تحلیل استاتیکی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک

علی ناصریان [1] و مسعود طهانی [2]*

[1] دانشجوی دکتری گروه مکانیک – دانشکده مهندسی – دانشگاه فردوسی مشهد

[2] دانشیار گروه مکانیک – دانشکده مهندسی – دانشگاه فردوسی مشهد

(تاریخ دریافت ۸۷/۶/۵ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۸۸/۴/۳۱، تاریخ تصویب ۸۸/۵/۱۶)

چکیده

در این پژوهش روش تحلیلی لوی برای موضوع خمش ورق‌های چندلایه کامپوزیتی شامل لایه‌های پیزوالکتریک بررسی شده است. به کمک این روش می‌توان چندلایه‌های ترکیبی متعامد و زاویه‌دار پادمتقارن مستطیلی شکل را که دو لبه موازی آنها مقید به تکیه‌گاه ساده و دو لبه دیگر آنها شرایط مرزی دلخواه دارند تحلیل کرد. معادلات تعادل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق‌ها استخراج و بر حسب نوع کلاس کریستالوگرافی لایه‌های پیزوالکتریک دسته‌بندی شده‌اند. نتایج عددی برای چند موضوع مختلف با بارگذاری الکترومکانیکی ارایه و در صورت امکان با نتایج حاصل از روش ناویر و نیز نتایج ثبت شده در سایر مقالات مقایسه شده است. علاوه بر این، توانایی روش لوی در تحلیل استاتیکی چندلایه‌های کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک مورد بحث قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که در روش حل لوی، امکان در نظر گرفتن همزمان همه نیروها و ممان‌های پیزوالکتریک میسر نیست.

واژه‌های کلیدی: حل تحلیلی، روش لوی، ورق‌های کامپوزیتی، چندلایه‌های ترکیبی

مقدمه

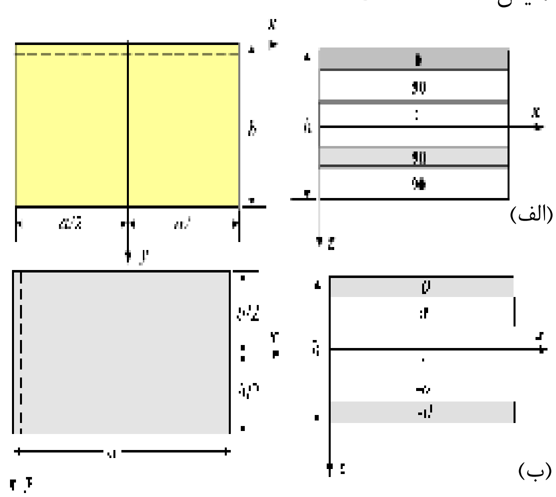
روش لوی (Levy) توسط محققان مختلفی برای تحلیل رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی مورد استفاده قرار گرفته است (مراجع [۱- ۲۳] را ببینید). Khdeir و Reddy [۱] با به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ اول [1] خمش چندلایه‌های متعامد [2] متقارن با دو لبه موازی مقید به تکیه‌گاه ساده را تحلیل کردند. Reddy و Khdeir [۲] کمانش و ارتعاش‌های آزاد چندلایه‌های متعامد را به کمک حل لوی و نیز روش اجزای محدود، در قالب تئوری‌های کلاسیک [3]، تغییر شکل برشی مرتبهٔ اول و تغییر شکل برشی مرتبهٔ سوم [4] بررسی کردند. Khdeir [۳] با استفاده از روش لوی و تئوری کلاسیک، خمش، ارتعاش‌های آزاد و کمانش چند لایه‌های مستطیلی زاویه‌دار پادمتقارن [5] را تحلیل کرد. Bose و Reddy [۵،۴] رفتار استاتیکی و ارتعاش‌های آزاد چندلایه-های کامپوزیتی متعامد را بر اساس روش‌های تحلیلی ناویر [6] و لوی و همچنین مدل اجزای محدود، با به کارگیری تئوری‌های کلاسیک، تغییرشکل برشی مرتبهٔ اول و تغییر شکل برشی مرتبهٔ سوم مورد مطالعه قرار دادند. Khdeir و Reddy [۶] فرکانس‌های طبیعی چندلایه‌های متعامد و زاویه‌دار پادمتقارن را به کمک روش لوی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه دوم استخراج کردند. Palardy و Palazotto [۷] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ اول، مسئله مقدار ویژه چندلایه‌های متعامد را حل کردند. آنها حل خود را برای فرکانس‌های پایه و بارهای کمانش ورق‌های گرافیت/اپوکسی [7] با چیدمان متقارن ارایه کردند. Khdeir [۸] ارتعاش‌های اجباری چندلایه‌های مستطیلی زاویه‌دار پادمتقارن را با استفاده از روش لوی و تئوری تغییرشکل برشی مرتبهٔ دوم را مورد مطالعه قرار داد. Khdeir و همکارانش[۹- ۱۷] و Nosier و Reddy [۱۸] به کمک روش لوی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ سوم رفتار استاتیکی و ارتعاش‌های آزاد چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد را بررسی کردند. Kapuria و همکارانش [۱۹] خمش چندلایه‌های متعامد با لایه‌های عمل‌گر پیزوالکتریک که حداقل دو لبه موازی مقید به تکیه‌گاه ساده داشتند را با به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش لوی تحلیل کردند. آنها برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر تعادل، از الگوریتم عددی QR استفاده کردند. همچنین به تازگی روابط حاکم برای تحلیل استاتیکی چندلایه‌های زاویه‌دار پادمتقارن با لایه-های عمل‌گر پیزوالکتریک برشی در قالب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط Aldraihem و Khdeir [۲۰] استخراج شده است. آنها معادلات حاصله را به کمک روش لوی و رهیافت فضای حالت حل کردند.

* نویسنده مسئول : تلفن : ۸۷۶۳۳۰۴ – ۰۵۱۱ ، فاکس : ۸۷۶۳۳۰۱ - ۰۵۱۱ ، Email: mtahani@ferdowsi.um.ac.ir

با بررسی مقالات منتشر شده می‌توان گفت، تا کنون کار جامعی که دربرگیرنده فرمولاسیون کامل و جنبه‌های مختلف تحلیل چندلایه‌های ترکیبی پیزوالکتریک با خواص ارتوتروپیک[8] باشد، منتشر نشده است. در تحقیق حاضر ضمن بسط روش حل لوی برای چندلایه‌های ترکیبی پیزوالکتریک، محدودیت‌های این روش در تحلیل این دسته از سازه‌ها بررسی می‌شود. علاوه بر این، نتایج عددی به دست آمده از این روش، با نتایج حاصل از روش حل ناویر و روش بنا شده بر تئوری الاستیسیته سه‌بعدی مقایسه می‌شود.

استخراج روابط

در این بخش، معادلات حاکم بر تعادل برای ورق-های چندلایه ترکیبی پیزوالکتریک (چندلایه‌هایی که برخی از لایه‌ها و یا همه لایه‌های آنها می‌تواند دارای خواص پیزوالکتریک باشند) با دو چیدمان متعامد و زاویه‌دار پادمتقارن استخراج و مورد بحث قرار می‌گیرد. هندسه و دستگاه مختصات مورد استفاده برای چندلایه-های ترکیبی متعامد و زاویه‌دار پادمتقارن در شکل (۱) نمایش داده شده است.



شکل ۱: هندسه چندلایه‌های مورد بررسی و سیستم محورهای مختصات؛ الف) چیدمان متعامد و ب) چیدمان زاویه‌دار پادمتقارن.

میدان جابه‌جایی و شرایط مرزی مکانیکی

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، می‌توان میدان جابه‌جایی مکانیکی را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\psi(x,y) \\
v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\phi(x,y) \\
w(x,y,z) &= w_0(x,y)
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که u ، v و w به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی در جهات x، y و z هستند. همچنین u_0، v_0، w_0، ψ و ϕ جابه‌جایی‌های عمومیت یافته نامیده شده و توابع مجهولی هستند که باید به دست آیند. روش حل لوی قابلیت تحلیل چندلایه‌های متعامد یا زاویه‌دار پادمتقارنی را دارد که دو لبه موازی آنها مقید به تکیه‌گاه ساده و دو لبه دیگر آنها دارای هر یک از شرایط مرزی ساده، گیردار و یا آزاد باشد. دو نوع شرایط مرزی ساده در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است؛ شرایط مرزی ساده نوع ۱ که به ورق‌های با چیدمان متعامد اعمال شده و در لبه‌های $y=0$ و $y=b$ به صورت $u_0=w_0=\psi=N_y=M_y=0$ تعریف می‌شود و شرایط مرزی ساده نوع ۲ که به ورق‌های با چیدمان زاویه‌دار پادمتقارن اعمال شده و در لبه‌های $x=0$ و $x=a$ به صورت $u_0=w_0=\phi=N_{xy}=M_x=0$ تعریف می‌شود. برای ارضای شرایط مرزی ساده نوع ۱ در $y=0,b$، جابه‌جایی‌های عمومیت‌یافته را می‌توان به شکل حاصل ضرب توابع نامعین و توابع مثلثاتی معلوم بسط داد:

$$
\begin{aligned}
&u_0(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}U_m(x)\sin\beta_m y, \quad v_0(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}V_m(x)\cos\beta_m y \\
&w_0(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}W_m(x)\sin\beta_m y, \quad \psi(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}X_m(x)\sin\beta_m y \\
&\phi(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}Y_m(x)\cos\beta_m y, \quad \beta_m=\frac{m\pi}{b}\ (m=1,2,...)
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

همچنین با تعریف جابه‌جایی‌های عمومیت‌یافته، به شکل زیر می‌توان شرایط مرزی ساده نوع ۲ را در $x=0,a$ اعمال کرد:

$$
\begin{aligned}
&u_0(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}U_m(y)\sin\alpha_m x, \quad v_0(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}V_m(y)\cos\alpha_m x \\
&w_0(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}W_m(y)\sin\alpha_m x, \quad \psi(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}X_m(y)\cos\alpha_m x \\
&\phi(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}Y_m(y)\sin\alpha_m x, \quad \alpha_m=\frac{m\pi}{a}\ (m=1,2,...)
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

روابط ساختاری و منتجه‌های تنش

روابط ساختاری چندلایه‌های ترکیبی پیزوالکتریک را با فرض حالت تنش صفحه‌ای، برای لایهٔ kام به این ترتیب می‌توان نوشت [۲۳]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11}&\bar{Q}_{12}&\bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12}&\bar{Q}_{22}&\bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16}&\bar{Q}_{26}&\bar{Q}_{66}\end{bmatrix}^k\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&\bar{e}_{31}\\ 0&0&\bar{e}_{32}\\ 0&0&\bar{e}_{36}\end{bmatrix}^k\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix}^k$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{44}&\bar{Q}_{45}\\ \bar{Q}_{45}&\bar{Q}_{55}\end{bmatrix}^k\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}^k-\begin{bmatrix}\bar{e}_{14}&\bar{e}_{24}&0\\ \bar{e}_{15}&\bar{e}_{25}&0\end{bmatrix}^k\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix}^k \qquad (۴)$$

$$\{E\}=-\left[\partial\Phi/\partial x \quad \partial\Phi/\partial y \quad \partial\Phi/\partial z\right]^T \qquad (۵)$$

$$\begin{Bmatrix}D_x\\ D_y\\ D_z\end{Bmatrix}^k=\begin{bmatrix}0&0&\bar{e}_{14}&\bar{e}_{15}&0\\ 0&0&\bar{e}_{24}&\bar{e}_{25}&0\\ \bar{e}_{31}&\bar{e}_{32}&0&0&\bar{e}_{36}\end{bmatrix}^k\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}^k-$$

$$\begin{bmatrix}\epsilon_x&\epsilon_{xy}&0\\ \epsilon_{xy}&\epsilon_y&0\\ 0&0&\epsilon_z\end{bmatrix}^k\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix}^k \qquad (۶)$$

که در آنها $\bar{Q}_{ij}^k$ سفتی انتقال یافته، $\bar{e}_{ij}^k$ ثابت تنش پیزوالکتریک انتقال یافته، E_i^k میدان الکتریکی در هر لایه و Φ تابع پتانسیل الکتریکی است. با جایگذاری روابط کرنش- جابه‌جایی خطی [۲۳] در روابط فوق و جایگذاری نتیجه در تعریف منتجه‌های تنش، یعنی:

$$(N_x,N_y,N_{xy},Q_y,Q_x)=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy},\sigma_{yz},\sigma_{xz})dz$$

$$(M_x,M_y,M_{xy})=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy})z\,dz \qquad (۷)$$

منتجه‌های تنش را می‌توان به این شکل به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\\ M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}&B_{11}&B_{12}&B_{16}\\ &A_{22}&A_{26}&B_{12}&B_{22}&B_{26}\\ &&A_{66}&B_{16}&B_{26}&B_{66}\\ &&&D_{11}&D_{12}&D_{16}\\ &sym.&&&D_{22}&D_{26}\\ &&&&&D_{66}\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\partial u_0/\partial x\\ \partial v_0/\partial x\\ \partial v_0/\partial x+\partial u_0/\partial y\\ \partial\psi/\partial x\\ \partial\phi/\partial y\\ \partial\phi/\partial x+\partial\psi/\partial y\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}N_x^P\\ N_y^P\\ N_{xy}^P\\ M_x^P\\ M_y^P\\ M_{xy}^P\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}Q_y\\ Q_x\end{Bmatrix}=k^2\begin{bmatrix}A_{44}&A_{45}\\ A_{45}&A_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\partial w/\partial y+\phi\\ \partial w/\partial x+\psi\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}Q_y^P\\ Q_x^P\end{Bmatrix} \qquad (۸)$$

در این روابط $k_2(=5/6)$ ضریب تصحیح، نیروی برشی است و A_{ij} سفتی‌های کششی، D_{ij} سفتی‌های خمشی و B_{ij} سفتی‌های اتصال خمش- کشش هستند:

$$(A_{ij},B_{ij},D_{ij})=\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\bar{Q}_{ij}^{(k)}(1,z,z^2)dz \qquad (۹)$$

همچنین $\{N^P\}$ و $\{Q^P\}$ منتجه‌های نیروی پیزوالکتریک و $\{M^P\}$ منتجه‌های ممان پیزوالکتریک نامیده می‌شوند و به این ترتیب به دست می‌آیند:

$$\{N^P\}^T=\sum_{k=1}^{N_a}\int_{z_k}^{z_{k+1}}[\bar{e}_{31}^k,\bar{e}_{32}^k,\bar{e}_{36}^k]E_z^k dz$$

$$\{M^P\}^T=\sum_{k=1}^{N_a}\int_{z_k}^{z_{k+1}}[\bar{e}_{31}^k,\bar{e}_{32}^k,\bar{e}_{36}^k]E_z^k z\,dz$$

$$\{Q^P\}=\sum_{k=1}^{N_a}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\begin{bmatrix}\bar{e}_{14}&\bar{e}_{24}&0\\ \bar{e}_{15}&\bar{e}_{25}&0\end{bmatrix}^k\{E\}^k dz \qquad (۱۰)$$

لازم به ذکر است در این روابط N تعداد کل لایه‌ها و N_a تعداد لایه‌های فعال[۹] در چند لایه است.

معادلات حاکم بر تعادل

با جایگذاری روابط (۸) در معادلات تعادل حاصل از به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0,\qquad \frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y=0 \qquad (۱۱)$$

می‌توان معادلات تعادل را بر حسب جابه‌جایی‌های عمومیت یافته و منتجه‌های نیرو و ممان پیزوالکتریک بازنویسی کرد. ولی می‌توان نشان داد بسته به نوع شرایط مرزی ساده‌ای که در دو لبه موازی ورق تعریف می‌شود، برخی از ضرایب سفتی چندلایه ناگزیر باید صفر باشند.

چندلایه‌های با چیدمان متعامد

با جایگذاری بسط‌های (۲) در معادلات حاکم بر تعادل، می‌توان مشاهده کرد که برای چندلایه مورد بحث در صورتی حل تحلیلی وجود دارد که روابط زیر برقرار باشد:

$$A_{16}=A_{26}=A_{45}=B_{16}=B_{26}=D_{16}=D_{26}=0 \qquad (۱۲)$$

و در نتیجه چندلایه‌ای که دو لبه موازی آن مقید به تکیه‌گاه ساده نوع ۱ است، باید چیدمانی از نوع متعامد داشته باشد. به علاوه، این جایگذاری، دسته معادلات دیفرانسیل جزیی حاکم بر تعادل را بـه دسته معادلات دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌کند:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[A_{11}U''_m - A_{12}\beta_m V'_m + B_{11}X''_m - B_{12}\beta_m Y'_m - A_{66}\left(\beta_m^2 U_m + \beta_m V'_m\right) - B_{66}\left(\beta_m^2 X_m + \beta_m Y'_m\right)\Big]\sin\beta_m y = \frac{\partial N_x^P}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^P}{\partial y}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[A_{66}\left(\beta_m U'_m + V''_m\right) + B_{66}\left(\beta_m X'_m + Y''_m\right) + A_{12}\beta_m U'_m - A_{22}\beta_m^2 V_m + B_{12}\beta_m X'_m - B_{22}\beta_m^2 Y_m\Big]\cos\beta_m y = \frac{\partial N_{xy}^P}{\partial x} + \frac{\partial N_y^P}{\partial y}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[k^2 A_{55}\left(W''_m + X'_m\right) - k^2 A_{44}\left(\beta_m^2 W_m + \beta_m Y_m\right)\Big]\sin\beta_m y = \frac{\partial Q_x^P}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^P}{\partial y} - q(x,y)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[B_{11}U''_m - B_{12}\beta_m V'_m + D_{11}X''_m - D_{12}\beta_m Y'_m - B_{66}\left(\beta_m^2 U_m + \beta_m V'_m\right) - D_{66}\left(\beta_m^2 X_m + \beta_m Y'_m\right) - k^2 A_{55}\left(W'_m + X_m\right)\Big]\sin\beta_m y = \frac{\partial M_x^P}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^P}{\partial y} - Q_x^P$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[B_{66}\left(\beta_m U'_m + V''_m\right) + D_{66}\left(\beta_m X'_m + Y''_m\right) + B_{12}\beta_m U'_m - B_{22}\beta_m^2 V_m + D_{12}\beta_m X'_m - D_{22}\beta_m^2 Y_m - k^2 A_{44}\left(\beta_m W_m + Y_m\right)\Big]\cos\beta_m y = \frac{\partial M_{xy}^P}{\partial x} + \frac{\partial M_y^P}{\partial y} - Q_y^P$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[B_{66}\left(\beta_m U'_m + V''_m\right) + D_{66}\left(\beta_m X'_m + Y''_m\right) + B_{12}\beta_m U'_m - B_{22}\beta_m^2 V_m + D_{12}\beta_m X'_m - D_{22}\beta_m^2 Y_m - k^2 A_{44}\left(\beta_m W_m + Y_m\right)\Big]\cos\beta_m y = \frac{\partial M_{xy}^P}{\partial x} + \frac{\partial M_y^P}{\partial y} - Q_y^P$$

(۱۳)

بررسی این معادلات نشان می‌دهد که نیروی مکانیکی q و نیروها و ممان‌های الکتریکی، همانند ترم‌های طرف چپ تساوی، باید به صورت سری‌های مثلثاتی زیر بسط داده شوند:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(x)\sin\beta_m y,\quad N_x^P = \sum_{m=1}^{\infty} N_m^{P1}(x)\sin\beta_m y$$

$$N_y^P = \sum_{m=1}^{\infty} N_m^{P2}(x)\sin\beta_m y,\quad N_{xy}^P = \sum_{m=1}^{\infty} N_m^{P6}(x)\cos\beta_m y$$

$$M_x^P = \sum_{m=1}^{\infty} M_m^{P1}(x)\sin\beta_m y,\quad M_y^P = \sum_{m=1}^{\infty} M_m^{P2}(x)\sin\beta_m y$$

$$M_{xy}^P = \sum_{m=1}^{\infty} M_m^{P6}(x)\cos\beta_m y,\quad Q_x^P = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^{P1}(x)\sin\beta_m y$$

$$Q_y^P = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^{P2}(x)\cos\beta_m y \qquad (۱۴)$$

که

$$Q_m = \frac{2}{b}\int_0^b q\sin\beta_m y\,dy,\quad N_m^{P1} = \frac{2}{b}\int_0^b N_x^P \sin\beta_m y\,dy$$

$$N_m^{P2} = \frac{2}{b}\int_0^b N_y^P \sin\beta_m y\,dy,\quad N_m^{P6} = \frac{2}{b}\int_0^b N_{xy}^P \cos\beta_m y\,dy$$

$$M_m^{P1} = \frac{2}{b}\int_0^b M_x^P \sin\beta_m y\,dy$$

$$M_m^{P2} = \frac{2}{b}\int_0^b M_y^P \sin\beta_m y\,dy$$

$$M_m^{P6} = \frac{2}{b}\int_0^b M_{xy}^P \cos\beta_m y\,dy,\quad Q_m^{P1} = \frac{2}{b}\int_0^b Q_x^P \sin\beta_m y\,dy$$

$$Q_m^{P2} = \frac{2}{b}\int_0^b Q_y^P \cos\beta_m y\,dy \qquad (۱۵)$$

اینک با جایگذاری روابط (۱۴) در معادلات (۱۳)، معادلات حاکم بر تعادل بـرای چندلایـه‌هـای ترکیبـی متعامـد، در حالت کلی به دست می‌آید:

$$A_{11}U''_m - A_{66}\beta_m^2 U_m - \beta_m\left(A_{12}+A_{66}\right)V'_m + B_{11}X''_m - B_{66}\beta_m^2 X_{mn} - \beta_m\left(B_{12}+B_{66}\right)Y'_m = \left(N_m^{P1}\right)' - \beta_m N_m^{P6}$$

$$\beta_m\left(A_{12}+A_{66}\right)U'_m + A_{66}V''_m - A_{22}\beta_m^2 V_m + \beta_m\left(B_{12}+B_{66}\right)X'_m + B_{66}Y''_m - B_{22}\beta_m^2 Y_m = \left(N_m^{P6}\right)' + \beta_m N_m^{P2}$$

$$k^2\left(A_{55}W'' - A_{44}\beta_m^2 W_{mm} + A_{55}X'_m - A_{44}\beta_m Y_m\right) = \left(Q_m^{P1}\right)' - \beta_m Q_m^{P2} - Q_m$$

$$B_{11}U''_m - B_{66}\beta_m^2 U_m - \beta_m\left(B_{12}+B_{66}\right)V'_m - k^2 A_{55}W'_m + D_{11}X''_m - \left(k^2 A_{55} + D_{66}\beta_m^2\right)X_m - \beta_m\left(D_{12}+D_{66}\right)Y'_m = \left(M_m^{P1}\right)' - \beta_m M_m^{P6} - Q_m^{P1}$$

$$\beta_m\left(B_{12}+B_{66}\right)U'_m + B_{66}V''_m - B_{22}\beta_m^2 V_m - k^2 A_{44}\beta_m W_m + \beta_m\left(D_{12}+D_{66}\right)X'_m + D_{66}Y''_m - \left(k^2 A_{44} + D_{22}\beta_m^2\right)Y_m = \left(M_m^{P6}\right)' + \beta_m M_m^{P2} - Q_m^{P2}$$

(۱۶)

از آنجا که منتجه‌های نیـرو و ممـان پیزوالکتریـک را می‌توان بـر حسـب عامـل یکسـان پتانسـیل الکتریکـی Φ تعریف کرد (روابط (۴) و (۱۰) را ببینیـد)، انتظـار مـی‌رود که همه این نیروها و ممان‌ها در حل لوی شرکت نکننـد و در برای وجود حل تحلیلی، بعضی از آنها با توجه به شکل بسط‌شان باید صفر در نظر گرفته شوند (این موضوع خـود یکی از محدودیت‌های روش حـل لـوی اسـت). بـه عنـوان مثال، اگر در چندلایه متعامد، لایه‌های پیزو از کلاس ۲۲۲ [۲۴] وجود داشته باشد و قصـد در نظـر گـرفتن نیروهـا و ممان برشـی N_{xy}^P، Q_x^P، Q_y^P و M_{xy}^P را داشـته باشـیم، تـابع پتانسـیل الکتریکـی بایـد بـه صـورت سـری‌هـای دوگانـه کسینوسـی بسـط داده شـود؛ در ایـن صـورت N_{mn}^{P1}، N_{mn}^{P2}، M_{mn}^{P1} و M_{mn}^{P2} باید صـفر باشـند (در غیـر ایـن

صورت حل تحلیلی مسئله امکان‌پذیر نخواهد بود). برای چندلایه مورد بحث، چنان چه توزیع پتانسیل الکتریکی به صورت سری‌های دوگانه سینوسی در نظر گرفته شود، در این صورت عوامل N_{mn}^{P6}، Q_{mn}^{P1}، Q_{mn}^{P2} و M_{mn}^{P6} باید صفر باشند. البته در چندلایه‌های متعامد با لایه‌های پیزوالکتریک از کلاس mm2 [۲۴]، نظر به اینکه $\bar{e}_{36}=0$، نیرو و ممان برشی N_{xy}^{P} و M_{xy}^{P} خود به خود صفر می‌شود. سعی شده تا بحث‌های مربوط به این موضوع در جدول (۱) خلاصه شود.

چندلایه‌های با چیدمان زاویه‌دار پادمتقارن

با جایگذاری میدان جابه‌جایی (۳) در معادلات حاکم بر تعادل می‌توان نتیجه گرفت که ضرایب سفتی زیر باید صفر در نظر گرفته شود:

$$A_{16}=A_{26}=A_{45}=B_{11}=B_{12}=0$$
$$B_{22}=B_{66}=D_{16}=D_{26}=0 \qquad (۱۷)$$

بنابراین برای چندلایه‌ای که دو لبه موازی آن تحت شرایط مرزی ساده نوع ۲ باشد، حل لوی در صورتی موجود است که چندلایه چیدمانی از نوع زاویه‌دار پادمتقارن داشته باشد. به علاوه این جایگذاری، دسته معادلات دیفرانسیل جزیی حاکم بر تعادل را به دسته معادلات دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌کند:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[-A_{11}\alpha_m^2U_m-A_{12}\alpha_mV'_m-B_{16}\left(2\alpha_mX'_m+\alpha_m^2Y_m\right)+A_{66}\left(U''_m-\alpha_mV'_m\right)+B_{26}Y''_m\Big]\sin\alpha_mx=\frac{\partial N_x^P}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}^P}{\partial y}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[A_{66}\left(\alpha_mU'_m-\alpha_m^2V_m\right)-B_{16}\alpha_m^2X_m+B_{26}\left(2\alpha_mY'_m+X''_m\right)+A_{12}\alpha_mU'_m+A_{22}V''_m\Big]\cos\alpha_mx=\frac{\partial N_{xy}^P}{\partial x}+\frac{\partial N_y^P}{\partial y}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[-k^2A_{55}\left(\alpha_m^2W''_m+\alpha_mX_m\right)+k^2A_{44}\left(W''_m+Y'_m\right)\Big]\sin\alpha_mX=\frac{\partial Q_x^P}{\partial x}+\frac{\partial Q_y^P}{\partial y}-q(x,y)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[B_{16}\left(2\alpha_mU'_m-\alpha_m^2V_m\right)-D_{11}\alpha_m^2X_m+D_{12}\alpha_mY'_m+B_{26}V''_m+D_{66}\left(X''_m+\alpha_mY'_m\right)-k^2A_{55}\left(\alpha_mW_m+X_m\right)\Big]\cos\alpha_mx=\frac{\partial M_x^P}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}^P}{\partial y}-Q_x^P$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[-B_{16}\alpha_m^2U_m+B_{26}\left(-2\alpha_mV'_m+U''_m\right)-D_{66}\left(\alpha_mX'_m+\alpha_m^2Y_m\right)-D_{12}\alpha_mX'_m+D_{22}Y''_m-k^2A_{44}\left(W'_m+Y_m\right)\Big]\sin\alpha_mx=\frac{\partial M_{xy}^P}{\partial x}+\frac{\partial M_y^P}{\partial y}-Q_y^P$$

(۱۸)

بررسی این معادلات نشان می‌دهد که نیروی مکانیکی q و نیروها و ممان‌های الکتریکی، همانند ترم‌های طرف چپ تساوی، باید به شکل سری‌های مثلثاتی زیر بسط داده شوند:

$$q=\sum_{m=1}^{\infty}Q_m(y)\sin\alpha_mx,\quad N_x^P=\sum_{m=1}^{\infty}N_m^{P1}(y)\cos\alpha_mx$$
$$N_y^P=\sum_{m=1}^{\infty}N_m^{P2}(y)\cos\alpha_mx,\quad N_{xy}^P=\sum_{m=1}^{\infty}N_m^{P6}(y)\sin\alpha_mx$$
$$M_x^P=\sum_{m=1}^{\infty}M_m^{P1}(y)\sin\alpha_mx,\quad M_y^P=\sum_{m=1}^{\infty}M_m^{P2}(y)\sin\alpha_mx$$
$$M_{xy}^P=\sum_{m=1}^{\infty}M_m^{P6}(y)\cos\alpha_mx,\quad Q_x^P=\sum_{m=1}^{\infty}Q_m^{P1}(y)\cos\alpha_mx$$
$$Q_y^P=\sum_{m=1}^{\infty}Q_m^{P2}(y)\sin\alpha_mx \qquad (۱۹)$$

که در آن

$$Q_m=\frac{2}{a}\int_0^a q\sin\alpha_mx\,dx,\quad N_m^{P1}=\frac{2}{a}\int_0^a N_x^P\cos\alpha_mx\,dx$$
$$N_m^{P2}=\frac{2}{a}\int_0^a N_y^P\cos\alpha_mx\,dx,\quad N_m^{P6}=\frac{2}{a}\int_0^a N_{xy}^P\sin\alpha_mx\,dx$$
$$M_m^{P1}=\frac{2}{a}\int_0^a M_x^P\sin\alpha_mx\,dx,\quad M_m^{P2}=\frac{2}{a}\int_0^a M_y^P\sin\alpha_mx\,dx$$
$$M_m^{P6}=\frac{2}{a}\int_0^a M_{xy}^P\cos\alpha_mx\,dx,\quad Q_m^{P1}=\frac{2}{a}\int_0^a Q_x^P\cos\alpha_mx\,dx$$
$$Q_m^{P2}=\frac{2}{a}\int_0^a Q_y^P\sin\alpha_mx\,dx \qquad (۲۰)$$

جایگذاری روابط (۱۹) در معادلات (۱۸)، معادلات حاکم بر تعادل را برای چندلایه‌های ترکیبی زاویه‌دار پادمتقارن نتیجه می‌دهد:

$$A_{66}U''_m-A_{11}\alpha_m^2U_m-\alpha_m\left(A_{12}+A_{66}\right)V'_m-2B_{16}\alpha_mX'_m+B_{26}Y''-B_{16}\alpha_m^2Y_{mn}=-\alpha_mN_m^{P1}+\left(N_m^{P6}\right)'$$
$$\alpha_m\left(A_{12}+A_{66}\right)U'_m-A_{22}V''_m-A_{66}\alpha_m^2V_m+B_{26}X''_m-B_{16}\alpha_m^2X_m+2B_{26}\alpha_mY_m=\alpha_mN_m^{P6}+\left(N_m^{P2}\right)'$$

$$k^2\left(A_{44}W''_m-A_{55}\alpha_m^2W_m-A_{55}\alpha_mX_m+A_{44}Y'_m\right)=-\alpha_mQ_m^{P1}+\left(Q_m^{P2}\right)'-Q_m$$
$$2\alpha_mB_{16}U'_m+B_{26}V''_m-B_{16}\alpha_m^2V_m-k^2A_{55}\alpha_mW_m+D_{66}X''_m-\left(D_{11}\alpha_m^2+k^2A_{55}\right)X_m+\alpha_m\left(D_{12}+D_{66}\right)Y'_m=\alpha_mM_m^{P1}+\left(M_m^{P6}\right)'-Q_m^{P1}$$
$$B_{26}U''_m-B_{16}\alpha_m^2U_m-2B_{26}\alpha_mV'_m-k^2A_{44}W'_m-\alpha_m\left(D_{12}+D_{66}\right)X'_m+D_{22}Y''_m-\left(D_{66}\alpha_m^2+k^2A_{44}\right)Y_m=-\alpha_mM_m^{P6}+\left(M_m^{P2}\right)'-Q_m^{P2}$$

(۲۱)

مشابه بحث‌هایی که در بخش قبل درباره نحوه تأثیر

منتجه‌های نیرو و ممان الکتریکی بر تحلیل چندلایه‌های متعامد انجام شد، برای چندلایه‌های زاویه‌دار پادمتقارن نیز می‌تواند صادق باشد. به دلیل آنکه منتجه‌های نیرو و ممان الکتریکی بر حسب عامل یکسان Φ قابل تعریف هستند، انتظار می‌رود همه این نیروها و ممان‌ها در حل لوی شرکت نکنند. وقتی تابع پتانسیل الکتریکی به صورت سری کسینوسی بسط داده شود، برای وجود حل تحلیلی، نیروها و ممان‌های N_m^{P6}، M_m^{P1}، M_m^{P2}، Q_{mn}^{P1} و Q_{mn}^{P2} باید صفر باشند. به عبارت دیگر، در این شرایط حل تحلیلی لوی در صورتی وجود خواهد داشت که نیروهای الکتریکی N_{xy}^P، Q_x^P و Q_y^P و ممان‌های الکتریکی M_x^P و M_y^P صفر باشند. از طرف دیگر، چنان چه توزیع پتانسیل به صورت سری سینوسی فرض شود، عوامل N_m^{P1}، N_m^{P2}، M_m^{P6}، Q_m^{P1} و Q_m^{P2} باید صفر باشند. چنان که مشاهده می‌شود در حالت کلی، نیروهای برشی عرضی Q_m^{P1} و Q_m^{P2} صفر منظور می‌شود؛ اما در شرایط خاص ممکن است بتوان این نیروها را مخالف صفر در نظر گرفت. به عنوان مثال، اگر لایه‌های پیزوالکتریک از کلاس mm2بوده و $e_{15}=e_{24}$ (یا به عبارتی $\overline{e}_{25}=0$) آن گاه در فرض بسط سینوسی برای تابع پتانسیل، Q_m^{P1} مخالف صفر خواهد بود.

حل معادلات

چنان که مشاهده شد، به کمک روش ارایه‌شده معادلات حاکم بر تعادل که به طور ذاتی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه دو است، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دو با ضرایب ثابت تبدیل شد که می‌توان آن را به صورت تحلیلی حل کرد. برای حل دستگاه معادلات (۱۶) و (۱۷) از رهیافت فضای حالت [۲۵] کمک گرفته شده است. رهیافت فضای حالت، شامل نوشتن یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه بالاتر به فرم یک معادله ماتریسی مرتبه اول می‌شود که حل آن با به کارگیری روش‌های ماتریسی بر حسب مقادیر ویژه اپراتور ماتریسی، به دست می‌آید. با این توصیف از رهیافت فضای حالت، دستگاه خطی معادلات دیفرانسیل معمولی (۱۶) و (۲۱) با ضرایب ثابت را می‌توان به فرم یک معادله دیفرانسیل ماتریسی مرتبه اول نوشت:

$$\{Z'\}=[T]\{Z\}+\{F\} \qquad (۲۲)$$

که در آن $\{Z(x)\}$ بردار حالت است و متغیرهای حالت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}&Z_1=U_m(x),\quad Z_2=U'_m(x),\quad Z_3=V_m(x),\quad Z_4=V'_m(x)\\&Z_5=W_m(x),\quad Z_6=W'_m(x),\quad Z_7=X_m(x),\quad Z_8=X'_m(x)\\&Z_9=Y_m(x),\quad Z_{10}=Y'_m(x)\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

همچنین ماتریس ۱۰×۱۰ $[T]$ و بردار ۱۰ عضوی $\{F\}$ که شامل عناصر ثابت می‌شوند، برای هر دو چیدمان متعامد و زاویه‌دار متقارن، در بخش ضمیمه ارایه خواهد شد. می‌توان نشان داد که پاسخ معادله دیفرانسیل ماتریسی (۲۲) از رابطه زیر به دست می‌آید [۲۶]:

$$\{Z\}=[\Lambda][E]\{K\}+[\Lambda][E]\int_0^x[E]^{-1}[\Lambda]^{-1}\{F\}d\zeta \qquad (۲۴)$$

در این رابطه $[\Lambda]$، ماتریس بردارهای ویژهٔ ماتریس $[T]$، $[\Lambda]^{-1}$ معکوس آن و $\{K\}$ برداری ۱۰ عضوی از ثوابت انتگرال‌گیری است که به وسیله اعمال شرایط مرزی بر لبه‌های $x=\pm a/2$ تعیین می‌شود. همچنین

$$[E]=diag(e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},\ldots,e^{\lambda_{10} x}) \qquad (۲۵)$$

که در آن λ_j مقادیر ویژه مربوط به ماتریس $[T]$ هستند. ثابت‌های مربوط به حل معادلات فضای حالت برای شرایط مرزی مختلف، برای هر دو چیدمان متعامد و زاویه‌دار متقارن روی لبه‌های در بخش ضمیمه، استخراج و دسته‌بندی شده است.

جدول ۱: منتجه‌های نیرو و ممان پیزوالکتریک که در حل لوی چندلایه‌های ترکیبی متعامد حذف می‌شوند.

بسط پتانسیل در راستای y	کلاس کریستالوگرافی لایه‌های پیزوالکتریک	ثابت‌های که به واسطه تعامد صفرند	منتجه‌های که باید صفر باشند
کسینوسی	222	$\overline{e}_{24}$, $\overline{e}_{15}$	N_m^{P1}, N_m^{P2}, M_m^{P1}, M_m^{P2}
سینوسی	222	$\overline{e}_{24}$, $\overline{e}_{15}$	N_m^{P6}, Q_m^{P1}, Q_m^{P2}, M_m^{P6}
سینوسی	mm2	$\overline{e}_{36}$, $\overline{e}_{14}$, $\overline{e}_{25}$	-

نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از فرمولاسیون ارایه‌شده در بخش‌های گذشته به وسیله حل سه مسئله نمونه بررسی می‌شود. مسئله اول شامل پنج لایه متقارن $[p^0/0/90/0/p^0]$ (دو لایه پیزوالکتریک از جنس PZT و هسته graghite/epoxy است) با شرایط مرزی ساده و بارگذاری گسترده سینوسی مکانیکی و الکتریکی است. در مسئله‌های نمونه دوم و سوم، به ترتیب، چهار لایه پیزوالکتریک $[p^{90}/p^0/p^{90}/p^0]$ (لایه‌های بالایی و زیرین از جنس PZT-4 و دو لایه دیگر از PVDF هستند) و هشت لایه $[p^0/-45/30/45/-45/-30/45/p^0]$ (دو لایه پیزوالکتریک از جنس PZT-4 و هسته S-glass / epoxy است)، با شرایط مرزی قابل قبول روش لوی و بارگذاری گسترده ثابت الکتریکی تحلیل می‌شود. علاوه بر این، دو کد رایانه‌ای برای تحلیل استاتیکی چندلایه‌های ترکیبی متعامد و زاویه‌دار پادمتقارن به روش ناویر تهیه شده است که نتایج به دست آمده از آن، با نتایج حاصل از روش لوی هم از نظر دقت و هم از نظر سرعت همگرایی مقایسه می‌شود (روش ناویر فقط قابلیت تحلیل چندلایه‌های با چهار لبه مقید به شرایط تکیه‌گاهی ساده را دارد). نتایج عددی مشتمل بر تغییرات بی‌بعد شده جابه‌جایی‌های مکانیکی و الکتریکی و تنش‌های داخل صفحه‌ای و بین صفحه‌ای می‌شود.

لازم به ذکر است، در مسئله نمونه اول، تنش برشی عرضی از روابط ساختاری (۳) محاسبه شده و در مسئله‌های دوم و سوم نتایج برای تنش‌های بین‌لایه‌ای از روابط سه‌بعدی الاستیسیته [۲۳] به دست آمده است. همچنین کلیه شرایط مرزی ساده در مثال‌های اول و دوم از نوع ۱ و در مثال سوم از نوع ۲ انتخاب شده است. علاوه بر این، با توجه به آنکه با سازه‌هایی از نوع ورق سر و کار داریم و با توجه به ضخامت کم لایه‌های پیزوالکتریک، در همه مسایل، فرض بر آن است که تغییرات ولتاژ در راستای ضخامت به صورت خطی است.

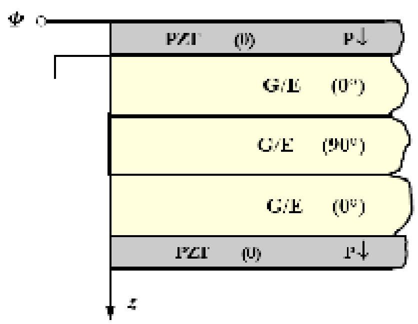
چندلایه ترکیبی $[p^0/0/90/0/p^0]$

اولین مثال به تحلیل پنج لایه مربعی شکل $[p^0/0/90/0/p^0]$ با لایه‌های پیزوالکتریک بسیار نازک و مقید به چهار تکیه‌گاه ساده اختصاص یافته است. این موضوع قبل از این توسط Ray و همکارانش [۲۷] به صورت تحلیلی (بر اساس رهیافت حل دقیق سه‌بعدی Pagano [۲۸]) حل شده است. چندلایه تحت دو بارگذاری گسترده سینوسی مکانیکی و الکتریکی، به شکل زیر قرار دارد:

$$q(x,y)=q_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \qquad (۲۶)$$

$$\Phi(x,y)=\Phi_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \qquad (۲۷)$$

که q_0 و Φ_0 به ترتیب مقادیر بیشینه بار مکانیکی و پتانسیل الکتریکی (ولتاژ) اعمالی به سازه هستند. سطح بالایی لایه پیزوالکتریک بالایی (لایه شماره ۱) اعمال شده و پتانسیل الکتریکی سطح پایینی این لایه صفر است (اتصال به زمین). شمایی از چیدمان لایه‌ها و نحوه بارگذاری الکتریکی در شکل (۲) نمایش داده شده است (ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک، به دلیل محدودیت، اغراق‌آمیز نشان داده شده است).



شکل ۲: نحوه چیدمان لایه‌ها و بارگذاری الکتریکی مربوط به چندلایه $[p^0/0/90/0/p^0]$.

سه لایه مرکزی سازه، هر یک دارای ضخامت یکسان ۳ میلی‌متر بوده و از جنس graphite/epoxy در نظر گرفته شده‌اند. خواص مواد مورد استفاده برای این لایه‌ها در دستگاه مختصات ماده، عبارتند از:

$$E_1=25E_2,\quad G_{12}=G_{13}=0.5E_2,\quad G_{23}=0.2E_2$$
$$\nu_{12}=\nu_{23}=\nu_{13}=0.25,\quad E_2=6.9\text{ GPa}$$
$$\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=\epsilon_{33}=8.85\times10^{-12}\text{ F/m} \qquad (۲۸)$$

همچنین ضخامت هر یک از لایه‌های پیزوالکتریک، ۴۰ میکرومتر اعمال شده که خواص مواد تشکیل‌دهنده آنها (PZT) به این ترتیب است:

$$E_1=E_2=2\text{ GPa},\quad \nu_{12}=\nu_{23}=\nu_{13}=0.29$$
$$\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=\epsilon_{33}=0.1062\times10^{-9}\text{ F/m}$$
$$e_{31}=e_{32}=0.0046\text{ C/m}^2,\quad e_{33}=e_{24}=e_{15}=0 \qquad (۲۹)$$

مقادیر بی‌بعدشده جابه‌جایی عرضی $\bar{w}$ و تنش‌های داخل صفحه‌ای $\bar{\sigma}_x$، $\bar{\sigma}_y$ و $\bar{\sigma}_{xy}$ و بین صفحه‌ای $\bar{\sigma}_{yz}$ برای حالت بارگذاری $q_0 = 1\,\text{Pa}$ و $\Phi_0 = 100\,\text{V}$، به کمک جدول (۲) با نتایج موجود در مرجع [۲۷] و نیز نتایج حاصل از حل ناویر مقایسه شده است. مقادیر جابه‌جایی عرضی $\bar{w}$ در مرکز ورق، تنش‌های عمودی $\bar{\sigma}_x$ و $\bar{\sigma}_y$ در مرکز ورق و به ترتیب در فاصله ۴.۵± و ۱.۵± میلی‌متر از صفحه میانی، تنش برشی $\bar{\sigma}_{xy}$ در گوشه ورق و به فاصله ۴.۵± میلی‌متر از صفحه میانی و بالاخره تنش برشی بین صفحه‌ای $\bar{\sigma}_{yz}$ در صفحه میانی و وسط لبه $y = 0$ محاسبه شده‌اند. لازم به ذکر است، مقادیر تنش‌های $\bar{\sigma}_x$ و $\bar{\sigma}_{xy}$ مربوط به لایه‌های graphite/epoxy است. همچنین تنش‌ها و خیز به این شکل بی‌بعد شده‌اند:

$$\bar{w} = w_0\left(\frac{E_2 h^3}{a^4 q_0}\right)\times 10^2,\quad (\bar{\sigma}_x,\bar{\sigma}_y,\bar{\sigma}_{xy}) = (\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy})\left(\frac{h^2}{a^2 q_0}\right)$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz}\left(\frac{h}{a q_0}\right) \tag{۳۰}$$

که در آن E_2 مدول یانگ در راستای عمود بر جهت قرارگیری الیاف و h ضخامت مربوط به لایه‌های میانی (سه لایه غیر پیزو) است.

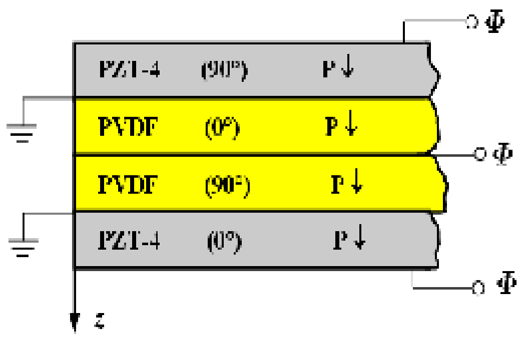
تطابق بسیار خوبی بین نتایج حل Ray و همکارانش [۲۷] و روش لوی دیده می‌شود. البته دلیل این تطابق عالی بین نتایج دو روشی که یکی بر اساس یک تئوری سه‌بعدی و دیگری بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول شکل گرفته را می‌توان علاوه بر توانایی روش، مدیون ضخامت به عرض کم ورق نیز دانست. بین نتایج حاصل از روش‌های ناویر و لوی، حتی در مورد تنش‌ها هیچ گونه اختلافی مشاهده نمی‌شود. لازم به ذکر است که هم‌گرایی روش‌های ناویر و لوی، با یک تکرار انجام گرفته است که این موضوع با توجه به شکل سینوسی بارهای مکانیکی و الکتریکی قابل پیش‌بینی بود.

چندلایه پیزوالکتریک $[p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}]$

چندلایه مورد بحث دارای نسبت طول به عرض ۱ و طول به ضخامت ۱۰ است و همه لایه‌های تشکیل‌دهنده آن ضخامت یکسان دارند ($h/4$). لایه‌های بالایـــی و زیرین از جنس PZT-4 و دو لایه دیگر از PVDF انتخاب شده‌اند. خواص این مواد که از مرجع [۲۹] اقتباس شده، به شرح زیر است:

PZT-4: $C_{11} = 139.00$ GPa, $C_{22} = 139.00$ GPa, $C_{44} = 25.60$ GPa
$C_{55} = 25.60$ GPa, $C_{66} = 30.60$ GPa, $\nu_{12} = 0.329$
$e_{31} = e_{32} = -5.2\ \text{C/m}^2$, $e_{33} = 15.08\ \text{C/m}^2$, $e_{24} = e_{15} = 12.72\ \text{C/m}^2$
$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 1.306\times10^{-8}$ F/m, $\epsilon_{33} = 1.151\times10^{-8}$ F/m
PVDF: $C_{11} = 238.00$ GPa, $C_{22} = 23.60$ GPa, $C_{44} = 2.15$ GPa
$C_{55} = 4.40$ GPa, $C_{66} = 6.43$ GPa, $\nu_{12} = 0.154$
$e_{31} = -0.13\ \text{C/m}^2$, $e_{32} = -0.14\ \text{C/m}^2$, $e_{33} = -0.276\ \text{C/m}^2$
$e_{24} = -0.009\ \text{C/m}^2$, $e_{15} = -0.135\ \text{C/m}^2$
$\epsilon_{11} = 1.107\times10^{-10}$ F/m, $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 1.061\times10^{-10}$ F/m

نحوه اعمال ولتاژ به الکترودها در شکل (۳) نمایش داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، اتصال سیم‌ها به شکل موازی بوده و کلیه اتصالات در حالت مدار باز است.



شکل ۳: نحوه چیدمان لایه‌ها و بارگذاری الکتریکی مربوط به چندلایه $[p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}]$.

نتایج برای بارگذاری ثابت $\Phi = \Phi_0$ توسط شکل‌های (۴) تا (۱۵) نمایش داده شده است. در این شکل‌ها، مقادیر تنش‌ها و جابه‌جایی‌های مکانیکی و الکتریکی به صورت زیر بدون بعد شده‌اند:

$$(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) = (u,v,w)\left(\frac{E_2 e_{31}}{10\Phi_0}\right)$$

$$(\bar{\sigma}_x,\bar{\sigma}_y,\bar{\sigma}_{xy}) = (\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy})\left(\frac{a}{100\Phi_0 e_{31}}\right)$$

$$(\bar{\sigma}_{xz},\bar{\sigma}_{yz},\bar{\sigma}_z) = (\sigma_{xz},\sigma_{yz},\sigma_z)\left(\frac{a}{\Phi_0 e_{31}}\right),\quad \bar{D}_z = D_z\left(\frac{10^4}{e_{31}}\right) \tag{۳۱}$$

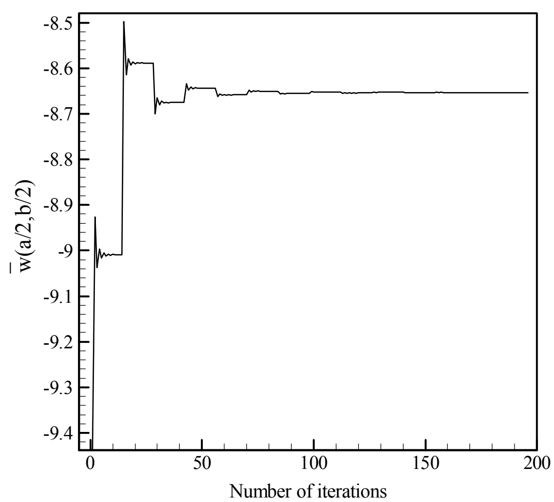
که در آن D_z مؤلـفه بردار جابه‌جایی الکتریکی در راستای z بوده و نیز مقادیر E_2 و e_{31} به ترتیب مدول یانگ و ثابت تنش پیزوالکتریک مربوط به لایه‌های PZT-4 هستند.

جدول ۲: مقایسه تنش‌های چندلایه $[p^0/0/90/0/p^0]$ حاصل از روش‌های مختلف.

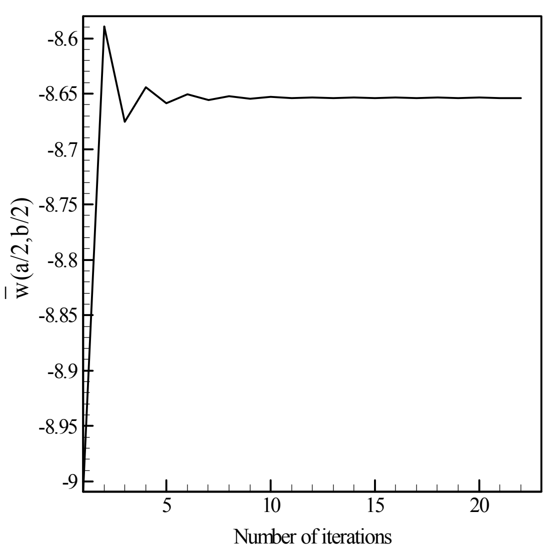
روش	$\bar{w}\,(0,a/2,0)$	$\bar{\sigma}_x\,(0,a/2,\pm h/2)$	$\bar{\sigma}_y\,(0,a/2,\pm h/6)$	$\bar{\sigma}_{xy}\,(-a/2,0,\pm h/2)$	$\bar{\sigma}_{yz}\,(0,0,0)$
لوی	۰.۴۱۱	۰.۵۱۸ / -۰.۵۰۴	۰.۱۸۴ / -۰.۱۵۸	۰.۰۱۹۸ / -۰.۰۲۰۶	۰.۰۸۲۹
ناویر	۰.۴۱۱	۰.۵۱۸ / -۰.۵۰۴	۰.۱۸۴ / -۰.۱۵۸	۰.۰۱۹۸ / -۰.۰۲۰۶	۰.۰۸۲۹
Ray و همکاران [۲۷]	۰.۴۴۷	۰.۵۱۸ / -۰.۵۰۴	۰.۱۸۴ / -۰.۱۵۸	۰.۰۱۹ / -۰.۰۲۱	۰.۰۸۶

با توجه به وجود سه نوع شرط مرزی ساده، گیردار و آزاد، در مجموع شش ترکیب متمایز از شرایط مرزی ذکرشده بر چهار لبه ورق، می‌توان در نظر گرفت که شرایط حل لوی را برآورده کند (SSSS، FSSS، CSSS، FSFS، CSCS، CSFS)؛ بنابراین، نتایج فقط برای این شش ترکیب از شرایط مرزی ارایه شده است. شکل‌های (۴) و (۵) به ترتیب نحوه هم‌گرایی روش‌های ناویر و لوی را برای مسئله مورد بررسی نشان می‌دهند. در این شکل‌ها خیز بی‌بعد شده مرکز چندلایه با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده بر حسب تعداد تکرار رسم شده است. در مورد شکل‌های ذکرشده، این توضیح باید داده شود که هر عدد روی محور افقی شکل (۵) نماینده نصف تعداد جملات مورد نیاز در سری‌های مثلثاتی تعریف شده برای حل لوی است؛ چرا که با توجه به صفر شدن توابع منتجه‌های نیرو و ممان الکتریکی به ازای مقادیر زوج m، در شرایط بارگذاری ثابت، در عمل تعداد تکرار مورد نیاز در فرآیند حل معادلات حاکم برای یک m معین، نصف آن مقدار m خواهد بود. همچنین در شکل (۴) هر عدد روی محور افقی نماینده مقدار $\frac{m \times n}{4}$ است که m و n تعداد جملات سری‌های دوگانه مثلثاتی یا به عبارتی تعداد تکرار در روش حل ناویر هستند (دلیل ضرب m در n، آن است که روش حل دارای دو حلقه تکرار تو در تو است و دلیل تقسیم حاصل ضرب بر ۴، صفر شدن منتجه‌های نیرو و ممان الکتریکی به ازای مقادیر زوج m و n، در شرایط بارگذاری ثابت است). برای رسیدن به یک دقت سه رقمی اعشاری برای $\bar{w}(0,0)$، تعداد تکرارهای مورد نیاز در دو روش، به این شرح است: روش لوی ۲۲ تکرار و روش ناویر: ۱۹۶=۱۴×۱۴ ($m=n=28$).

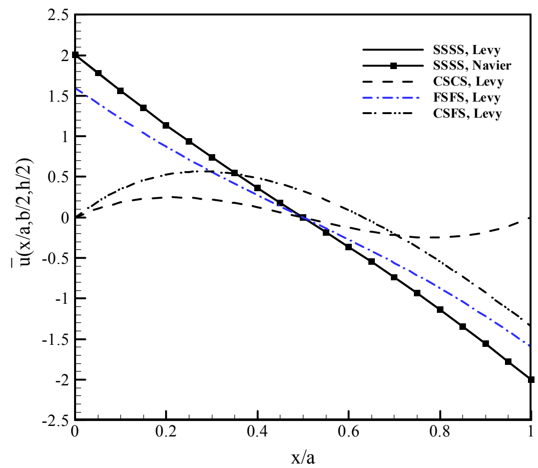
منحنی‌های مقایسه‌ای تغییرات جابه‌جایی‌های مکانیکی در راستای طول یا عرض و تنش‌ها و بردار جابه‌جایی الکتریکی در راستای ضخامت برای شرایط مرزی مختلف، مربوط به حالت بارگذاری الکتریکی ثابت، توسط شکل‌های زیر قابل مشاهده است.



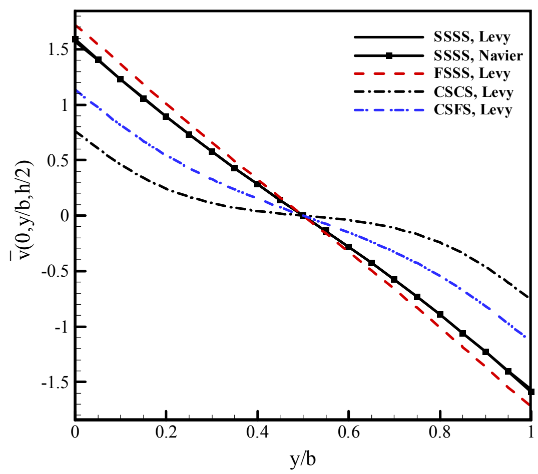
شکل ٤: خیز مرکز چندلایه$[p^{90}/p^0/p^{90}/p^0]$ بر حسب تعداد تکرار؛ مربوط به روش ناویر.



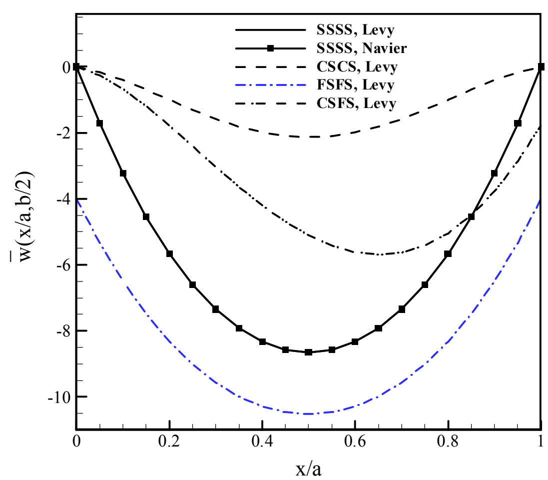
شکل ٥: خیز مرکز چندلایه$[p^{90}/p^0/p^{90}/p^0]$ باشرایط مرزی ساده بر حسب تعداد تکرار؛ مربوط به روش لوی.



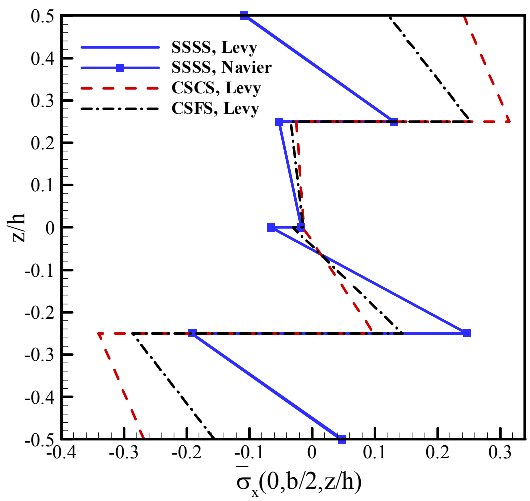
شکل ٦: تغییرات $\bar{u}$ بر حسب x/a برای چندلایه $[p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}]$.



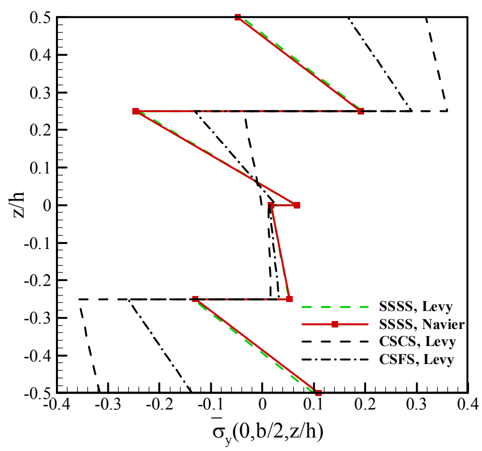
شکل ۷: تغییرات $\bar{v}$ بر حسب y/a برای چندلایه $[p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}]$.



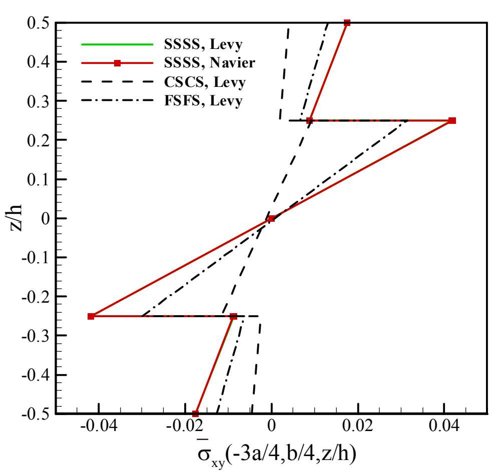
شکل ۸: تغییرات $\bar{w}$ بر حسب x/a برای چندلایه $[p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}]$.



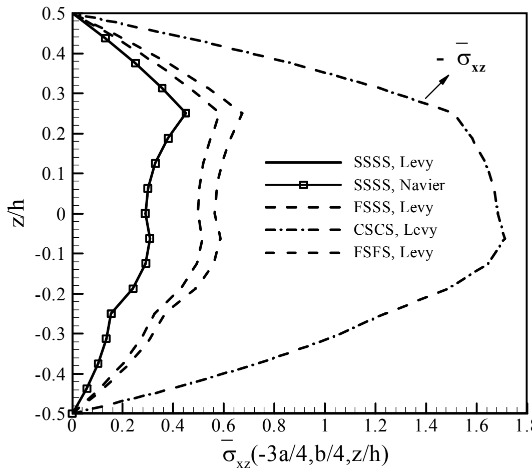
شکل ۹: توزیع $\bar{\sigma}_x$ در راستای ضخامت چندلایه $[p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}]$.



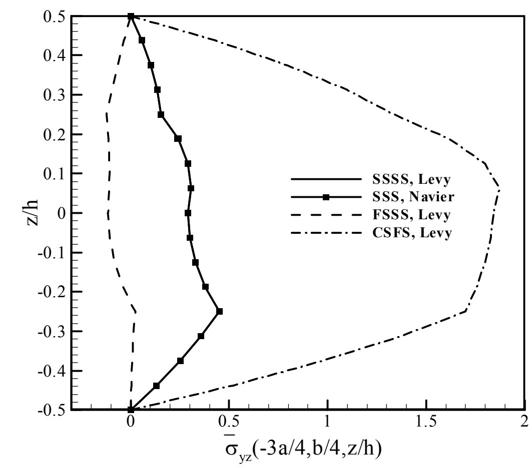
شکل ۱۰: توزیع $\bar{\sigma}_y$ در راستای ضخامت چندلایه $[p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}]$.



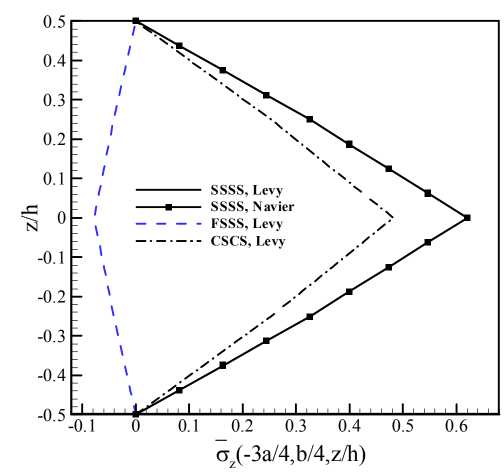
شکل ۱۱: توزیع $\bar{\sigma}_{xy}$ در راستای ضخامت چندلایه $[p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}]$.



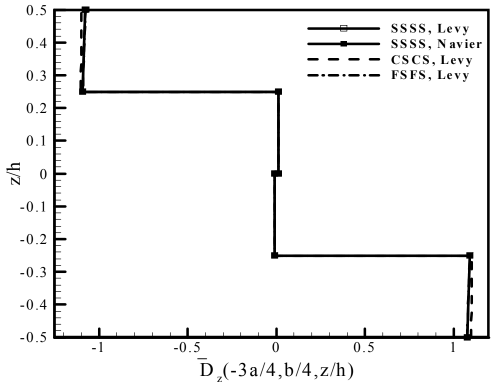
شکل ۱۲: توزیع $\bar{\sigma}_{xz}$ در راستای ضخامت چندلایه[$p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}$].



شکل ۱۳: توزیع $\bar{\sigma}_{yz}$ در راستای ضخامت چندلایه[$p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}$].



شکل ١٤: توزیع $\bar{\sigma}_{z}$ در راستای ضخامت چندلایه[$p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}$].

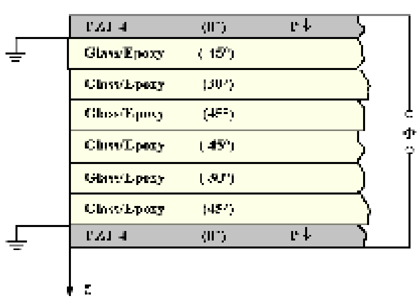


شکل ۱۵: تغییرات $\bar{D}_z$ در راستای ضخامت چندلایه [$p^{90}/p^{0}/p^{90}/p^{0}$].

با بررسی این شکل‌ها می‌توان مشاهده کرد که نتایج عددی ارایه شده برای روش ناویر به نحو بسیار عالی بر نتایج حاصل از روش حل لوی منطبق هستند. همچنین مشاهده می‌شود که توزیع مؤلفه D_z بردار جابه‌جایی الکتریکی چندان تابع نوع شرایط مرزی نیست.

چندلایه ترکیبی [p^{0}/-45/30/45/-45/-30/45/p^{0}]

یک هشت لایه ترکیبی زاویه‌دار پادمتقارن مربعی شکل با چیدمان [p^{0}/-45/30/45/-45/-30/45/p^{0}] و نسبت طول به ضخامت $a/h=20$ را در نظر بگیرید. چند لایه از شش لایه S-glass/epoxy (لایه‌های غیر فعال) با ضخامت یکسان و دو لایه PZT-4 (لایه‌های فعال) که ضخامت هر یک نصف ضخامت هر لایه غیر فعال بوده و به صفحات بالایی و پایینی این لایه‌ها متصل شده، تشکیل شده است. پتانسیل الکتریکی سطوح بالایی و پایینی ورق صفر بوده ($\Phi=0$) در حالی که به سطوح دیگر لایه‌های پیزوالکتریک یک پتانسیل الکتریکی ثابت $\Phi=\Phi_0$ اعمال می‌شود (نحوه اعمال ولتاژ و چیدمان لایه‌ها در شکل (۱۶) نشان داده شده است).



شکل ١٦: نحوه چیدمان لایه‌ها و بارگذاری الکتریکی چندلایه [p^{0}/-45/30/45/-45/-30/45/p^{0}].

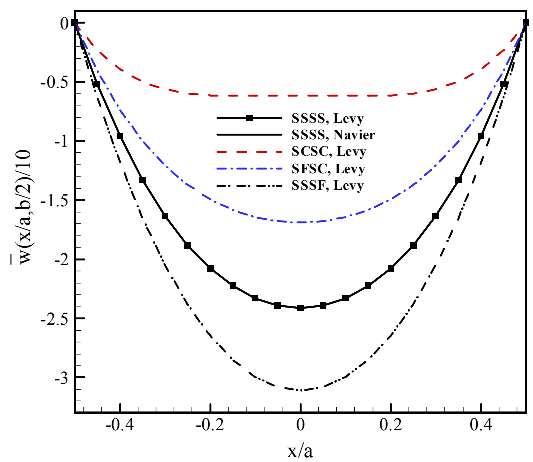
خواص مکانیکی لایه‌های غیر فعال به شکل [۳۰]:

$$E_1 = 55\text{ GPa},\quad E_2 = 16\text{ GPa}$$
$$G_{12} = G_{23} = G_{13} = 7.6\text{ GPa},\quad \nu_{12} = 0.29$$

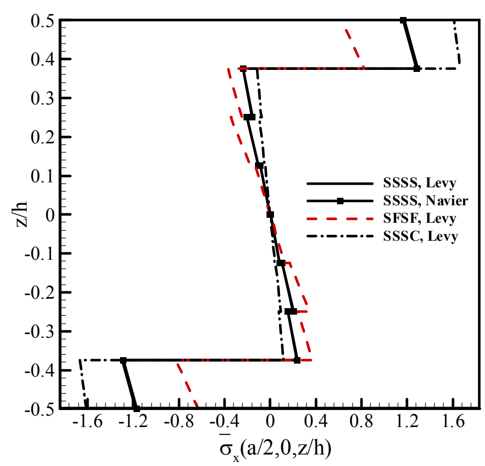
و خواص مکانیکی و الکتریکی لایه‌های فعال به شکل [۳۱]:

$$E_1 = E_2 = 81.3\text{ GPa},\quad G_{12} = 30.6\text{ GPa}$$
$$G_{23} = G_{12} = 25.6\text{ GPa},\quad \nu_{12} = 0.28\quad e_{31} = e_{32} = -5.2\text{ C/m}^2$$
$$e_{33} = 15.08\text{ C/m}^2,\quad e_{24} = 12.72\text{ C/m}^2$$
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 1.3054\times10^{-8}\text{ F/m},\quad \varepsilon_{33} = 1.1505\times10^{-8}\text{ F/m}$$

در نظر گرفته شده است. همچنین توجه کنید که نتایج عددی ارایه شده به کمک روابط (۲۹) بدون بعد شده‌اند. منحنی تغییرات خیز بر حسب x/a در $y=0$، برای چهار نوع از شرایط مرزی توسط شکل (۱۷) نمایش داده شده است.

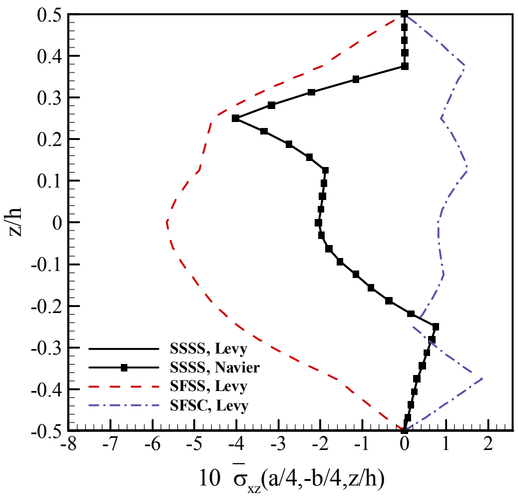


شکل ۱۷: تغییرات خیز بر حسب x/a برای چندلایه [p^0/-45/30/45/-45/-30/45/p^0].



شکل ۱۸: توزیع تنش $\bar{\sigma}_x$ در راستای ضخامت چندلایه [p^0/-45/30/45/-45/-30/45/p^0].

شکل‌های (۱۸) و (۱۹)، به ترتیب، توزیع در راستای ضخامت تنش‌های عمودی داخل صفحه‌ای $\bar{\sigma}_x$ و تنش‌های برشی بین صفحه‌ای $\bar{\sigma}_{xz}$ را برای شرایط مرزی مختلف نشان می‌دهند. مطابق انتظار، تنش σ_{xz} در سطوح بالایی و زیرین چندلایه صفر به دست آمده است. لازم است بـه این موضوع اشاره شود که همه نتایج عددی ارایه شده در این مسئله نمونه با تعداد ۲۵ تا ۳۰ تکرار (بسته به نوع شرایط مرزی) کسب شده است.



شکل ۱۹: توزیع تنش $\bar{\sigma}_{xz}$ در راستای ضخامت چندلایه [p^0/-45/30/45/-45/-30/45/p^0].

نتیجه‌گیری

به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش حل لوی رفتار استاتیکی چندلایه‌های متعامد و زاویه‌دار پادمتقارن ترکیبی پیزوالکتریک با خواص ارتوتروپیک بررسی شده است. معادلات حاکم بر تعادل بر حسب نوع کلاس کریستالوگرافی لایه‌های پیزوالکتریک دسته‌بندی شده و محدودیت روش لوی در تحلیل خمش این گروه از سازه‌ها مورد بحث قرار گرفته است. همچنین رهیافت فضای حالت، با موفقیت، برای حل معادلات حاکم بر تعادل مسئله مورد بررسی به کار گرفته شده است. مشاهده می‌شود که هنگام استفاده از روش‌های حل ناویر و لوی برای تحلیل استاتیکی چندلایه‌های ترکیبی پیزوالکتریک، امکان در نظر گرفتن همزمان سهم همه نیروها و ممان‌های الکتریکی میسر نیست. مقایسه نتایج عددی با نتایج حاصل از روش ناویر و حل دقیق سه‌بعدی، نشان از درستی و دقت عالی نتایج ارایه شده دارد.

مراجع

1 - Khdeir, A. A., Reddy, J. N., and Librescu, L. (1987). "Levy type solutions for symmetrically laminated rectangular plates using First-order shear deformation theory." *J. App. Mech.,* Vol. 54, PP. 640-642.

2 - Reddy, J. N. and Khdeir, A. A. (1989). "Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories." *AIAA J.,* Vol. 27, No. 12, PP. 1808-1817.

3 - Khdeir, A. A. (1989). "Comparison between shear deformable and kirchhoff theories for bending, buckling, and vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates." *Compos. Struct.,* Vol. 13, PP. 159-172.

4 - Bose, P. and Reddy, J.N. (1998). "Analysis of composite plates using various plate theories. Part 1: Formulation and analytical solutions." *Struct. Eng. Mech*., Vol. 6, No. 6, PP. 583-612.

5 - Bose, P. and Reddy, J. N. (1998). "Analysis of composite plates using various plate theories. Part 2: Formulation and analytical solutions." *Struct. Eng. Mech*., Vol. 6, No. 7, PP. 727-746.

6 - Khdeir, A. A. and Reddy, J. N. (1999). "Free vibrations of laminated composite plates using second-order shear deformation theory." *Comput. Struct.*, Vol. 71, PP. 617-626.

7 - Palardy, R. F. and Palazotto, A. N. (1990). "Buckling and vibration of composite plates using the Levy method." *Compos. Struct*., Vol. 14, No. 1, PP. 61-86.

8 - Khdeir, A. A. (1995). "Forced vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates with various boundary conditions." J. Sound Vib., Vol. 188, No. 2, PP. 257-267.

9 - Khdeir, A. A., Reddy, J. N., and Librescu, L. (1987). "Analytical solution of a refined shear deformation theory for rectangular composite plates." *Int. J. Solids Struct.,* Vol. 23, No. 10, PP. 1447-1463.

10 - Librescu, L. and Khdeir, A. A. (1988). "Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory, Part I. Stress and displacement." *Compos. Struct.,* Vol. 9*,* PP. 189-213.

11 - Khdeir, A. A. and Librescu, L. (1988). "Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory, Part II. Buckling and free vibration." *Compo. Struct.,* Vol. 9, PP.259-277.

12 - Khdeir, A. A. and Reddy, J. N. (1989). "Exact-solutions for the transient response of symmetric cross-ply laminates using a higher-order plate theory." *Compos. Sci. Tech.,* Vol. 34, PP. 205-224.

13 - Khdeir, A. A. (1989). "Free vibration and buckling of unsymmetric cross-ply laminated plates using a refined theory." *J. Sound Vib*., Vol. 128, No. 3, PP. 377-395.

14 - Khdeir, A. A. and Reddy, J. N. (1991). "Thermal stresses and deflections of cross-ply laminated plates using refined plate theories." *J. Thermal Stresses,* Vol. 14, No. 4, PP. 419-438.

15 - Khdeir, A. A. and Reddy, J. N. (1991). "Analytical solutions of refined plate theories of cross-ply composite laminates." *J. Press. Vess. Tech.,* Vol. 113, No. 4, PP. 570-578.

16 - Khdeir, A. A. (1988). "Free vibration and buckling of symmetric cross-ply laminated plates by an exact method." *J. Sound Vib*., Vol. 126, No. 3, PP. 447-461.

17 - Khdeir, A. A. , (1988). "Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including various boundary conditions." *J. Sound Vib*., Vol. 122, No. 2, PP. 377-388.

18 - Nosier, A. and Reddy, J. N. (1992). "On vibration and buckling of symmetric laminated plates according to shear deformation theories." *Acta Mechanica,* Vol. 94, PP. 123-170.

19 - Kapuria, S., Dube, G.P., Dumir, P.C. and Sengupta, S. (1997). "Levy-type piezothermoelastic solution for hybrid plate by using first-order shear deformation theory." *Compos. Part B*, Vol. 28B, PP. 535-546.

20 - Aldraihem O. J. and Khdeir A. A. (2006). "Analytical solutions of antisymmetric angle-ply laminated plates with thickness-shear piezoelectric actuators." *Smart Mater. Struct*., Vol. 15, PP. 232-242.

21 - Khdeir, A. A. and Reddy, J. N. (1991). "Analytical solutions of refined plate theories of cross-ply composite laminates." *J. Press. Vess. Tech.,* Vol. 113, No. 4, PP. 570-578.

22 - Chen, W. C. and Liu, W. H. (1990). "Deflections and free vibrations of laminated plates—Levy-type solutions." *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 32, No. 9, PP. 779-793.

23 - Reddy, J.N. (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells*, 2nd edition, CRC Press.

24 - Rozen, C.Z., Hiremath, B.V. and Newnham, R. (1992). *Piezoelectricity*, Springer.

25 - Goldberg, J.L. and Schwartz, A.J. (1972). *Systems of ordinary differential equations*, New York, Harper and Row.

26 - Franklin, J.N. (1968). *Matrix theory*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.

27 - Ray, M.C., Bhattacharya, R. and Samanta, B. (1993). "Exact solutions for static analysis of intelligent structures." *AIAA J.*, Vol. 31, No. 9, PP. 1684-1691.

28 - Pagano, N.J. and Hatfield, S.J. (1972). "Elastic behavior of multilayered bidirectional composites." *AIAA J.*, Vol. 10, PP. 931-933.

29 - Qing, G., Qiu, J. and Liu, Y. (2006). "A semi-analytical solution for static and dynamic analysis of plates with piezoelectric patches." *Int. J. Solids Struct*., Vol. 43, No. 6, PP. 1388-1403.

30 - Victor, M.F.C., Cristovao, M.M.S. and Carlos, A.M.S. (2003). "Buckling optimization of composite laminated adaptive structures." *Compos. Struct.*, Vol. 62, PP. 315-321.

31 - Ganesan, N. and Kadoli R., (2003). "Buckling and dynamic analysis of piezothermoelastic composite cylindrical shell." *Compos. Struct.*, Vol. 59, PP. 45-60.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - First-Order Shear Deformation Theory
2 - Cross-Ply
3 - Classical laminated Plate Theory
4 – Third-Order Shear Deformation Theory
5 - Ant symmetric Angle-Ply
6 - Navier
7 - Graphite/Epoxy
8 - Piezoelectric Hybrid Composite laminated Plates
9 - Active

ضمیمه

الف) عناصر مخالف صفر ماتریس ۱۰×۱۰ $[T]$ و بردار ۱۰ عضوی $\{F\}$

چیدمان متعامد

$$T_{12} = T_{34} = T_{56} = T_{78} = T_{910} = 1$$

$$T_{21} = \beta_m^2 \frac{B_{11}B_{66} - D_{11}A_{66}}{B_{11}{}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$T_{24} = \beta_m \frac{B_{11}\left(B_{12}+B_{66}\right) - D_{11}\left(A_{12}+A_{66}\right)}{B_{11}{}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$T_{26} = \frac{k^2 B_{11}A_{55}}{B_{11}{}^2 - A_{11}D_{11}}, \quad T_{27} = \beta_m^2 \frac{B_{11}D_{66} - B_{66}D_{11}}{B_{11}{}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$T_{210} = \beta_m \frac{B_{11}\left(D_{12}+D_{66}\right) - D_{11}\left(B_{12}+B_{66}\right)}{B_{11}{}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$T_{42} = \beta_m \frac{D_{66}\left(A_{12}+A_{66}\right) - B_{66}\left(B_{12}+B_{66}\right)}{B_{66}{}^2 - A_{66}D_{66}}$$

$$T_{43} = \beta_m^2 \frac{B_{22}B_{66} - A_{22}D_{66}}{B_{66}{}^2 - A_{66}D_{66}}, \quad T_{45} = \frac{k^2 \beta_m B_{66}A_{44}}{B_{66}{}^2 - A_{66}D_{66}}$$

$$T_{48} = \beta_m \frac{D_{66}\left(B_{12}+B_{66}\right) - B_{66}\left(D_{12}+D_{66}\right)}{B_{66}{}^2 - A_{66}D_{66}}$$

$$T_{49} = \frac{\beta_m^2 \left(D_{22}B_{66} - B_{22}D_{66}\right) + k^2 B_{66}A_{44}}{{B_{66}}^2 - A_{66}D_{66}}$$

$$T_{65} = \frac{\beta_m^2 A_{44}}{A_{55}}, \quad T_{68} = -1, \quad T_{69} = \frac{\beta_m A_{44}}{A_{55}}$$

$$T_{81} = \beta_m^2 \frac{A_{11}B_{66} - B_{11}A_{66}}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}$$

$$T_{84} = \beta_m \frac{A_{11}\left(B_{12} + B_{66}\right) - B_{11}\left(A_{12} + A_{66}\right)}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}$$

$$T_{86} = \frac{k^2 A_{11}A_{55}}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}, \quad T_{87} = \frac{\beta_m^2 \left(A_{11}D_{66} - B_{11}B_{66}\right) + k^2 A_{11}A_{55}}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}$$

$$T_{810} = \beta_m \frac{A_{11}\left(D_{12} + D_{66}\right) - B_{11}\left(B_{12} + B_{66}\right)}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}$$

$$T_{102} = \beta_m \frac{B_{66}\left(A_{12} + A_{66}\right) - A_{11}\left(B_{12} + B_{66}\right)}{A_{66}D_{66} - {B_{66}}^2}$$

$$T_{103} = \beta_m^2 \frac{B_{22}A_{66} - A_{22}B_{66}}{A_{66}D_{66} - {B_{66}}^2}, \quad T_{105} = \frac{k^2 \beta_m A_{66}A_{44}}{A_{66}D_{66} - {B_{66}}^2}$$

$$T_{108} = \beta_m \frac{B_{66}\left(B_{12} + B_{66}\right) - A_{66}\left(D_{12} + D_{66}\right)}{A_{66}D_{66} - {B_{66}}^2}$$

$$T_{109} = \frac{\beta_m^2 \left(A_{66}D_{22} - B_{22}B_{66}\right) + k^2 A_{66}A_{44}}{A_{66}D_{66} - {B_{66}}^2} \qquad (۳۰)$$

عناصر غیر صفر $\{F\}$، با توجه به جدول ۱، به یکی از شکل‌های زیر خواهند بود:

$$F_{21} = \frac{D_{11}\beta_m N_m^{P6} - B_{11}\left(\beta_m M_m^{P6} + Q_m^{P1}\right)}{{B_{11}}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$F_{41} = \frac{B_{66}\left[\left(M_m^{P6}\right)' - Q_m^{P2}\right] - D_{66}\left(N_m^{P6}\right)'}{{B_{66}}^2 - A_{66}D_{66}}$$

$$F_{61} = \frac{\left(Q_m^{P1}\right)' - \beta_m Q_m^{P2} - Q_m}{k^2 A_{55}}$$

$$F_{81} = \frac{B_{11}\beta_m N_m^{P6} - A_{11}\left(\beta_m M_m^{P6} + Q_m^{P1}\right)}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}$$

$$F_{101} = \frac{A_{66}\left[\left(M_m^{P6}\right)' - Q_m^{P2}\right] - B_{66}\left(N_m^{P6}\right)'}{A_{66}D_{66} - {B_{66}}^2} \qquad (۳۱\text{-الف})$$

یا

$$F_{21} = \frac{B_{11}\left(M_m^{P1}\right)' - D_{11}\left(N_m^{P1}\right)'}{{B_{11}}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$F_{41} = \frac{B_{66}\beta_m M_m^{P2} - D_{66}\beta_m N_m^{P2}}{{B_{66}}^2 - A_{66}D_{66}}$$

$$F_{61} = \frac{-Q_m}{k^2 A_{55}}, \quad F_{81} = \frac{A_{11}\left(M_m^{P1}\right)' - B_{11}\left(N_m^{P1}\right)'}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}$$

$$F_{101} = \frac{A_{66}\beta_m M_m^{P2} - B_{66}\beta_m N_m^{P2}}{A_{66}D_{66} - {B_{66}}^2} \qquad (۳۱\text{-ب})$$

و یا

$$F_{21} = \frac{B_{11}\left[\left(M_m^{P1}\right)' - Q_m^{P1}\right] - D_{11}\left(N_m^{P1}\right)'}{{B_{11}}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$F_{41} = \frac{B_{66}\left(\beta_m M_m^{P2} - Q_m^{P2}\right) - D_{66}\beta_m N_m^{P2}}{{B_{66}}^2 - A_{66}D_{66}}$$

$$F_{61} = \frac{\left(Q_m^{P1}\right)' - \beta_m Q_m^{P2} - Q_m}{k^2 A_{55}}$$

$$F_{81} = \frac{A_{11}\left[\left(M_m^{P1}\right)' - Q_m^{P1}\right] - B_{11}\left(N_m^{P1}\right)'}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}$$

$$F_{101} = \frac{A_{66}\left(\beta_m M_m^{P2} - Q_m^{P2}\right) - B_{66}\beta_m N_m^{P2}}{A_{66}D_{66} - {B_{66}}^2} \qquad (۳۱\text{-پ})$$

چیدمان زاویه‌دار پادمتقارن

$$T_{12} = T_{34} = T_{56} = T_{78} = T_{910} = 1$$

$$T_{21} = \alpha_m^2 \frac{A_{11}D_{22} - B_{16}B_{26}}{A_{66}D_{22} - {B_{26}}^2}$$

$$T_{24} = \alpha_m \frac{D_{22}\left(A_{12} + A_{66}\right) - 2B_{26}^2}{A_{66}D_{22} - {B_{26}}^2}, \quad T_{26} = \frac{k^2 B_{26}A_{44}}{A_{66}D_{22} - {B_{26}}^2}$$

$$T_{28} = \alpha_m^2 \frac{2B_{16}D_{26} - B_{26}\left(D_{12} + D_{66}\right)}{A_{66}D_{22} - {B_{26}}^2}$$

$$T_{29} = \frac{\alpha_m^2 B_{16}D_{22} - B_{26}\left(\alpha_m^2 D_{66} + k^2 A_{44}\right)}{A_{66}D_{22} - {B_{26}}^2}$$

$$T_{42} = \alpha_m \frac{D_{66}\left(A_{12} + A_{66}\right) - 2B_{16}B_{26}}{{B_{26}}^2 - A_{22}D_{66}}$$

$$T_{43} = \alpha_m^2 \frac{B_{16}B_{26} - A_{66}D_{66}}{{B_{26}}^2 - A_{22}D_{66}}, \quad T_{45} = \frac{k^2 \alpha_m B_{26}A_{55}}{{B_{26}}^2 - A_{22}D_{66}}$$

$$T_{47} = \frac{B_{26}\left(\alpha_m^2 D_{11} + k^2 A_{55}\right) - B_{16}D_{66}}{{B_{26}}^2 - A_{22}D_{66}}$$

$$T_{410} = \alpha_m B_{26} \frac{D_{66} - D_{12}}{{B_{26}}^2 - A_{22}D_{66}}$$

$$T_{65} = \frac{\alpha_m^2 A_{55}}{A_{44}}, \quad T_{67} = \frac{\alpha_m A_{55}}{A_{44}}, \quad T_{610} = -1$$

$$T_{82} = \alpha_m \frac{B_{26}\left(A_{12} + A_{66}\right) - 2A_{22}B_{16}}{A_{22}D_{66} - {B_{26}}^2}$$

$$T_{83} = \alpha_m^2 \frac{A_{22}B_{16} - A_{66}B_{26}}{A_{22}D_{66} - {B_{26}}^2}, \quad T_{85} = \frac{k^2 \alpha_m A_{22}A_{55}}{A_{22}D_{66} - {B_{26}}^2}$$

$$T_{87} = \frac{A_{22}\left(\alpha_m^2 D_{11} + k^2 A_{55}\right) - \alpha_m^2 B_{16}B_{26}}{A_{22}D_{66} - {B_{26}}^2}$$

$$T_{810} = \alpha_m \frac{2B_{26}^2 - A_{22}\left(D_{12} + D_{66}\right)}{A_{22}D_{66} - {B_{26}}^2}$$

$$T_{101} = \alpha_m^2 \frac{B_{16}A_{66} - A_{11}B_{26}}{A_{66}D_{22} - {B_{26}}^2}$$

$$T_{104} = \alpha_m B_{26} \frac{A_{66} - A_{12}}{A_{66}D_{22} - {B_{26}}^2}, \quad T_{106} = \frac{k^2 A_{66}A_{44}}{A_{66}D_{22} - {B_{26}}^2}$$

$$T_{108}=\alpha_m\frac{2B_{16}B_{26}-A_{66}\left(D_{12}+D_{66}\right)}{A_{66}D_{22}-B_{26}{}^2}$$

$$T_{109}=\frac{\alpha_m^2\left(A_{66}D_{66}-B_{16}B_{26}\right)+k^2A_{66}A_{44}}{A_{66}D_{22}-B_{26}{}^2} \qquad (۳۲)$$

عناصر غیر صفر $\{F\}$، بسته به نوع بسط پتانسیل الکتریکی، به یکی از دو شکل زیر خواهند بود:

$$F_{21}=\frac{-D_{22}\alpha_m N_m^{P1}+B_{26}\left(\alpha_m M_m^{P6}+Q_m^{P2}\right)}{A_{66}D_{22}-B_{26}{}^2}$$

$$F_{41}=\frac{B_{26}\left[\left(M_m^{P6}\right)'-Q_m^{P1}\right]-D_{66}\left(N_m^{P2}\right)'}{B_{26}{}^2-A_{22}D_{66}}$$

$$F_{61}=\frac{-\alpha_m Q_m^{P1}+\left(Q_m^{P2}\right)'-Q_m}{k^2A_{44}}$$

$$F_{81}=\frac{A_{22}\left[\left(M_m^{P6}\right)'-Q_m^{P1}\right]-B_{26}\left(N_m^{P2}\right)'}{A_{22}D_{66}-B_{26}{}^2}$$

$$F_{101}=\frac{-A_{66}\left(\alpha_m M_m^{P6}+Q_m^{P2}\right)+B_{26}\alpha_m N_m^{P1}}{A_{66}D_{22}-B_{26}{}^2} \qquad (۳۳\text{- الف})$$

و یا

$$F_{21}=\frac{D_{22}\left(N_m^{P6}\right)'-B_{26}\left[\left(M_m^{P2}\right)'-Q_m^{P2}\right]}{A_{66}D_{22}-B_{26}{}^2}$$

$$F_{41}=\frac{B_{26}\left(\alpha_m M_m^{P1}-Q_m^{P1}\right)-D_{66}\alpha_m N_m^{P6}}{B_{26}{}^2-A_{22}D_{66}}$$

$$F_{61}=\frac{-\alpha_m Q_m^{P1}+\left(Q_m^{P2}\right)'-Q_m}{k^2A_{44}}$$

$$F_{81}=\frac{A_{22}\left(\alpha_m M_m^{P1}-Q_m^{P1}\right)-B_{26}\alpha_m N_m^{P6}}{A_{22}D_{66}-B_{26}{}^2}$$

$$F_{101}=\frac{A_{66}\left[\left(M_m^{P2}\right)'-Q_m^{P2}\right]-B_{26}\left(N_m^{P6}\right)'}{A_{66}D_{22}-B_{26}{}^2} \qquad (۳۳\text{-ب})$$

ب - اعمال شرایط مرزی برای محاسبه بردار ثوابت $\{K\}$

چیدمان متعامد

برای محاسبه بردار $\{K\}$ لازم است، در قدم اول، شرایط مرزی مختلف در هر یک از لبه‌های $x=\pm a/2$ را به صورت یک معادله ماتریسی به فرم زیر، بر حسب بردار حالت $\{Z\}$، بنویسیم:

$$[\hat{a}]\{Z\}=\{\hat{c}\} \qquad (۳۴)$$

در ادامه، این معادله ماتریسی و یا به عبارتی ثوابت $[\hat{a}]$ و $\{\hat{c}\}$ برای شرایط مرزی مختلف ارایه خواهد شد.

- تکیه‌گاه گیردار:

شرایط مرزی گیردار برای هریک از لبه‌های $x=-a/2$ یا $x=a/2$ را می‌توان به صورت زیر، بر حسب بردار حالت، بیان نمود:

$$\begin{array}{r} u_0=0: \\ v_0=0: \\ w_0=0: \\ \psi=0: \\ \phi=0: \end{array}\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}\{Z\}=\{0\} \qquad (۳۵)$$

- شرایط مرزی آزاد:

$$\begin{array}{r} N_x=0: \\ N_{xy}=0: \\ M_x=0: \\ M_{xy}=0: \\ Q_x=0: \end{array}\begin{bmatrix} 0&A_{11}&-\beta_mA_{12}&0&0&0&0&B_{11}&-\beta_mB_{12}&0\\ \beta_mA_{66}&0&0&A_{66}&0&0&\beta_mB_{66}&0&0&B_{66}\\ 0&B_{11}&-\beta_mB_{12}&0&0&0&0&D_{11}&-\beta_mD_{12}&0\\ \beta_mB_{66}&0&0&B_{66}&0&0&\beta_mD_{66}&0&0&D_{66}\\ 0&0&0&0&0&k^2A_{55}&k^2A_{55}&0&0&0 \end{bmatrix}\{Z\}=\left\{\begin{matrix} N_m^{P1}(x)\\ N_m^{P6}(x)\\ M_m^{P1}(x)\\ M_m^{P6}(x)\\ Q_m^{P1}(x) \end{matrix}\right\}_{x=\pm a/2} \qquad (۳۶)$$

- تکیه‌گاه ساده نوع ۱:

$$\begin{array}{r} v_0=0: \\ w_0=0: \\ \phi=0: \\ N_x=0: \\ M_x=0: \end{array}\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&A_{11}&-\beta_mA_{12}&0&0&0&0&B_{11}&-\beta_mB_{12}&0\\ 0&B_{11}&-\beta_mB_{12}&0&0&0&0&D_{11}&-\beta_mD_{12}&0 \end{bmatrix}\{Z\}=\left\{\begin{matrix} 0\\ 0\\ 0\\ N_m^{P1}(x)\\ M_m^{P1}(x) \end{matrix}\right\}_{x=\pm a/2} \qquad (۳۷)$$

- تکیه‌گاه ساده نوع ۲:

$$\begin{array}{r} u_0=0: \\ w_0=0: \\ \phi=0: \\ N_{xy}=0: \\ M_x=0: \end{array}\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ \beta_mA_{66}&0&0&A_{66}&0&0&\beta_mB_{66}&0&0&B_{66}\\ 0&B_{11}&-\beta_mB_{12}&0&0&0&0&D_{11}&-\beta_mD_{12}&0 \end{bmatrix}\{Z\}=\left\{\begin{matrix} 0\\ 0\\ 0\\ N_m^{P6}(x)\\ M_m^{P1}(x) \end{matrix}\right\}_{x=\pm a/2} \qquad (۳۸)$$

قدم بعدی در محاسبه بردار ثابت $\{K\}$ جای‌گزینی $\{Z\}$ از رابطه (۲۲) در معادله (۲۷) به منظور رسیدن به یک معادله ماتریسی بر حسب $\{K\}$، به فرم $[l]\{K\}=\{r\}$ است که در آن

$$[l]=[\hat{a}][\Lambda][E]_{x=\pm a/2}$$
$$\{r\}=\left\{\{\hat{c}\}-[\hat{a}][\Lambda][E]\int_0^y [E]^{-1}[\Lambda]^{-1}\{F\}d\zeta\right\}_{x=\pm a/2}$$
(۳۹)

با جای‌گذاری $[\hat{a}]$ و $\{\hat{c}\}$ از معادلات (۳۵) تا (۳۸) (بسته به شرایط مرزی حاکم بر لبه‌های $x=\pm a/2$) در روابط فوق، دو معادله ماتریسی که در مجموع دارای ۱۰ معادله و ۱۰ مجهول هستند، به دست می‌آید. از ترکیب معادلات مذکور یک معادله ماتریسی به فرم $[L]\{K\}=\{R\}$، حاصل خواهد شد که در آن

$$[L]=\left[\frac{[l]_{x=-a/2}}{[l]_{x=a/2}}\right],\quad \{R\}=\left\{\frac{\{r\}_{x=-a/2}}{\{r\}_{x=a/2}}\right\}$$
(۴۰)

در نهایت از حل معادله اخیر برای $\{K\}$ ($\{K\}=[L]^{-1}\{R\}$) و جای‌گذاری نتیجه در رابطه (۲۱)، بردار حالت $\{Z\}$ و یا به عبارتی پارامترهای U_m، V_m، W_m، X_m و Y_m و مشتقات مرتبه اول آنها نسبت به x در دست خواهد بود.

چیدمان زاویه‌دار پادمتقارن

به منظور محاسبه بردار ثوابت $\{K\}$ برای چندلایه‌های با چیدمان زاویه‌دار پادمتقارن باید مراحلی مشابه آنچه در مورد چیدمان متعامد ذکر گردید، انجام شود. بنابراین در اینجا تنها رابطه (۲۷) برای شرایط مرزی مختلف، بر روی لبه‌های $y=\pm b/2$، بررسی خواهد شد.

- تکیه‌گاه گیردار:

نظر به این که شرایط مرزی گیردار را می‌توان برای لبه‌های $x=\pm a/2$ و $y=\pm b/2$، به طور یکسان تعریف نمود، می‌توان مجدداً از معادله (۳۵) برای بیان شرایط مرزی گیردار در هریک از لبه‌های $y=-b/2$ یا $y=b/2$ نیز استفاده نمود (البته واضح است که در این حالت بردار $\{Z\}$ تابعی از y است).

- شرایط مرزی آزاد

$$\begin{array}{r} N_y=0:\\ N_{xy}=0:\\ M_y=0:\\ M_{xy}=0:\\ Q_y=0: \end{array}\begin{bmatrix} \alpha_m A_{12} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} & -\beta_m B_{12} & 0\\ 0 & A_{66} & -\alpha_m A_{66} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_m B_{16} & 0 & 0 & B_{26}\\ 0 & B_{26} & -\alpha_m B_{26} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_m D_{12} & 0 & 0 & D_{26}\\ \alpha_m B_{16} & 0 & 0 & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} & \alpha_m D_{66} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2A_{44} & 0 & 0 & k^2A_{44} & 0 \end{bmatrix}\{Z\}=\begin{Bmatrix} N_m^{P2}(y)\\ N_m^{P6}(y)\\ M_m^{P2}(y)\\ M_m^{P6}(y)\\ Q_m^{P2}(y) \end{Bmatrix}_{y=\pm b/2}$$
(۴۱)

- تکیه‌گاه ساده نوع ۱:

$$\begin{array}{r} u_0=0:\\ w_0=0:\\ \psi=0:\\ N_y=0:\\ M_y=0: \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \alpha_m A_{12} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} & \alpha_m B_{12} & 0\\ 0 & B_{26} & -\alpha_m B_{26} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_m D_{12} & 0 & 0 & D_{22} \end{bmatrix}\{Z\}=\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ N_m^{P2}(y)\\ M_m^{P2}(y) \end{Bmatrix}_{y=\pm b/2} \quad (۴۲)$$

- تکیه‌گاه ساده نوع ۲:

$$\begin{array}{r} v_0=0:\\ w_0=0:\\ \psi=0:\\ N_{xy}=0:\\ M_y=0: \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_{66} & -\alpha_m A_{66} & 0 & 0 & 0 & \alpha_m B_{16} & 0 & 0 & B_{26}\\ 0 & B_{26} & -\alpha_m B_{26} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_m D_{12} & 0 & 0 & D_{22} \end{bmatrix}\{Z\}=$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_m^{P6}(y) & M_m^{P6}(y) \end{bmatrix}^T_{y=\pm b/2}$$
(۴۳)