مجلّهٔ *تاریخ علم*، شمارهٔ ۸، ۱۳۸۸، ص۱-۲۹

رسالهٔ میرزا ابوتراب نطنزی در تثلیث زاویه[۱]

فاطمه دوست‌قرین
دانشجوی دکتری تاریخ تمدن و ملل اسلامی، دانشگاه آزاد (واحد علوم و تحقیقات)

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۲/۱۶ ، تاریخ پذیرش: ۱۳۸۸/۱۱/۷)

چکیده

تثلیث زاویه به همراه تربیع دایره و تضعیف مکعب از مسائل کهن ریاضی است که ریاضی‌دانان بسیاری در بارهٔ آنها اظهارنظر کرده‌اند. محاسبهٔ وتر ثلث یک زاویه با استفاده از یک معادلهٔ جبری از جمله روش‌هایی است که برای حل مسألهٔ تثلیث زاویه عرضه شده است. غیاث‌الدین جمشید کاشانی (د. ۸۳۲ ق) در رسالهٔ *الوتر و الجیب* خود با به کارگیری این روش جیب زاویهٔ یک درجه را با داشتن جیب زاویهٔ سه درجه محاسبه کرد. پس از او دیگر ریاضی‌دانان مانند قاضی‌زاده رومی (د. حدود ۸۴۰ ق) رساله‌هایی بر مبنای این رسالهٔ کاشانی تألیف کردند. میرزا ابوتراب نطنزی (د. ۱۲۶۲ق) ریاضی‌دان عصر قاجار نیز، در اثرش به نام *رساله در معرفت وتر ثلث قوس معلومة الوتر* به این مسأله پرداخته است. روش او اساساً هندسی است و از لحاظ ریاضی با روش جبری جمشید کاشانی هم‌ارز است. در این مقاله با ذکر پیشینه‌ای از مسألهٔ تثلیث، این رساله بررسی خواهد شد.

کلید واژه‌ها: تثلیث زاویه، جیب یک درجه، میرزا ابوتراب، دورهٔ قاجار

مقدمه

هم‌زمان با آشوب‌های ایران در انتقال حکومت از خاندان زند به خاندان قاجار، شهر کاشان در پرتو جامعیت علمی ملامحمد مهدی نراقی (ح ۱۱۴۹-۱۲۰۹ق) یکی از پربارترین حوزه‌های فرهنگی و دینی ایران به حساب می‌آمد، چنان که طلاب حوزه‌های درس عتبات عالیات در پایان تحصیلات خود روانهٔ کاشان می‌شدند و علوم عقلی و نقلی را در محضر او می‌آموختند. پس از درگذشت ملا

---

۱. این مقاله برگرفته از رسالهٔ کارشناسی ارشد نگارنده است که در سال ۱۳۸۸ در دانشگاه آزاد اسلامی (واحد علوم و تحقیقات) از آن دفاع شده است.

محمد مهدی نراقی، مرجعیت علمی کاشان با حضور فرزند او ملا احمد نراقی (۱۱۸۵-۱۲۴۵ق) و برادران او و فرزندانشان پا بر جا ماند و از محیط علمی کاشان دانشمندان بزرگ و نامداری در علوم گوناگون برآمدند. از جملهٔ این مشاهیر که علاوه بر مرجعیت عام، به دلیل مقام استادی، حوزهٔ درس خاندان ایشان در کاشان معروف و مورد توجه دانشمندان بود، میرزا ابوتراب نطنزی، مدرس مدرسهٔ سلطانی بود (نراقی، ص۲۸۲-۲۸۳).

میرزا ابوتراب نطنزی، فرزند حاج ملا احمد نطنزی از ریاضی‌دانان عهد محمدشاه قاجار، (حبیب‌آبادی، ۷۱۶/۳) در ۲۲ شعبان ۱۲۲۱ق به دنیا آمد. او تحصیل را نزد پدر خود و جد مادریش، ملا احمد نراقی، آغاز کرد. سپس علوم نقلی را نزد شیخ عبدالرزاق کاشی فرا گرفت و نجوم و ریاضی را از میرزا مهدی منجم آموخت. او کتاب تورات و انجیل را برای یهودیان و مسیحیان قرائت می‌کرد و به گفتهٔ فرزندش در کمتر از یک ساعت دفتری می‌نگاشت. وی با پزشکی و علوم غریبه نیز آشنایی داشت. میرزا ابوتراب رسالهٔ مهمی دربارهٔ مسأله تثلیث زاویه تحت عنوان معرفت *وتر ثلث قوس معلومة الوتر* نگاشت. دیگر آثار او عبارتند از: حواشی بر کتاب *مفتاح الاصول* ملا احمد نراقی؛ *رساله در اوزان عرب*؛ *رساله در قاعدة الوفاء بالعقود*؛ *رساله در تنزیه امامیه*؛ *رساله در متفرقات*؛ *رساله در دفع ضرر*؛ *الرسالة المهدویة در ردّ صوفیه*؛ *رساله در شهرت*؛ *رساله در نحو*؛ *رساله در طب*؛ شرح کتاب *الدروس الشرعیة* در فقه امامیه تألیف شهید اول؛ شرح *دیباچهٔ قاموس فیروزآبادی*؛ کتاب *مراصد الاصول فی اصالة البرائة و الاستصحاب*[۱].

میرزا ابوتراب از برخی علمای اعلام اجازهٔ روایت نیز دریافت کرد. ملا مهدی نراقی و ملا قاسم نراقی نیز در اجازهٔ خود، او را به خاطر فضائل علمی و اخلاقیش ستوده‌اند (شریف کاشانی، ص۱۰۹-۱۱۱). وی تا هنگام وفات در مدرسهٔ خاقان مغفور (مدرسهٔ سلطانی، معروف به مدرسهٔ شاه) به تدریس علوم معقول و ریاضیات اشتغال داشت و در شوال ۱۲۶۲ق درگذشت و در وادی‌السلام نجف دفن شد (همو، ص۱۱۱).

رساله در معرفت وتر ثلث قوس معلومة الوتر

میرزا ابوتراب این رساله را به حاجی میرزا آقاسی، صدر اعظم محمد شاه قاجار تقدیم کرده است. او

۱. برادر او، ملا محمد حسین نطنزی مؤلف رساله‌ای فارسی به نام *شرح مقالهٔ عاشرهٔ اصول اقلیدس* است که متن آن را مجمع ذخائر اسلامی در سال ۱۳۸۷ش به کوشش محمود اخوان مهدوی و با مقدمهٔ افشین عاطفی منتشر کرده است.

در این رساله به روش‌های حل معادلات درجۀ سوم پرداخته است و از روش‌های جبری و هندسی یاد کرده است و از کسانی که در این باره تلاش کرده‌اند نام می‌برد که به احتمال بسیار این نام‌ها را از رسالۀ خیام به دست آورده است. او ضمن توضیح روش غیاث‌الدین کاشانی در حل معادلات درجۀ سوم، روش او در تثلیث کمان را با استفاده از یک معادلۀ درجۀ سوم آورده است و سپس الگوی هندسی خود را برای این منظور تبیین کرده است. قسمت پایانی رساله، به دانش «میزان‌الحکمه» اختصاص یافته است و میرزا ابوتراب در این بخش توضیح می‌دهد که چگونه با این دانش، می‌توان اوزان اجزای اجسام مرکب را بدون تجزیه و تفکیک آن اجزا به دست آورد.

از این رساله دو نسخه با مشخصات زیر موجود است:

۱. نسخۀ خطی شمارۀ ۶۲۵۰/۱ کتابخانه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی (منزوی، ص۲۲۱) به خط مؤلف. تاریخ نگارش این نسخه احتمالاً در فاصلۀ سالهای ۱۲۵۰-۱۲۶۳ق بوده است.

۲. نسخۀ خطی شمارۀ ۱۷۵۱/۱۱ کتابخانۀ مرکزی و مرکز اسناد دانشگاه تهران (دانش‌پژوه، ۲۰۰/۸) که نسخه‌ای جرح و تعدیل شده از رسالۀ میرزا ابوتراب است که فرزندش محمد بن میرزا ابوتراب آن را در ۱۲۸۳ق استنساخ کرده است.

از آنجا که نسخۀ شمارۀ ۱ به خط مؤلف و کامل‌تر از نسخۀ دوم است، اساس تصحیح حاضر قرار گرفته و اختلافات نسخۀ دوم با آن در پانویس آمده است. در بازنویسی نسخه جز در موارد بسیار ضروری و اِعمال رسم الخط و نشانه‌گذاری امروز تغییری صورت نگرفته است.

بعضی از جمله‌های متن که ناخوانا بوده در ویرایش متن با سه نقطه مشخص شده‌اند. اعداد در متن به صورت حروف نوشته شده‌اند، از این رو معادل رقمی آنها درون پرانتز آمده است. در مواردی که عددها نادرست بوده، مقادیر درست، محاسبه و جایگزین شده است. این اعداد در مبنای شصت‌گانی نوشته شده‌اند، برای مثال

$$۳،۱۷;۴۶،۲،۲۴ = ۳\times۶۰ + ۱۷ + \frac{۴۶}{۶۰} + \frac{۲}{۶۰^{۲}} + \frac{۲۴}{۶۰^{۳}}$$

کلمۀ «منحط» که در متن آمده است به معنای تقسیم شده بر ۶۰ است که محل ممیز را یک رقم شصت‌گانی به چپ منتقل می‌کند و «مرفوع» به معنای ضرب شده در ۶۰ است.

بسم اللّه الرحمن الرحیم[۱]

چون در این زمان سعادت بنیان که ساحت مرز ایران به فرّ دارایی خدیو سلیمان[۲] شأن و دارای دارادربان[۳] خلد اللّه ملکه رشک روضهٔ رضوان و حسرت گلزار جنان شده و نظر به میل خاطر اقدس هُمٰیون شاهنشاهی[۴] به اقتناء ذخائر صنوف کمالات و حقایق و اکتساب مآثر فنون دقائق، عامهٔ اهل ایران، همت بر ابداع بدایع[۵] صناعات عجیبه و[۶] انشاء دقایق رموز[۷] و کمالات غریبه[۸] مصروف دارند، اقل دعاگویان دولت باهره و ثنا سنجان حشمت قاهره، ابوتراب بن احمد نیز با قصور بضاعت و[۹] عدم عدم استطاعت به برکت دولت علیه و حشمت بهیه[۱۰]، قواعدی بسیار و[۱۱] دقایقی بی‌شمار[۱۲] در علوم ریاضیه[۱۳] و وضع جداول زیج و تصحیح اعمال[۱۴] آن حسب البرهان[۱۵] استنباط[۱۶] و در رسالهٔ علی‌حده با قانون رصد اطوال و عروض[۱۷] کواکب و طریق صنعت[۱۸] آلات رصدیه که متقدمان اختراع نموده‌اند[۱۹] وضع نموده و در علوم کلیه و جزئیه استخراج اوتار به جیوب و اظلال و غیرها دقایقی چند که تا اکنون در حجاب اختفا مستور بوده به فکر فاتر و نظر قاصر به دست آورده.

---

۱. + رساله در معرفت وتر ثلث قوس معلومة الوتر من مؤلفات افضل المتأخرین استاد الکل فی‌الکل المهندس البارع الفرید فی عصره فی جمیع الفنون المیرزا ابوتراب تغمده الله بغفرانه واسکنه بحبوحه جنانه. هو الموفق بسمه تبارک وتعالی شأنه وبه نستعین انّه خیر معین.

۲. + شاهنشاه سکندر

۳. – و دارای دارا دربان

۴. – خطیر همیون اقدس پادشاهی

۵. + و

۶. مصروف و عنان توجه به صوب

۷. فنون

۸. – غریبه

۹. این بی‌بضاعت نیز با

۱۰. بهیه و شوکت علیه

۱۱. – قواعدی بسیار و

۱۲. دقایق چند

۱۳. علم هندسه و حساب

۱۴. – اعمال

۱۵. – حسب‌البرهان

۱۶. + کرده

۱۷. طول و عرض

۱۸. + شطری از

۱۹. از مخترعات متقدمانست

از آن جمله[۱] استخراج وتر ثلث هر قوسی[۲] از وتر آن قوس است[۳] که[۴] مهندسان اولی البراعة از[۵] از[۵] متقدمان[۶] و متأخران[۷] اعتراف به عجز از[۸] آن نموده‌اند[۹] چنان چه حکیم مدقق و خواجهٔ محقق[۱۰]، نصیرالدین الطوسی- علیه الرحمه- در کتاب *تحریر مجسطی* می‌فرماید: «لیس إلی معرفة وتر ثلث القوس المعلومة الوتر من جهة الخطوط سبیل[۱۱] بوجه». و به این جهت در استخراج وتر دو درجه[۱۲] به تقریب اکتفا فرموده‌اند و سایر مهندسان نیز عدم امکان[۱۳] آن را مسلم داشته‌اند مگر فاضل مهندس[۱۴] غیاث‌الدین جمشید الکاشانی که بعد از تعب بسیار در[۱۵] اعمال قواعد هندسیه و استعمال قوانین جبر و مقابله طریقی[۱۶] به جهت آن استنباط[۱۷] فرموده[۱۸]، و امیر شهید میرزا الغ بیک به همان طریق از وتر شش درجه، وتر دو درجه را استخراج[۱۹] و از آن جیب یک درجه[۲۰] را به تحقیق[۲۱] در جدول وضع کرده و جدول جیب *زیج جدید* را علی التحقیق تصحیح کرده.[۲۲] این

۱. در علوم کلیه و جزئیه استخراج اوتار به جیوب و اظلال و غیرها دقایقی چند که تا اکنون در حجاب اختفا مستور بوده به فکر فاتر و نظر قاصر به‌دست آورد. از آن جمله: از جملهٔ دقایقی که این فقیر به فکر فاتر استنباط نموده.

۲. + است

۳. – است

۴. و

۵. – مهندسان اولی‌البراعة از

۶. + از استنباط آن

۷. – و متأخران

۸. – از آن

۹. نموده

۱۰. خواجه محقق و محرر مدقق

۱۱. طریق

۱۲. + که معرفه جیب یک درجه موقوف بر آن است

۱۳. + استنباط

۱۴. + بارع

۱۵. – تعب بسیار در

۱۶. طریقهٔ

۱۷. + و در رساله وتر و جیب ایراد نموده

۱۸. – فرمود

۱۹. ستنباط

۲۰. یکدرجه

۲۱. + بیرون آورده

۲۲. و وضع جدول جیب را در زیج به همان قانون کرده است لاجرم

فقیر[۱] دعاگو[۲] به رعایت اظهار نعمت الهی و پاس شکرگذاری دولت ابدمدت[۳] پادشاهی[۴] در این مختصر در مقام عرض و بیان قاعدهٔ مستنبطهٔ خود برآمده، این سواد را[۵] تحفهٔ مجلس عالی وهدیهٔ انجمن حضور متعالی سرکار سعادت‌مدار، قبلة الأنام، ملجأ اهل الإسلام، نظام الملک والملة وقوام الدین والدولة، جامع مکارم السجایا والأخلاق، حایز قصبات السبق علی الإطلاق، مجمع محامد الشیم، منبع آثار الفضل والکرم، حاوی المفاخر والمناقب البهیه، صاحب المحامد والمآثر الزکیه، مشرق انوار الفضل والإفاضه، مصدر آثار السعادة والإفادة، المولی الأعظم والمحقق المعظم، افتخار الأفاضل الأعلام، ملاذ الخاص والعام، الحاج میرزا آقاسی- ادام اللّه ایام عزة واقباله[۶]- ساخته، امید که که به نظر رضا ملحوظ و به شرف ارتضا مشرف گردد، و ابتدا به ذکر طریقه [ای] که مهندس سابق‌الذکر استنباط کرده می‌شود و بعد به ذکر طریقهٔ مستنبطهٔ خود شروع رفته. قبل از بیان مقصود به ذکر دو مقدمه مبادرت می‌شود[۷]:

مقدمهٔ اولی؛ متقدمان که در قواعد جبر و مقابله سخن گفته‌اند معادلات مفرده و مقترنه را که فیما بین سه جنس متوالی از اعداد و اشیاء و اموال و کعاب و اموال مال و غیرها تصور شود[۸] ذکر کرده و طریق استعلام شیء مجهول را در آن صور بیان نموده‌اند[۹]. و اگرچه صور مفروضهٔ ایشان که که در کتب حسابیه متداول است مسائل ستّهٔ جبریه است که صور معادلات اشیاء و اعداد و اموال است، اما عند التحقیق معلوم است که آن قواعد اختصاص به این سه جنس ندارد بلکه هر سه جنس متوالی که متعادل شوند، در مفرداتِ آن‌ها به طرق همین مفردات، و در مقترناتِ آن‌ها به طرق همین مقترنات، استنباط شیء مجهول می‌شود و در غالب کتب نیز اشاره به آن نموده‌اند[۱۰]. و

۱. + نیز

۲. – دعاگو

۳. – ابد مدت

۴. شاهنشاهی

۵. – این سواد را

۶. از «سرکار سعادت‌مدار، قبلة الانام...» تا اینجا افتاده است.

۷. می‌نماید

۸. متصور می‌شود

۹. فرموده‌اند

۱۰. از «واگر چه صور مفروضهٔ ایشان...» تا اینجا افتاده است.

نیز معادلهٔ دو جنس غیرمتوالی را -کائناً ما کان- به طرق[۱] استخراج اضلاع مضلعات ذکر کرده‌اند[۲] لیکن[۳] معادلات اجناس غیرمتوالیه و متوالیه که[۴] زاید بر سه جنس باشد[۵] بیان نکرده‌اند[۶] و همانا همانا سبب آن این است که مراتب مافوق کعب را در مقادیر متصله نظیری نیست چنان چه[۷] خیام خیام در بعضی از رسائل خود گفته است «هذا الذی یُسَمّیه الجبریون مال مال امر موهوم فی المقادیر المتصلة و لا وجود لها فی الأعیان بوجه من الوجوه» و در مقامی دیگر گفته است «أمّا مالُ المالِ الذی هو عند الجبریین حاصلُ من ضربِ المالِ فی مثلهِ فلا معنی له فی المقادیر المتصلة لأنّ المربع الذی هو سطح کیف یمکن أن یضرب فی مثله إذ السطح مالهُ بعدانِ وبعدان فی بعدَین أربعة أبعاد والجسم لایمکن أن یکون له أکثر من ثلثة أبعادٍ». بالجمله استنباط مجهول در معادلات اجناس زائد بر سه[۸] به علم قطوع *مخروطات* و اصول[۹] ابلونیوس که[۱۰] در کتاب *مخروطات* بیان کرده کرده ممکن و به استعمال بعضی از آلات نیز میسر است.

و اول کسی که محتاج به استخراج صور معادلات غیر معروفه شد ماهانی مهندس بود که در حل شکل چهارم از مقالهٔ ثانیهٔ کتاب *کره و اسطوانهٔ* ارشمیدس محتاج شده[۱۱] و بعد از آن که تحلیل عمل مؤدّی به معادلهٔ اعداد و اموال و کعاب شده حکم به امتناع استعلام مجهول نموده است. اما اوطوقیوس عسقلانی درشرح کتاب *کره و اسطوانه* رجوع به اصول مخروطات کرده و طریق استعلام مجهول را ذکر نموده[۱۲] و ابونصر بن عراق خوارزمی نیز[۱۳] در حل مقدمه[ای] که ارشمیدس در استخراج ضلع مسبّع دایره به کار برده است و تحلیل عمل مؤدی به معادلهٔ اعداد با اموال و

۱. طریق
۲. نموده
۳. ولکن
۴. غیر متتالیه یا متتالیه را با بودن معادله فیمابین
۵. – باشد
۶. نکرده
۷. و به این جهت
۸. اربعه و مافوقها
۹. + آن علم که
۱۰. – که
۱۱. + ولی کیفیت استنباط مجهول را بیان ننموده بلکه
۱۲. بیان کرده است
۱۳. +که

کعاب شده به علم قطوع مخروطات استخراج کرده است[۱]. و در زمان عضدالدولهٔ دیلمی ابوسهل بیژن بن رستم القوهی و ابوالوفاء بوزجانی و ابوحامد صغانی و جماعتی دیگر از مهندسان در حل[۲] مسئله[ای] از مسائل حسابیه محتاج به استخراج صورت معادلهٔ اموال با اعداد و اشیاء و کعاب شده مدت‌ها در حل آن عاجز ماندند تا یکی از مهندسان استنباط قاعده به جهت[۳] آن[۴] کرده در خزانهٔ کتب ملوک سامانیه ضبط نمودند.

و علی کل حال[۵] یکی از صور معادلات غیر[۶]معروفه که موقوف علیه مطلوب است معادلهٔ شیء است با عدد و کعب و قانون[۷] استعلام شیء مجهول چنان‌چه مهندس بارع[۸] غیاث‌الدین کاشانی[۹] استنباط نموده، آن است که عدد مفروض را بر عدد اشیاء قسمت نموده و مکعب خارج از قسمت را بر عدد افزوده و حاصل را ثانیاً بر عدد اشیاء قسمت کرده و خارج را [مکعب کرده و] بر عدد افزوده و[۱۰] حاصل را بر عدد اشیاء قسمت نمایند و ثالثاً خارج از[۱۱] قسمت را [مکعب کرده] بر عدد افزایند و هم چنین عمل[۱۲] را مکرر نمایند تا شیء مجهول به اقرب تقریب یا تحقیق[۱۳] معلوم شود. و تفصیل برهان و مثال آن در *شرح مجسطی* [؟] مذکور است[۱۴] و این فقیر نیز در رساله ایراد کرده.

مقدمهٔ ثانیه؛ می‌خواهیم دو عدد مختلف را بر نهجی قسمت نماییم که نسبت قسم اصغر از عدد اعظم به قسم اصغر از عدد اقل مثل نسبت[۱۵] قسم اکثر از عدد اقل باشد به قسم اکثر از عدد

۱. – است

۲. در نسخه به اشتباه حله نوشته شده است.

۳. جهه

۴. +را

۵. بالجمله

۶. + سته

۷. طریق

۸. فاضل

۹. جمشید

۱۰. + ثالثاً مکعب

۱۱. – از

۱۲. + مزبور

۱۳. – یا تحقیق

۱۴. مثال و برهان عمل در رساله ایراد شده است.

۱۵. نسبة

اعظم و نیز قسم اصغر از عدد اقلْ، وسطْ در نسبت[۱] باشد فیما بین قسم اصغر از عدد اعظم و نصف عدد اعظم. و استعلام اقسام عددین به طرق مفتوحات و مسائل[۲] جبریۀ معروفه[۳] ممکن نیست بلکه بلکه بعد از استعمال[۴] قواعد جبر[۵] و مقابله[۶] راجع به صورت[۷] مذکوره در مقدمۀ سابقه می‌شود. لیکن لیکن این بی‌بضاعت طریق دیگر به جهت[۸] استعلام اقسام عددین به دست آورده که محتاج به استعمال قواعد جبر[۹] و مقابله[۱۰] و اصول[۱۱] قطوع مخروطات نیست و آن چنان است که قسم اصغر از از عدد اقل را هرچه خواهیم فرض[۱۲] و آن را مربع کرده بر نصف عدد اعظم قسمت[۱۳] و خارج از قسمت را قسم اصغر از عدد اعظم فرض کرده و در فضل عدد اعظم بر آن ضرب[۱۴] و حاصل را بر آن چه قسم اصغر از عدد اقل فرض شده قسمت نماییم و خارج از قسمت را قسم اکثر از عدد اقل فرض کرده و با آن چه اصغر آن فرض شده بود[۱۵] جمع و حاصل را محفوظ خوانیم. پس فضل عدد اقل را بر محفوظ گرفته و بر محفوظ قسمت نموده[۱۶] و خارج از قسمت را در آن چه قسمِ اصغرِ عددِ عددِ اقل فرض شده ضرب[۱۷] و حاصل ضرب را بر مضروب فیه افزوده[۱۸] اگر محفوظ کمتر از عدد اقل باشد، و اگر زیاده برآن باشد حاصل را از مضروب فیه نقصان نموده و حاصل یا باقی را قسم

۱. نسبة
۲. + سته
۳. – معروفه
۴. اعمال
۵. جبریه
۶. – مقابله
۷. صوره
۸. جهه
۹. الفاظ جبریین
۱۰. – مقابله
۱۱. اعمال قواعد
۱۲. + نموده
۱۳. + نمائیم
۱۴. + کرده
۱۵ – بود
۱۶. نمائیم
۱۷. + کرده
۱۸. افزائیم

اصغر عدد اقل فرض کرده ثانیاً به نهج مرقوم عمل را به انجام رسانیم و هرچه تکرار عمل زیاده باشد به تحقیق اقرب باشد[۱]. و هرگاه قسم اصغر از عدد اعظم را به طریق مذکور استخراج و آن را در قسم اعظم عدد اقل ضرب و حاصل را بر قسم اصغر عدد اقل قسمت و خارج را قسم اکثر از عدد اعظم فرض و فضل اکثر را بر مجموع این دو قسم گرفته و بر مجموع این دو قسم قسمت نموده و خارج را در قسم اصغر از عدد اعظم ضرب و حاصل را بر مضروب فیه افزایند و حاصل را قسم اکثر از عدد اعظم فرض نمایند و به همین نهج عمل به پایان رسانیم نیز مطلوب حاصل گردد. و در این صورت نیز هرگاه مجموع قسمین اعظم از آن زیاده شود بعد از قسمت فضل مجموع بر عدد اعظم و ضرب خارج قسمت در قسم اصغر از آن باید حاصل را از قسم اصغر نقصان نمود[۲]. و مخفی نماند که که در این عمل و در عمل سابق که طریق استعلام شیء مجهول[۳] است در صورت معادلهٔ آن با اعداد و کعاب، اهمال کسور به طرح و[۴] رفع باعث اختلال کلی در عمل می‌شود بلکه بسا باشد که طرح و[۵] رفع ثامنه و تاسعه[۶] در ضرب و قسمت مؤدی به اختلاف در رابعه و خامسه[۷] می‌شود.

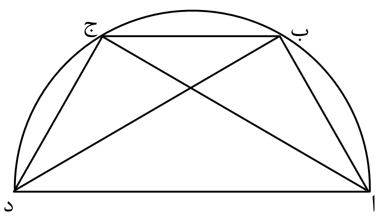
بعداز تمهید این دو مقدمه شروع در مقصود[۸] می‌شود. اما طریقهٔ موروثه از مهندس فاضل غیاث‌الدین جمشید: پس به جهت[۹] بیان آن فرض کنیم قوس ابجد را بر وتر اد و قسمت کنیم آن را به دو نقطهٔ ب و ج، به سه قسم متساوی و آن قوس‌های[۱۰] اب، جد و بج است؛ و وصل کنیم اوتار اب، بج، جد، اج و بد را پس ذی اربعة اضلاع ابجد واقع در دایره است و درشکل ثانی از فصل عاشر از مقالهٔ اولی از کتاب *مجسطی* بیان شده[۱۱] که هر ذی اربعة اضلاعی که واقع در دایره باشد، مجموع سطح هر ضلعی از آن در ضلع مقابل آن، مساوی سطح احد قطرین آن شکل است در

۱. + و اولی آن است که قسم اصغر از عدد اقل را ثلث آن فرض کرده تا در همه حال محفوظ از عدد اقل کمتر باشد.
۲. از «و هرگاه قسم اصغر از عدد اعظم...» تا اینجا افتاده است.
۳. – مجهول
۴. یا
۵. – اسقاط یا
۶. ثوامن و تواسع
۷. روابع و خوامس
۸. مقصد
۹. جهة
۱۰. قسمی
۱۱. + است

قطر دیگر آن و بنا بر آن مجموع سطح جب در دا و سطح با در دج مساوی سطح جا در دب خواهد بود، و چون اوتار دج، جب، و با متساوی‌اند پس سطح با در دج مساوی مربع جب است[۱] پس مربع جب و سطح آن در دا که وتر قوس مفروضه است مساوی مربع جا [است][۲]. وچون هریک هریک از دو قوس دب جا ضِعف هریک از دو قوس دج با است پس هرگاه وتر با را شیء فرض کنیم و مربع آن را که مال است بر قطر قسمت کنیم و خارج قسمت را که سی ثانیه از مال است مربع کرده و حاصل را که پانزده[۳] ثالثه از مال مال است از مربع وتر با که مال است نقصان کنیم، باقی که یک مال الا پانزده[۴] ثالثه از مال مال است مربع نصف خط جا خواهد بود؛ چنان چه برهان[۵] برهان[۵] آن در *شرح مجسطی* در معرفت وتر ضعف قوس معلومه الوتر بیان[۶] شده است. و چون مربع مربع نصف هرخطی ربع مربع تمام آن خط است- چنان چه در کتاب *اصول* اقلیدس مبرهن[۷] شده- شده- پس چهار مال الا یک ثانیه از مال مال معادل مربع خط جا است و آن معادل مربع خط جب و سطح آن در وتر دا است و چون خط جب شیء فرض شده مربع آن یک مال است و سطح آن در وتر دا مقدار دا است از اشیاء، و بعد از مقابله سه مال الا یک ثانیه از مال مال معادل مقدار وتر دا است از اشیاء، و بعد از جبر مقدار وتر دا از اشیاء و یک ثانیه از مال مال معادل سه مال است و بعد الرد ثلث مقدار وتر دا از اشیاء و ک (۲۰) ثالثه ازمال مال معادل یک مال است و بعداز تنزّل مراتب متعادلین ثلث مقدار وتر دا و ک (۲۰) ثالثه ازکعب معادل یک شیء است. پس ظاهر شد که وتر ثلث هر قوس زائد بر ثلث وتر آن قوس است به مقدار ک (۲۰) ثالثه از مکعب وتر ثلث آن قوس.

۱. است: خواهد بود + چون دو قطر اج و دب متساوی‌اند پس سطح اج در دب مساوی مربع جا است.
۲. + است
۳. یه
۴ . یه
۵. – برهان
۶. برهان آن ذکر
۷. بیان آن

پس به قاعدهٔ[۱] مذکوره در مقدمهٔ اولی[۲]، ثلث وتر قوس مفروضه را گرفته و ک (۲۰) ثالثه از مکعب[۳] مکعب[۳] آن را بر آن افزوده پس ک (۲۰) ثالثه از مکعب[۴] حاصل را بر آن می‌افزائیم و هکذا تا مطلوب حاصل شود؛[۵] و[۶] تفصیل مثال آن در رساله مذکور[۷] شده.



و اما طریقه[ای] که این فقیر استنباط کرده[۸]، پس بیان آن[۹]، آن است که قوس مفروضه به اعتبار نقصان از نصف دور و مساوات با آن و زیادت بر آن، یا نقصان از سه ربع دور یا مساوات با آن یا زیادت بر آن و نقصان از تمام محیط از پنج وجه خارج نباشد.

وجه اول آنکه از نصف دور کمتر باشد. و به جهت بیان مقصود فرض کنیم[۱۰] قوس با از دایره جبا بر وتر با و مقسوم به سه قسم متساوی است که آن‌ها قوس‌های[۱۱] به ه‌د دا است و[۱۲] از دو نقطهٔ ه د دو قطر حه جد را اخراج کنیم و در مرکز ز با یکدیگر مقاطع و در دو نقطهٔ ح ج به محیط

---

۱. طریق

۲. – در مقدمه اولی

۳. کعب

۴. کعب

۵. – تا مطلوب حاصل شود

۶. چنانچه

۷. + مرقوم

۸. کرده‌ام

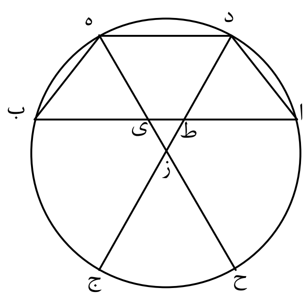
۹. + موقوف به سه شکل است شکل اوّل

۱۰. از «آن است که قوس...» تا اینجا افتاده است.

۱۱. آن قسمی

۱۲. پس

متصل شوند. و[1] وصل کنیم اوتار به هد دا را و می‌گوئیم هریک از دوخط بی طا مساوی هریک از از اوتار به هد دا است.



برهانش: چون قوس جح[2] به جهت تساوی دو زاویهٔ هزد جزح مساوی قوس هد است[3] و قوس هد هد مساوی[4] قوس به است، پس قوس حب مساوی[5] قوس جه است، پس زاویه هزد مثل زاویهٔ ی‌هب ی‌هب خواهد بود، چون [6]بر دو قوس متساوی واقع اند. و زاویهٔ هبی محیطیه مثل زاویهٔ هزد مرکزیه مرکزیه است چنان چه از شکل یط (۱۹) از مقالهٔ ثالثهٔ کتاب اقلیدس ظاهر است[7]. پس زاویهٔ زهد مثل زاویهٔ هی‌ب خواهد بود چه هر سه زاویهٔ مثلث معادل دو قائمه است و چون به شکل مأمونی[8]

۱. پس

۲. + مساوی قوس ده است

۳. – مساوی قوس ده است

۴. مثل

۵. مثل

۶. به جهت آنکه

۷. مستفاد می‌شود

۸. شکل مأمونی آن است که دو زاویه‌ای که بر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین است، برابر باشند و نیز دو زاویه‌ای که در زیر قاعده تشکیل می‌شوند (در صورتی که دو ساق را خارج کنیم) با هم برابر باشند. و این شکل را به مأمون خلیفهٔ عباسی نسبت داده‌اند از این رو که وی آن شکل را به آستین برخی از جامه‌هایش افزودچون از آن خوشش آمده بود (تهانوی، ج۱، ص۷۸۵).

دو زاویهٔ ەدز ەدز متساویاند، پس دو زاویهٔ بەی بیه نیز متساویاند. و[۱] به شکل سادس از مقالهٔ اولی[۲] [از] کتاب اقلیدس ضلع بی در مثلث ەیب مساوی ضلع به خواهد بود و به مثل همین بیان مساوات دو ضلع دا طا از مثلث طدا معلوم است.

و بعد از بیان این مقدمه میگوئیم که[۳] نسبت خط یه در شکل سابق به خط یب مثل نسبت خط یا است به خط حی. برهانش: سطح یه در حی مساوی سطح یب است در ای به شکل سی وچهارم از مقالهٔ ثالثهٔ اصول. پس به شکل پانزدهم از مقالهٔ سادسه نسبت یه به خط یب مثل نسبت یا است به خط حی و هوالمطلوب.

و نیز میگوئیم که[۴] نسبت خط یه از شکل سابق به خط یب مثل نسبت خط یب است به نصف قطر. برهانش: چون زوایای مثلث بیه مساوی زوایای مثلث زده اند، کل لنظیره، پس آن دو مثلث متشابهانند به شکل چهارم از مقالهٔ سادسهٔ اصول و نسبت[۵] خط یه به خط ەد مثل نسبت[۶] نسبت[۶] خط یب است به خط زه و ەد مساوی یب است. پس خط یب بلکه وتر ثلث قوس با وسط در نسبت است فیما بین یه و زه و زه نصف قطر است، و به شکل شانزدهم از مقالهٔ سادسهٔ[۷] اصول سطح یه در نصف قطر مساوی مربع خط یب است.

و به این بیان ظاهر شد[۸] که هر قطری که از منتهای ثلث قوس معلومة الوتر خارج شود و با وتر وتر آن قوس مقاطع شود و به محیط پیوندد، قطر و وتر به آن تقاطع منقسم شوند بر نهجی که نسبت اقصر قسمین قطر مفروض به اقصر قسمین وتر که مساوی وتر ثلث آن قوس است مثل

---

۱. پس

۲. + از

۳. شکل ثانی

۴. شکل ثالث

۵. نسبه

۶. نسبه

۷. +کتاب

۸. بعد از بیان این اشکال میگوئیم که به شکل ثانی ثابت شد.

نسبت[۱] اعظم قسمین وتر است به اعظم قسمین قطر و[۲] مثل نسبت[۳] اقصر قسمین وتر است به نصف قطر. پس به مقتضای مقدمۀ ثانیه قسم اصغر از وتر مفروض را ثلث آن فرض کرده و مربع آن را بر نصف قطر قسمت کرده و خارج را اصغر قسمین قطر فرض و فضل قطر بر آن را گرفته در آن ضرب و حاصل را بر ثلث وتر مفروض قسمت و خارج را اعظم قسمین وتر فرض و آن را با ثلث وتر مفروض جمع و حاصل را محفوظ خوانیم. پس فضل وتر را بر محفوظ گرفته و بر محفوظ قسمت نماییم[۴] و خارج از قسمت را در ثلث وتر ضرب و حاصل را بر مضروب فیه افزوده مجموع را قسم اصغر از وتر انگاشته[۵] و به همان وُتَیره تکرار عمل نماییم[۶] تا مجهول معلوم گردد[۷]. و چون در این این صورت[۸] مقسوم علیه نصف قطر است، پس هرگاه مربع قسم اصغر وتر را به یک مرتبه منحط اعتبار کنیم حاجت به قسمت مزبوره نخواهد بود[۹].

و به جهت این عمل مثالی ایراد کنیم[۱۰]. خواستیم از وتر سدس دور، وتر ثلث آن را که ک (۲۰) درجه است معلوم نماییم. وتر سدس دور بود س (۶۰)؛ چنان چه از استبانۀ شکل پانزدهم از مقالۀ رابعۀ *اصول* ظاهر است، ثلثش ک (۲۰) درجه، مربعش منحطاً وم (۶;۴۰) دقیقه، این را قسم اصغر از قطر فرض کردیم. پس قسم اعظم آن[۱۱] باشد انجک (۱,۵۳;۲۰) دقیقه، در قسم اصغر ضرب کردیم حاصل شد یب‌له‌لج‌ک (۱۲,۳۵;۳۳,۲۰) ثانیه. بر ک (۲۰) درجه قسمت کردیم، خارج شد لزموم (۳۷;۴۶,۴۰) ثانیه، با ک (۲۰) درجه جمع کردیم، حاصل شد[۱۲] نزموم (۵۷;۴۶,۴۰) ثانیه.

---

۱. نسبة
۲. + به شکل ثالث
۳. نسبة
۴. نموده
۵. انگاریم
۶. عمل را مکرر نمائیم
۷. شود
۸. صور
۹. نباشد
۱۰. شده
۱۱. – آن
۱۲. – حاصل شد

فضل س (۶۰) که وتر قوس مفروضه[1] بود برآن ب‌یج‌ک (۲;۱۳,۲۰) ثانیه، بر نزموم (۵۷;۴۶,۴۰) قسمت کردیم، خارج شد ب‌یح‌کزمالب‌یح... (...,۰;۲,۱۸,۲۷,۳۲,۱۸) وهکذا بالغاً ما بلغ مبتدئاً من الدقائق در ک (۲۰) ضرب کردیم حاصل شد موط‌یجن‌موط‌یجن‌مو... (...,۰;۴۶,۹,۱۳,۵۰,۴۶) و هکذا بالغاً ما بلغ مبتدئاً منها ایضاً. آن را بر ک (۲۰) درجه افزودیم حاصل شد ک‌موط‌یجن‌مو... (...,۲۰;۴۶,۹,۱۳,۵۰,۴۶). و هکذا مبتدئاً من الدرجات. آن را قسم اصغر وتر فرض کرده منحطاً در نفس خود ضرب کردیم، حاصل شد زیاکالط‌کدکط‌مط‌ک‌نومح‌یز (۷;۱۱,۲۱,۳۹,۲۴,۲۹,۴۹,۲۰,۵۶,۴۸,۱۷) مبتدئاً من الدرجات منتهیاً إلی العاشره[2] آن را قسم اصغر از قطر فرض کردیم پس قسم اعظم آن باشد[3] انب‌مح‌لح‌ک‌له‌ل‌ی‌لط‌ج‌یامب (۱,۵۲;۴۸,۳۸,۲۰,۳۵,۳۰,۱۰,۳۹,۳,۱۱,۴۲) مبتدئاً من المرفوعات. مضروب آن در قسم اصغر[4] اصغر[4] از قطربود یج‌لاب‌ولح...مایب‌مزکح‌مامز (۱۳,۳۱;۲,۶,۳۸,...,۴۱,۱۲,۴۷,۲۸,۴۱,۴۷). بر ک‌موط‌یجن‌مو... (...,۲۰;۴۶,۹,۱۳,۵۰) قسمت کردیم خارج شد قسم اعظم از وتر لط‌ب...له...نط‌ج‌لومه‌مط‌له‌ج (۳۹;۲,...,۳۵,...,۵۹,۳,۳۶,۴۵,۴۹,۳۵,۳) با ک‌موط‌یجن‌مو... (...,۲۰;۴۶,۹,۱۳,۵۰) جمع کردیم حاصل شد نط‌مط‌ح‌لط‌کوح‌حیز...زلانح‌مزند (۵۹;۴۹,۸,۳۹,۲۶,۸,۸,۱۷,...,۷,۳۱,۵۸,۴۷,۵۴). فضل س (۶۰) بر آن ی‌ناک‌لج‌نانامب‌لب‌کح‌ایب‌و (۰;۱۰,۵۱,۲۰,۳۳,۵۱,۵۱,۴۲,۳۲,۲۸,۱,۱۲,۶). بر نط‌مط‌ح‌لط‌کوح‌حیز...زلانح‌مزند (۵۹;۴۹,۸,۳۹,۲۶,۸,۸,۱۷,...,۷,۳۱,۵۸,۴۷,۵۴) قسمت کردیم، خارج شد ی‌ب‌نج‌یح‌موب‌کدیج‌نط‌ل‌لامب (۰;۰,۱۰,۲,۵۳,۱۸,۴۶,۲,۲۴,۱۳,۵۹,۳۰,۳۱). در ک‌موط‌یجن‌مو... (...,۲۰;۴۶,۹,۱۳,۵۰) ضرب کردیم حاصل شد ج‌موح‌مح‌یوم‌مامه‌نط‌امد...ط.

۱.– قوس مفروضه

۲. العواشر

۳. از قطر خواهد بود

۴.– اصغر

بر کموطیجنمو... (...,۲۰;۴۶,۹,۱۳,۵۰) افزودیم، حاصل شد کمطله...بلو...مطنهلومهیح (۲۰;۴۹,۳۵,...,۲,۳۶,...,۴۹,۵۵,۳۶,۴۵,۱۰,۸) این را منحط در نفس خود ضرب کردیم.

حاصل شد قسم اصغر از قطر ثانیاً[1] زیجنحکزکدونومجینمحیایه (۷;۱۳,۵۸,۲۷,۲۴,۶,۵۶,۴۳,۱۰,۵۰,۴۸,۱۱,۱۵). عمل را بر وتیرهٔ سابقه به انجام رسانیده مکرر نمودیم،[2] حاصل شد وتر ک (۲۰)[3] درجه کنیو...مهند (۲۰;۵۰,۱۶,...,۴۵,۵۴)[4] خامسه، موافق با آن که[5] به طریقهٔ مهندس فاضل غیاث‌الدین جمشید استخراج شده[6] چنان چه تفصیل هر دو عمل[7] در رساله بیان شده است- والحمد اللّه الذی هدانا لهذا وما کنّا لنهتدی لو لا أن هدانا اللّه[8].

وجه دویم آن که قوس معلومة الوتر نصف دور باشد و ظاهر است که وترِ آن، قطر است و تقاطع آن با قطرین خارجین از مبادی اثلاث آن قوس بر مرکز خواهد بود و وتر ثلث آن که سدس دور است مساوی نصف قطر خواهد بود چنان چه در کتب هندسیه نیز مبرهن و از استبانهٔ شکل پانزدهم از مقالهٔ رابعهٔ کتاب اقلیدس ظاهر است[9].

---

۱. – ثانیاً

۲. عمل را بر و تیره سابقه به انجام رسانیده مکرر نمودیم: و هکذا عمل را به پایان رسانیدیم.

۳. ثلث س

۴. این مقدار نهایی معادل است با مقدار $\frac{۱}{۶۰}\left(۲۰+\frac{۵۰}{۶۰}+\frac{۱۶}{۶۰^{۲}}+\cdots+\frac{۴۵}{۶۰^{۴}}+\frac{۵۴}{۶۰^{۵}}\right)$ که سینوس زاویهٔ بیست درجه است.

۵. آنچه

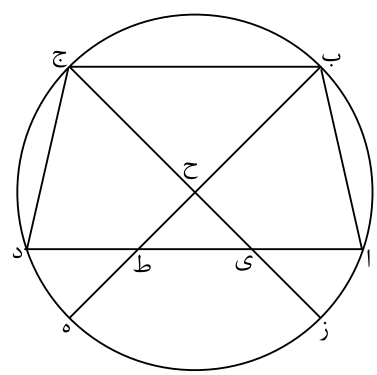
۶. + و

۷. – چنانچه هر دو عمل

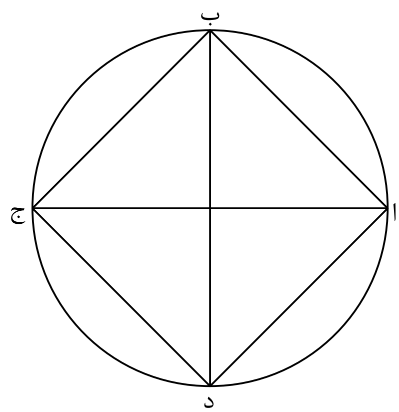
۸. + و مخفی نماند که هرگاه قسم اصغر از عدد اعظم را بطریق مذکور استخراج و آن را در قسم اعظم عدد اقل ضرب و حاصل را برقسم اصغر اقل قسمت و خارج را قسم اعظم عدد اکثر فرض و فضل اکثر را بر مجموع این دو قسم گرفته و بر این مجموع قسمت و خارج را در قسم اصفر از عدد اکثر ضرب و حاصل را بر مضروب فیه افزاید و حاصل را قسم اصغر عدد اکثر فرض نمایند و بهمین نهج عمل را بانجام رسانند نیز مطلوب حاصل گردد و استخراج اقسام عددین به طرق قطوع مخروطات نیز ممکن است و در این سواد مجال تفصیل بیان آن نیست امید چنان است که در مستقبل زمان بعنایت و توفیق الهی و مساعدت اقبال دولت علیه پادشاهی– ابدّاللّه ملکه و دولته– سایر آنچه را که در این فن بفهم قاصر و فکر فاتر استنباط شده و قانون وضع جداول زیجات و قوانین رصد کواکب و طرق صنعت آلات رصدیه و بیان خطای صاحب زیج هندی در جدول حبیب و غیره را جمع نموده بعز شهود مسعود سامی مشرف گردانم.

۹. از «وجه دویم...» تا اینجا افتاده است.

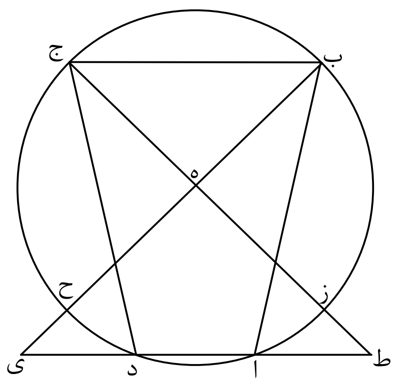
وجه سیّم آن که قوس معلومه الوتر از نصف دور زیادتر و از سه ربع دور کمتر باشد، چون قوس دجبا از دایرهٔ زەدجبا بر مرکز ح و وتر آن خط دا است. و فرض کنیم که هر یک از قوس‌های دج جب با ثلث قوس مفروضه است و دو قطر زحج ەحب را اخراج کنیم و مقاطع وتر اد شوند بر دونقطهٔ ط ی. و به مثل بیان مذکور اثبات تساوی دو زاویهٔ جحب جدا از دو مثلث جحب جدی نماییم و هم چنان اثبات مساوات زاویهٔ دجی را با زاویهٔ جبح نماییم، و لازم آید که دو زاویهٔ باقی از دو مثلث با یکدیگر مساوی باشند. و بعینه به بیان سابق ظاهر شود که نسبت خط یز که قسم اصغر از قطر است به خط یا که قسم اصغر از وتر مفروض است چون نسبت دی باشد که قسم اعظم وتر است بر جی که قسم اعظم قطر است. و نیز نسبت حج- نصف قطر- به دج چون نسبت بج است به یج. و چون جب مساوی دج و دج مساوی ید است- چنانچه از بیان سابق ظاهر می‌شود- پس دی که وتر ثلث قوس مفروضه است، وسط در نسبت خواهد بود فیما بین نصف قطر و قسم اعظم از قطر، و استعلام مجهول به قوت مقدمهٔ ثانیه ظاهر و لایح است.



وجه چهارم آن که قوس مفروضه سه ربع دور باشد و شک نیست که در این صورت قطرین خارجین از مبادی اثلاث در دو نقطه تلاقی وتر قوس مفروضه با محیط دایره مقاطع وتر شوند و وتر ثلث آن قوس با وتر آن مساوی باشد و تصویر مطلوب از این شکل به سهولت میسر است.



وجه پنجم آن که قوس مفروضه از سه ربع زیادت و از تمام دور کمتر باشد؛ و در این صورت تقاطع قطرین با وتر مفروض در داخل دایره متصور نشود بلکه بعد از اخراج وتر از طرفین در خارج دایره، مقاطع قطرین مفروضین شود. و به جهت تحقیق مطلب فرض کنیم که قوس دجبا از دایرهٔ دجبا بر مرکز ه زائد از سه ربع محیط و کمتر از تمام آن است، و قسمت کنیم آن را به دو نقطهٔ ج ب بر سه قسم متساوی، و آن قوس‌های دج جب با است، و وصل کنیم اوتار دج جب با را. و از دو نقطهٔ ج ب دو قطر زهج حهب را اخراج کنیم و لامحاله دو قطر مفروض قوس اد را -که تمام قوس مفروضه است- ملاقات نکنند، بلکه قطع کنند محیط را بر دو نقطهٔ ح ز. و قوس حز مساوی باشد با قوس جب، چه دو زاویهٔ حهز جهب متساویانند. پس اخراج کنیم قطر حهب را تا نقطهٔ ی مثلاً، و قطر زهج را تا نقطهٔ ل مثلاً. و نیز وتر دا را که وتر قوس مفروضه است، اخراج کنیم از طرف د تا تلاقی کند با قطر حهب بر نقطهٔ ی، و از طرف ا تا ملاقی قطر زهج شود بر نقطهٔ ط، چه وتر مفروض با دو قطر مذکور از هر طرفی موضوع بر تقارب است. پس به حکم مصادرهٔ مشهورهٔ اقلیدس ملاقات آن با هر یک از قطرین واجب باشد. پس گوییم خط یا -که عبارت از مجموع وتر دا است و خط ید- مساوی وتر ثلث قوس مفروضه است، مثل خط با و خط دج و خط جب و نیز خط طد -که مرکب از وتر دا است و خط اط - مساوی هریک از اوتار ثلثه است.



برهانش: چون قوس حز مساوی قوس جب است و قوس جب مساوی قوس دج، پس قوس حز مساوی قوس دج باشد، و بعد از اسقاط قوس حد مشترک، قوس دز مساوی قوس حج خواهد بود. و به مثل همین بیان مساوات قوس حا با قوس زب لازم آید. پس قوس‌های جح حا دز زب متساوی باشند، پس زاویهٔ ج از مثلث دجط مساوی زاویهٔ ج است از مثلث هجب، چه زاویهٔ ج از مثلث دجط بر قوس دز واقع است و زاویهٔ ج از مثلث هجب بر قوس زب. و دو قوس زب دز متساویانند. و به مثل این بیان، مساوات زاویهٔ ی از مثلث بی‌ا با زاویهٔ ج از مثلث هجب ثابت شود. و چون دو قوس جبا دجب ضعف قوس جب می‌باشند، پس زاویهٔ جهب مرکزیه با هر یک از دو زاویهٔ جدط ی‌اب محیطیه مساوی باشند. پس زاویهٔ ی از مثلث ی‌با و زاویهٔ ط از مثلث دطج مساوی زاویهٔ ب باشند از مثلث هجب، و زاویهٔ ب از آن مثلث مساوی زاویهٔ ج است به جهت تساوی ساقین هج هب. پس دو زاویهٔ ی ب از مثلث ی‌با متساوی باشند و هم چنین دو زاویهٔ ط ج از مثلث طدج. پس خط اب مساوی خط ی‌ا باشد و خط دط مساوی جد و این است مطلوب. و مخفی نماند که اثبات مساوات خط با با ی‌ا از مجرد تساوی قوسین زب حا لازم نمی‌آید بلکه در اثبات مساوات ناچار توسیط مثلث هجب لازم است. و علی کل حال، پس دو مثلث جدط ی‌با متساویانند و هر یک مشابه مثلث

جهب پس نسبت خط هب -که نصف قطر است- با ضلع یا -که مساوی وتر ثلث قوس مفروضه است- چون نسبت خط جب بلکه خط یا است با خط یب. پس یا وسط در نسبت باشد فیما بین نصف قطر و تمام قطر با زیادتی خط یح یا طز؛ و این نسبت یکی از نسبتین ثابتین در قسم اول است. اما نسبت دیگر که فیما بین اقسام وتر و اقسام قطر بود در این مقام مفقود است، چه تقاسیمی فیمابین قطر و وتر حاصل نیست و بنابراین استخراج مجهول در این صورت به طریق مهندس بارع غیاث‌الدین متعین است، و به طریق قطوع مخروطات نیز ممکن و تفصیل آن مناسب این مقام نیست- واللّٰه اعلم بالصواب و الیه المرجع و المآب.

تتمیم: در مقدمهٔ ثانیه اشاره شد به آن که استعلام اقسام عددین منسوبین بر نسبت مفروضه به طرق جبر و مقابله راجع به طریقهٔ مستنبطهٔ فاضل مزبور است و تفصیل آن چنان است که چون در صورت مفروضه اکثر عددین قطر است و مقدار آن به حسب اصطلاح محاسبان و اهل هندسه صد و بیست درجه است، پس هرگاه قسم اصغر از آن را شیء فرض کنیم و در نصف قطر ضرب کنیم حاصل، مربع قسم اصغر از عدد اقل باشد و چون شیء از مراتب صم است، اولی آن است که آن را مال فرض کنیم تا مضروب آن در شصت، شصت مال باشد و جذر آن زمدمه‌کحمحک (۷;۴۴,۴۵,۲۸,۴۸,۲۰) خامسه از شیء است و این قسم اصغر از وتر مفروض باشد و نسبت مال به آن مانند نسبت تمام عدد اقل باشد باستثنای زمدمه‌کحمحک (۷;۴۴,۴۵,۲۸,۴۸,۲۰) خامسه از شیء به قطر الا مال. و به مقتضای اربعهٔ متناسبه، مسطح طرفین که صد و بیست مال الّا یک مال مال است، مساوی مسطح وسطین باشد و آن حاصل ضرب تمام عدد اقل باشد، به استثنای قسم اصغر از آن در زمدمه‌کحمحک (۷;۴۴,۴۵,۲۸,۴۸,۲۰) خامسه از شیء. پس هرگاه قوس مفروضه سدس دور باشد، وتر آن نیز س (۶۰) خواهد بود، چون س (۶۰) را در زمدمه‌کحمحک (۷;۴۴,۴۵,۲۸,۴۸,۲۰) خامسه از شیء ضرب کنیم، حاصل شود ۴۶۴ شیء و مه‌کحمحک (۰;۴۵,۲۸,۴۸,۲۰) رابعه از شیء. و بعد از نقصان مضروب مستثنی در عدد مفروض که زمدمه‌کحمحک (۷;۴۴,۴۵,۲۸,۴۸,۲۰) خامسه از شیء است، از آن باقی ماند ۴۶۴ شیء و مه‌کحمحک (۰;۴۵,۲۸,۴۸,۲۰) رابعه از شیء الا شصت مال و آن معادل صد و بیست مال است الا

یک مال مال. و بعد از جبر و مقابله، ۱۸۰ مال معادل شود با یک مال مال و ۴۶۴ شیء و مه‌کح‌مح‌ک (۰;۴۵,۲۸,۴۸,۲۰) رابعه از شیء. به تنزل مراتب ۱۸۰ شیء معادل شود با یک کعب و ۴۶۴ عدد و مه‌کح‌مح‌ک (۰;۴۵,۲۸,۴۸,۲۰) رابعه، و این صورت معادلهٔ اشیاء است با کعب و اعداد، چنانچه مذکور شد. و بعد از رد، شیء واحد معادل است با ک ثانیه از کعب و ب‌لدنه‌طلووم (۲;۳۴,۵۵,۹,۳۶,۶,۴۰) سادسه و از این جا نیز قانون کلی می‌توان به دست آورد ولی چون اصل عمل صعوبتی تمام دارد و استخراج وتر ثلث یکی از امهات اوتار در تحصیل مقصود کفایت می‌کند، زیادت اطناب موجب اسهاب است. خاصه با آنکه همت اهل زمان قاصر و به مضمون کلام بلاغت نظام «الناس اعداء لما جهلوا» غالب ابناء دهر در مقام ازدراء علوم ریاضیه و هندسیات می‌باشند و همانا سبب کلی عدم تداول هندسیات و سایر ریاضیات قصور افهام اکثر است از نیل دقایق و درک حقایق آن‌ها، بلکه اکثر همم مصروف امور سهلة الادراک شده و هم‌چنین ارباب حرف و صنایع اقتصار بر صنایع متیسرهٔ سهله نموده و می‌نمایند و از صنایع عجیبه تخافی و تحاشی تمام دارند و به این سبب غالب صنایع بدیعه که در عهود خالیه و قرون ماضیه معهود و مألوف بوده از میان رفته، بلکه غالب آن است که اگر ذکر یکی از آن‌ها شود، اکثر در مقام انکار و ادعای عدم امکان آن برمی‌آیند. و غافلند از آن چه حکما تصریح به آن نموده‌اند که «کل ما قرع سمعک من الغرایب فذره فی بقعة الامکان مالم یذدک عنه قاطع البرهان»[1]. چنان چه یکی از[2] صنایع عجیبه که در اعصار سابقه معهود بوده[3]،میزان الحکمه بوده[4] است و خاصیت غریبهٔ آن میزان آن است که مقادیر اوزان[5] اوزان[5] اجزای اجسام[6] مرکبه[7] بدون تحلیل و تفکیک اجزای آن‌ها[8]، به استعانت آن[9] به دست می‌آید

---

۱. این جمله در *الحکمة المتعالیة* ملاصدرا (ج۱، ص۳۶۴) با اندکی تغییر آمده است و در *اشارات و تنبیهات* ابن‌سینا (ج۳، ص۴۵۱) هم به صورت خلاصه‌تر وجود داردکه در هر دوی آنها به جای «قاطع البرهان»، «قائم البرهان» ذکر شده است.

۲. و از جمله

۳. – از منه سالفه معهود بوده و در این اعصار از میان رفته طریق صنعت

۴. – بوده

۵ . – اوزان

۶. هر جسم

۷. + را

۸. آن

۹. + میزان

می‌آید و فائدهٔ تامّه بر صنعت آن مترتّب؛ چه به استعانت آن، معیار غش درهم و دینار و سایر آلات مصنوعه حاصل می‌شود[۱] و درزمان[۲] ایارون[۳]، پادشاه صقالبه، اکلیلی عظیم القدر، متقن الصنعه، محکم العمل از یکی از نواحی به جهت او آوردند و آن اکلیل مرکب از طلا و نقره بود. پس ایارون خواست که مقدار وزن هر یک از طلا و نقرهٔ آن اکلیل را بداند و از شکستن آن اکراه داشت. پس مهندسان و ارباب حیل را احضار و از ایشان طالب بیان مقدار جوهرین اکلیل مزبور شده. هیچ یک راهی به تعیین مقدار آن‌ها نیافتند مگر ارشمیدس مهندس که استنباط طریق آن را نموده و این واقعه قبل از وجود اسکندر بود. و بعد از آن مانالاوس مهندس که چهارصد سال بعد از اسکندر بود در آن تأمل کرده و طرق کلیه حسابیه در آن استنباط و رساله نوشته و به جهت ذوماطیانوس ملک یونان فرستاده و در ایام مأمون الرشید، یوحنا بن یوسف و احمد بن الفضل المساح در آن نظر داشتند و در آن ایام ملوک سامانیه، محمدبن زکریای رازی رساله در آن باب نوشته و در زمان دیالمه، ابن العمید یا شیخ رئیس ابوعلی بن سینا در آن تأمل نموده و به کار می‌بردند و در ایام آل ناصرالدین، ابوالریحان بیرونی تصرفات در آن می‌نمود و در مبادی زمان دولت سلاجقه، عمر خیام تحقیقات در آن می‌کرده و ابوحاتم مظفر بن اسمعیل الاسفزاری سعی‌ها در تسهیل عمل به آن نموده و بعضی اجزاء در آن زیاد کرد. تسمیهٔ آن به میزان الحکمه از اوست و در زمان سلطان سنجر، شیخ جلیل عبدالرحمن الخازنی در آن نظر کرده و تصرفات نموده و رساله در آن باب نوشته و براهین صحت آن و کیفیت صناعت و عمل به آن را به تفصیل بیان کرده و خلاصهٔ اقوال سابقین[۴] سابقین[۴] از ارشمیدس و مانالاوس و محمد بن زکریا و عمر بن ابراهیم خیام و امام ابوحامد مظفر بن اسمعیل و ابوریحان بیرونی را در آن جا آورده و قدری از آن رساله در نزد این حقیر موجود است و یکی از فضلای اعلام دارالعبادهٔ یزد به جهت حقیر حکایت کرد که رسالهٔ مرقومه را به دست

---

۱. – وفائده تامه بر صنعت آن مترتب، چه به استعانت آن، معیارغش درهم و دینار و سایر آلات مصنوعه حاصل می‌شود.

۲. از اینجا تا پایان، نسخهٔ دوم با نسخهٔ اساس متفاوت است و چنین آمده است: «...ملوک یونان یکی از ملوک اکلیلی مصنوع از طلا و نقره و مکلل و مرصع بجواهر بجت یکی دیگر از ملوک فرستاده و آن پادشاه خواسته مقادیر هر یک از طلا و نقره و جواهر آن اکلیل را استعلام نماید بدون آنکه آن اکلیل شکسته شود یکی از حکمای یونان اختراع آن میزان نموده و عبدالرحمن خازن رسالهٔ در کیفیت صنعت آن میزان نوشته و تصویر آن را کشیده قدری از آن رساله الحال در نزد این فقیر موجود است چنانچه ضمیر منیراشرف به مطالعهٔ آن مایل باشد به عز حضور سامی میرسانم و اللّه ولی الفضل والانعام تمت الرساله بید ابن المؤلف تغمده اللّه بغفرانه محمد بن ابی تراب بن احمد فی بعض شهور سنة الف ومأتین وثلثة وثمانین».

۳. این شخص باید همان هرون اسکندرانی باشد.

۴.+ را

آورده و به سعی و اهتمام یکی ازمهندسین آن بلده که در صنعت اسطرلاب مهارتی تمام داشته، در مقام صنعت آن میزان برآمده و به اتمام رسانده و ادعای تجربه و امتحان و ترتب فوائد مزبوره را بر آن نمود و العهدة علیه. امید سدید از دربار احدیت چنان است که در زمان این دولت قویم- اطال اللّه مدتها و غلبتها علی سایر الدول- اکثر صناعات منسوخه که از قصور همت ابنای دهر از میان رفته به یمن همت و توجه خاطر خطیر اقدس شهریار معدلت مدار -خلد اللّه ملکه- و اهتمام تام سرکار جلالت‌مدار وزیر سعید، نصیرالدین الثانی- ادام اللّه ایام عزه واقباله- جلوه‌نمای منصهٔ بروز و ظهور آید چنان چه آثار آن یوماً فیوماً مشهود و منظور است و بسیاری ازصنایع غیر مألوفه اینک در ممالک ایران مستعمل و مشهور شده. نسأل اللّه سبحانه أن یطیل له فی مدته ویزید فی علوه وقدره وسلطانه وبسطته واحیاء ما اندرس من آثار الشریفه الطاهره بمعاضده دولته الغالبه الباهره ومساعدة شوکته القویه القاهره وحشمته العزیزه البهیه الزاهره بمحمد وعترته الاطیبین الاطهار. کتبه مؤلفه الفقیر الحقیر ابوتراب بن احمد وفّقه اللّه تعالی.

شرح رساله

به نظر می‌رسد مسألهٔ تثلیث زاویه در پی تلاش برای به دست آوردن اضلاع چندضلعی‌های منتظم و به ویژه ترسیم نه‌ضلعی منتظم، بیان شده باشد. پاپوس اسکندرانی (سدهٔ ۴م) در تقسیم‌بندی خود از مسائل هندسه، تثلیث زاویه را در زمرهٔ مسائل مجسم قرارداده است، یعنی برای حل آن داشتن دانش مقاطع مخروطی را لازم دانسته است. با این حساب نخستین تلاش‌ها برای حل این مسأله به سده‌های سوم و چهارم قبل از میلاد بازمی‌گردد، اما پاپوس خود از تلاش‌های دیگری پیش از این زمان‌ها نیز یاد کرده است. با این حال به نظر می‌رسد از حدود سدهٔ سوم پیش از میلاد حل‌ناپذیری این مسأله با خط‌کش و پرگار بر ریاضی‌دانان آن عصر روشن بوده است. بطلمیوس (سدهٔ ۲م) درانتهای مقالهٔ اول *مجسطی* به این نکته اشاره کرده است که تثلیث زاویه به روش‌های هندسی امری ناممکن است (ص۵۴). او پس از محاسبهٔ وتر زاویهٔ $^{۳}/_{۲}$ درجه برای محاسبهٔ وتر نیم درجه از یک تقریب استفاده کرده است. ارشمیدس در کتاب *مأخوذات* که تنها ترجمهٔ عربی آن به جا مانده است، این مسأله را به مسأله‌ای از نوع میل[۱] تبدیل کرده و آن را به صورت مکانیکی حل کرده است. دانشمندان اسلامی نیز در این باره تألیفاتی دارند و برای حل این مسأله تلاش کرده‌اند. بنوموسی، ثابت بن قره و ابوجعفر خازن رسالاتی در این باره با تکیه بر روش‌های هندسی تألیف کرده‌اند. ابوسهل کوهی و سجزی نیز رسالاتی در این باره تألیف کرده‌اند با این تفاوت که آنها به جای هندسهٔ متحرک از روش‌های مبتنی بر مقاطع مخروطی استفاده کرده‌اند. برخی از دانشمندان دورهٔ اسلامی نیز از روش‌های جبری برای حل این مسأله استفاده کرده‌اند، از آن جمله ابوالجود برای ترسیم ۹ضلعی منتظم (در واقع تقسیم زاویهٔ ۱۲۰درجه به سه بخش) به معادلهٔ $x^{۳}+۱=۳x$ دست یافته اما از حل آن عاجز مانده است. غیاث الدین جمشید کاشانی نیز در *رسالهٔ وتر و جیب* که اصل آن از بین رفته است و تنها محتوای آن از راه شرح میرم چلبی و تحریر قاضی زاده رومی و شرح ملاعلی بیرجندی بر زیج الغ بیگ به دست ما رسیده، سینوس زاویهٔ یک درجه را برحسب سینوس زاویهٔ سه درجه از راه حل معادلهٔ درجهٔ سومی به صورت $ax = x^{۳} + b$ محاسبه کرده (نک: معصومی همدانی، ۵۲۴–۵۲۸) که ابوتراب در ابتدای رسالهٔ خود این روش را به صورت مختصر آورده است.

1. Neusis

روش میرزا ابوتراب

رسالهٔ در *معرفت وتر ثلث قوس معلومة الوتر* مشتمل بر دو مقدمه، دو بخش اصلی و یک مؤخره است.

در مقدمهٔ نخست، ابوتراب تاریخ مختصری از حل معادلات درجهٔ دوم و سوم به توسط دانشمندان مسلمان آورده است. او در مقدمهٔ دوم مسألهای را عنوان کرده که در ادامه به آن نیازمند است.

ابوتراب در بخش اول پس از بیان مقدمات، روش کاشانی را در تثلیث کمان توضیح میدهد (برای این روش نک: سوادی، سراسر رساله) و در بخش دوم روش خود را آورده است. او برای این منظور پنج حالت مختلف را ذکر میکند. از آنجا که روش اثبات او برای سه حالت اول و سوم و پنجم یکسان و برای دو حالت دوم و چهارم بدیهی است در اینجا تنها اثبات حالت نخست، آن طور که ابوتراب آورده است، ذکر خواهد شد.

حالت اول، کمان مفروض از نصف محیط دایره کمتر باشد.

مسأله را حل شده فرض میکنیم یعنی قوسهای AB، BC و CD را برابر در نظر میگیریم پس وترهای مقابل به آنها نیز با یکدیگر برابرند. همچنین قوسهای روبهرو به زاویهٔ مرکزی O نیز با هم برابرند درنتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BC}=\widehat{EF}\\ \widehat{BC}=\widehat{CD}\end{array}\right\} \rightarrow \widehat{EF}\left(+\widehat{ED}\right)=\widehat{CD}\left(+\widehat{ED}\right) \rightarrow \widehat{FD}=\widehat{CE}$$

$$\rightarrow \angle DCF=\angle CBE$$

زاویهٔ CDA نصف قوس AC است و در نتیجه با زاویهٔ COB برابر است. از آنجا که دو خط BC و AD موازیند و مثلث BOC متساویالساقین است خواهیم داشت:

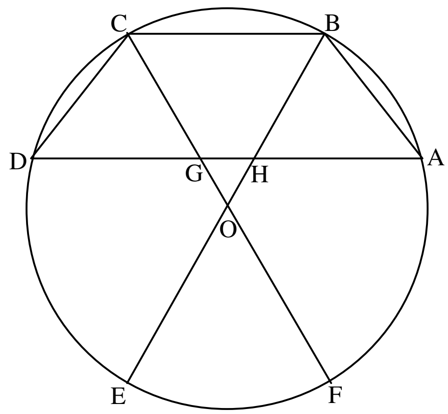
$$CD=DG \text{ و } AB=AH$$

بر این اساس دو رابطهٔ زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{CG}{DG}=\frac{DG}{\frac{CF}{۲}} \text{ و } \frac{CG}{GD}=\frac{GA}{GF}$$

برای به دست آوردن DC، از آنجا که $DC = DG$، باید نقطهٔ G را چنان به دست بیاوریم که قطر CF در روابط بالا صدق کند. در اینجا ازمقدمهٔ دوم استفاده می‌کنیم.
در این مقدمه داریم: دو عدد A و B و مفروض هستند، به طوری که $A > B$. می‌خواهیم A را به دو قسمت c و d $(c > d)$ و B را به دو قسمت e و f $(e > f)$ طوری تقسیم کنیم که روابط زیر برقرار باشند:

$$\frac{d}{f} = \frac{f}{\frac{A}{۲}} \quad \text{و} \quad \frac{d}{f} = \frac{e}{c}$$



اگر $\frac{A}{۲}$ را y بنامیم و فرض کنیم که $f = x$ باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{x^{۲}}{y} = d \quad \text{و} \quad \frac{\frac{x^{۲}}{y}\left(۲y - \frac{x^{۲}}{y}\right)}{x} = e$$

$e + x$ را k می‌نامیم و رابطهٔ $\frac{B-k}{k} \times x = p$ را برقرار می‌کنیم به طوری که:

$$\begin{cases} p + x = f & k < x \\ p - x = f & k > x \end{cases}$$

مقدار f که در این حالت به دست می‌آید را در معادلهٔ اولیه قرار می‌دهیم و این روش را تکرار می‌کنیم، بدیهی است که هر چه تکرار بیشتر باشد، خطای محاسبه کمتر خواهد شد.

در حالت دوم، کمان مفروض نصف دایره است. در این صورت وتر همان قطر دایره است و در نتیجه وتر ثلث آن، همان شعاع دایره خواهد شد.

در حالت سوم، کمان مفروض از نصف محیط دایره بزرگتر و از $^{۳}/_{۴}$ دور دایره کوچکتر است. اثبات این حالت مشابه حالت اول است.

در حالت چهارم، کمان مفروض $^{۳}/_{۴}$ محیط دایره است.

در حالت پنجم، کمان مفروض از $^{۳}/_{۴}$ محیط دایره بزرگتر و از تمام محیط آن کوچکتر است.

نتیجه

در مجموع می‌توان گفت که روش میرزا ابوتراب همان روش کاشانی است با این تفاوت که او برای حل مسأله به جای یافتن معادلهٔ جبری و حل آن، از ترسیم هندسی استفاده کرده است. البته این طریق تفاوت‌هایی را میان روش او و کاشانی ایجاد کرده است. از این رو اگر چه احیای این اثر به عنوان نمونه‌ای از کارهای ریاضی‌دانان عصر قاجار بسیار ارزشمند است، اما به روشنی می‌توان دریافت که هدف از نگارش آن جز تکرار کار گذشتگان و تلاش برای تدقیق مقادیر ایشان، نبوده است.

منابع

ابن‌سینا، *الاشارات و التنبیهات*، با شرح خواجه نصیرالدین طوسی، ۳جلد، چاپ کریم فیضی، قم، ۱۳۸۴ش.

اعتمادالسلطنه، محمد حسن، *المآثر و الآثار*، تهران، ۱۳۱۱ق.

تهانوی، *کشاف اصطلاحات الفنون*، به کوشش محمد وجیه، عبدالحق و غلام قادر، کلکته، ۱۸۶۲م.

حبیب آبادی،معلم، *مکارم الآثار در احوال رجال دو قرن ۱۳ و ۱۴ هجری*، ج۳، مؤسسهٔ نشر نفائس مخطوطات، اصفهان، ۱۳۵۱ش.

دانش‌پژوه، محمد تقی، *فهرست نسخه‌های خطی کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران*، ج۸، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۳۰ش.

دوستقرین، فاطمه، *بررسی و شرح روش میرزا ابوتراب در محاسبه وتر ثلث قوسی که وتر آن معلوم است بر اساس رساله در معرفت وتر ثلث قوس معلومةالوتر*، پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد تاریخ و تمدن ملل اسلامی، دانشگاه آزاد اسلامی (واحد علوم و تحقیقات)، تهران، ۱۳۸۸ش.

سوادی، فاطمه، *بررسی روش کاشانی در محاسبۀ جیب یک درجه بر اساس رساله فی استخراج جیب واحده*، پایان نامه برای دریافت درجۀ کارشناسی ارشد تاریخ و تمدن ملل اسلامی، دانشکدۀ الهیات و معارف اسلامی دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۸۴ش.

شریف کاشانی، حبیب الله، *لباب الالقاب الاطیاب فیه معرفة الرجال عن علماء الشیعه*، چاپخانۀ مصطفوی، ۱۳۷۸ق.

صدرالدین شیرازی (ملاصدرا)، *الحکمة المتعالیة فی الاسفار العقلیة الاربعة*، ۹جلد، قم، ۱۳۸۱ش.

عالم‌زاده، هادی و فاطمه دوست‌قرین، «میرزا ابوتراب نطنزی، رویکردی بدیع به مسألۀ تثلیث زاویه»، *تاریخ و تمدن اسلامی*، شمارۀ ۸، سال ۴، تهران، دانشگاه آزاد اسلامی (واحد علوم و تحقیقات)، ۱۳۸۷ش، ص۱۲۳-۱۳۶.

معصومی همدانی، حسین، «تثلیث زاویه»، *دایرةالمعارف بزرگ اسلامی*، ج۱۴، ۱۳۸۵ش.

منزوی، احمد، *فهرست مجلس*، ، ج۱۹، تهران، چاپخانۀ مجلس، ۱۳۴۵ش.

نراقی، حسن، *تاریخ اجتماعی کاشان*، انتشارات مؤسسة مطالعات و تحقیقات اجتماعی، تهران، ۱۳۴۵ش.

Ptolemy, *Almagest*, English translation and annotation by G. J. Toomer, Princeton University Press, Princeton, 1998.