20	0.00	74.22	17.35	0.03	1.13
	8		5	20	0.00	41.70	45.92	0.01	0.33
	9	12	2	20	0.01	69.33	5.30	0.03	11.66
	10		3	20	0.01	76.96	10.20	0.09	2.19
	11		4	20	0.00	77.22	14.11	0.02	1.45
	12		5	20	0.01	57.32	29.63	0.11	1.15
	13	15	2	20	0.11	74.81	2.19	0.04	11.94
	14		3	20	0.44	71.97	3.20	0.16	10.00
	15		4	20	0.60	77.45	7.57	0.11	3.37
	16		5	20	4.11	65.44	12.50	0.08	4.35
	17	20	2	20	75.53	68.33	0.91	0.20	18.28
	18		3	20	48.30	77.95	2.00	0.05	8.55
	19		4	20	122.99	69.38	5.81	0.10	6.84
	20		5	19	408.95	72.69	4.07	0.23	7.51
	21	25	2	13	1505.76	69.49	0.59	0.11	17.43
	22		3	11	1842.43	75.71	1.20	0.13	10.20
	23		4	9	2442.57	73.32	1.96	0.12	8.97
	24		5	10	2182.50	74.77	4.37	0.16	6.04

نتیجه‌گیري

در اين مقاله مسئله زمان‌بندي ماشين‌هاي موازي با هدف کمينه‌کردن مجموع بيشينه‌هاي زودکرد و ديرکرد مورد مطالعه قرار گرفت. بدين منظور ابتدا يک رويه شاخه وکران با تعيين حدود بالا و پايين مناسب و قواعد غلبه توسعه داده شد. آزمايش‌هاي تجربي روي ۱۹۲۰ نمونه توليد شده به طور تصادفي نشان داد که اين الگوريتم کارآيي بالايی دارد، به طوري که به خوبي قادر به حل مسائل تا ۲۰ کار به شکل بهينه شده است. با اين وجود زمان حل مسئله با افزايش ابعاد مسئله به شدت افزايش مي‌يابد. بنابراين براي حل مسئله در ابعاد بزرگ، يك الگوريتم ابتکاري موسوم به MDP و دو الگوريتم فراابتکاري GA و PSO ارائه و در ٤٤٨۰ نمونه تصادفي از ۷ تا ۵۰۰ کار و ۲ تا ۱۰ ماشين بررسي شدند. نتايج حاصل، کارآيي الگوريتم ژنتيک را در مقايسه با الگوريتم MDP و بهينه‌سازي گروه ذرات نشان داده است.

به دست آوردن مدل‌هاي جديد براي محيط‌هاي پيچيده‌تر زمان‌بندي شامل ماشين‌هاي يکنواخت و نامرتبط و در نظر گرفتن فرض بيکاري عمدي، هزينه‌ها و زمان‌هاي راه‌اندازي وابسته به توالي و محدوديت دسترسي به ماشين مي‌توانند براي تحقيقات آتي در نظر گرفته شوند.

قدرداني

اين مقاله بخشي از گزارش طرح تحقيقاتي مصوب دانشگاه صنعتي اصفهان با کد ۱IEA۷۹۱ است. از اين رو شايسته است که از حوزه معاونت پژوهشي دانشگاه صنعتي اصفهان سپاسگزاري شود.

پيوست (الف)

در اين بخش به بررسي پيچيدگي مسئله کمينه‌سازي T_{max} روي ماشين‌هاي موازي يکسان مي‌پردازيم. بر اساس اطلاع نگارندگان، پيچيدگي اين مسئله تا کنون بررسي نشده است. بدين منظور از لم زير براي نشان دادن NP-hard بودن مسئله استفاده شده است.

لم ۵- مسئله کمينه‌سازي بيشينه ديرکرد روي ماشين‌هاي موازي يکسان NP-Hard است.

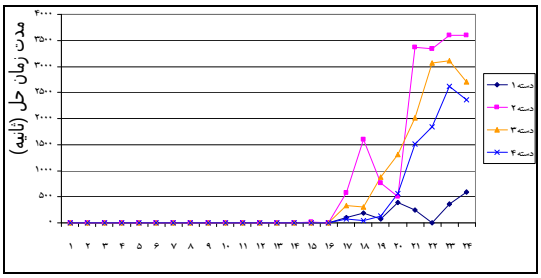
اثبات- فرض کنيد در يک نمونه خاص همه کارها موعد تحويل مشترک در نقطه صفر داشته باشند، يعني:

$$\forall i = 1, 2, ..., n \quad , \quad d_i = d = 0 \qquad (۱۳)$$

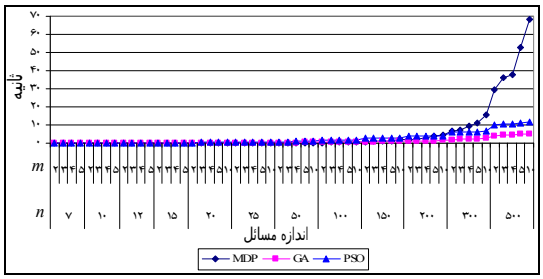
در اين حالت خواهيم داشت:

$$T_{max} = \max(0, C_1 - d, ..., C_n - d) = C_{max} \qquad (۱٤)$$

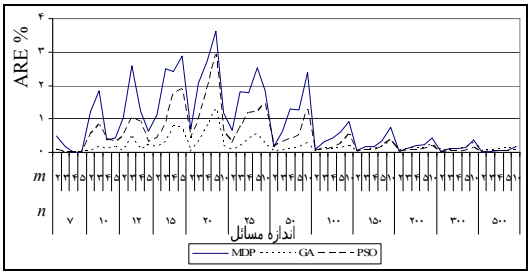
بنابراين کمينه‌سازي T_{max} به C_{max} تبديل شده و از آنجا که موضوع کمينه‌سازي C_{max} در ماشين‌هاي موازي يکسان NP-hard است [۳٤]، بنابراين کمينه‌سازي T_{max} روي ماشين‌هاي موازي يکسان نيز NP-hard است.



شکل ۹: زمان حل روش شاخه وکران در دسته‌هاي مختلف.



شکل ۱۰:مقايسه زمان روش‌هاي ابتکاري در دسته‌هاي مختلف.



شکل ۱۱: درصد اختلاف روش‌هاي ابتکاري با بهترين جواب.

مراجع

1 - Baker, k.R. (1974). *Introduction to sequencing and scheduling*. John Wiley, New York.

2 - Sidney, J.B. (1977). "Optimal single-machine scheduling with earliness and tardiness penalties." *Operations Research*, Vol. 25, No. 1, PP. 62-69.

3 - Baker, K.R. and Scudder, G.D. (1990). "Sequencing with earliness and tardiness penalties: a review." *Operations Research*, Vol. 38, PP. 22–36.

4 - Valente, J.M.S. and Alves, R.A.F.S. (2005). "Improved lower bounds for the early / tardy scheduling problem with no idle time." *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 56, PP. 604-612.

5 - Abdul-Razaq, T.S. and Potts, C.N. (1988). "Dynamic programming state-space relaxation for single machine scheduling." *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 39, PP. 141–152.

6 - Azizoglu, M., Kondakci, S. and Kirca, O. (1991). "Bicriteria scheduling problem involving total tardiness and total earliness penalties." *International Journal of Production Economics*, Vol. 23, PP. 17–24.

7 - Almeida, M.T. and Centeno, M. (1998). "A composite heuristic for the single machine early–tardy job scheduling problem." *Computers & Operations Research*, Vol. 25, PP. 625–635.

8 - Valente, J.M.S., and Alves, R.A.F.S. (2005). "Improved heuristics for the early / tardy scheduling problem with no idle time." *Computers & Operations Research*, Vol. 32, PP. 557–569.

9 - M'Hallah, R. (2007). "Minimizing total earliness and tardiness on a single machine using a hybrid heuristic." *Computers & Operations Research*, Vol. 34, No. 10, PP. 3126-3142.

10 - Amin-Nayeri, M.R. and Moslehi, G. (2000). "Optimal algorithm for single machine sequencing to minimize early/tardy cost." *ESTEGHLAL Journal of Engineering* (In Persian), Vol. 19, No. 1, PP. 35-48.

11 - Moslehi, G., Mahnam, M., Amin-Nayeri, M. and Azaron, A. (2010). "A branch and bound algorithm to minimize the sum of maximum earliness and tardiness in single machine." *International Journal of Operational Research*, Vol. 8, No. 4, PP. 458-482.

12 - Tavakkoli-Moghaddam, R., Moslehi, G., Vasei, M. and Azaron, A. (2005). "Optimal scheduling for a single machine to minimize the sum of maximum earliness and tardiness considering idle insert." *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 167, No. 2, PP. 1430-1450.

13 - Tavakkoli-Moghaddam, R., Moslehi, G., Vasei, M. and Azaron, A. (2006). "A branch-and-bound algorithm for a single machine sequencing to minimize the sum of maximum earliness and tardiness with idle insert." *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 174, No. 1, PP. 388-408.

14 - Mahnam, M. and moslehi, G. (2009). "A branch and bound algorithm for minimizing the sum of maximum earliness and tardiness with unequal release times." *Engineering Optimization*, Vol. 41, No. 6, PP. 521-536.

15 - Nekoiemehr, N. and Moslehi, G. (in press). "Minimizing the sum of maximum earliness and maximum tardiness in the single-machine scheduling problem with sequence-dependent setup time." *Journal of the Operational Research Society*.

16 - Lam, K. and Xing, K.W. (1997). "New trends in parallel machine scheduling." *International Journal of Operations & Production Management*, Vol. 17, No. 3, PP. 326-338.

17 - Mokotoff, E. (2001). "Parallel machine scheduling problems: A survey." *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, Vol. 18, No. 2, PP. 193-242.

18 - Heady, R.B. and Zhu, Z. (1998). "Minimizing the sum of job earliness and tardiness in a multi-machine system." *International Journal of Production Research*, Vol. 36, PP. 1619–1632.

19 - Azizoglu, M. and Kirca, O. (1998). "Tardiness minimization on parallel machines." *International Journal of Production Economics*, Vol. 55, No. 2, PP. 163-168.

20- Balakrishnan, N., Kanet, J.J. and Sridharan, S.V. (1999). "Early/tardy scheduling with sequence dependant setups on uniform parallel machines." *Computers and Operations Research*, Vol. 26, PP. 127–141.

21 - Zhu, Z. and Heady, R.B. (2000). "Minimizing the sum of earliness/tardiness in multi-machine scheduling: a mixed integer programming approach." *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 38, PP. 297–305.

22 - Ventura, J.A. and Kim, D. (2003) "Parallel machine scheduling with earliness–tardiness penalties and additional resource constraints." *Computers & Operations Research*, Vol. 30, PP. 1945–1958.

23 - Kedad-Sidhoum, S., Rios Solis, Y. and Sourd, F. (2008). "Lower bounds for the earliness–tardiness scheduling problem on parallel machines with distinct due dates." *European Journal of Operational Research*, Vol. 189, No. 3, PP. 1305-1316.

24 - Tavakkoli-Moghaddam, R., Jolai, F., Khodadadeghan Y. and Haghnevis, M. (2006). "A mathematical model of a multi-criteria parallel machine scheduling problem: A genetic algorithm", *International Journal of Engineering*, Vol. 19, No. 1, PP. 79-86.

25 - Tavakkoli-Moghaddam, R., Jolai, F. and Ghandi-Bidgoli, S. (2008). "A parallel machine scheduling problem minimizing the total weighted earliness and total weighted tardiness by a multi-objective scatter search method." *Journal of Faculty of Engineering -University of Tehran*, Vol. 42, No. 7, PP. 923-934.

26 - Jolai, F., Tavakkoli-Moghaddam, R. and Azadian, F. (2006). " Parallel machine scheduling for split jobs with sequence dependent setup times." *Journal of Faculty of Engineering (University of Tehran)*, Vol. 40, No. 4, PP. 495-506.

27 - Mandel, M. and Mosheiov, G. (2001). "Minimizing maximum earliness on parallel identical machines." *Computers and Operations Research*, Vol. 28, PP. 317-327.

28 - Fatemi Ghomi, S.M.T. and Jolai Ghazvini, F. (1998). "A pairwise interchange algorithm for parallel machine scheduling." *Production Planning & Control*, Vol. 9, No. 7, PP. 685-689.

29 - Holland, J.H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biolo*gy, Control, and Artificial Intelligence. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press.

30 - Goldberg, D.E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning.* Addison-Wesley.

31 - Eberhart, R. and Kennedy, J. (1995). "A new optimizer using particle swarm theory." *Proceedings of the 6th international symposium on micro machine and human science*, PP. 39–43.

32 - Hu, X., Shi,Y. and Eberhart, R., (2004). "Recent advances in particle swarm." *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*. PP. 90-97.

33 - Kennedy, I. and Mends, R. (2002). "Population structure and particle swarm performance." *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*.

34 - Garey, M.R. and Johnson, D.S. (1978). "Strong NP-completeness results: motivation, examples, and implications." *J. Assoc. Comp. Mach*, Vol. 25, PP. 499-508.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1- Just inTime
2- Identical
3- Uniform
4- Unrelated
5- Minsum
6- Minmax
7- Forward
8- Depth First
9- Polynomial Time Algorithm
10- Longest Processing Time
11- MST-DYNA–Pairwise Interchange
12- Permutation Based Approach
13- Priority Based Approach
14- Genetic Algorithm
15- Roulette Wheel
16- Elitist Strategy
17- Linear Order Crossover Swap
18- Partially Mapped Crossover
19- Swap Mutation
20- Particle Swarm Optimization
21- Particle
22- Swarm
23- Average Relative Error