

# معکوس سازی یک بُعدی داده های الکترومغناطیسی هوابرد با استفاده از روش اُکام برای به دست آوردن رسانایی لایه ها

فرزاد شیرزادی تبار<sup>۱</sup> و بهروز اسکویی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری ژئوفیزیک، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۸۰۵۲۶، پذیرش نهایی: ۸۹۰۷۲۱)

## چکیده

داده های الکترومغناطیسی هوابرد در حوزه های زمان و بسامد برداشت می شوند. این داده ها در حوزه زمان، تغییرات زمانی میدان مغناطیسی ثانویه هستند اما در حوزه بسامد خود میدان مغناطیسی ثانویه است که اندازه گیری می شود. در اینجا داده های الکترومغناطیسی هوابرد حوزه بسامد با اعمال روش معکوس سازی اُکام (Occam's inversion) به مقادیری از رسانایی تبدیل می شوند که مربوط به لایه های افقی متفاوت هستند. در این بررسی تعداد لایه ها بسیار بیشتر از تعداد داده ها است. با انتخاب مناسب یک تابع هدف که باید کمینه شود، با استفاده از روش کمترین مربعات، طوری عمل می شود که هم پارامترهای مدل دارای کوچک ترین ساختار (minimum structure) باشند و هم داده ها به حد کافی برازش شوند. اعمال این روش بر داده های الکترومغناطیسی هوابرد حاصل از مدل های مصنوعی، نتایج قابل قبولی تولید می کند. سعی شده که از مدل های متنوعی برای بررسی چگونگی عملکرد این روش معکوس سازی استفاده شود که شامل مدل های ۲، ۳ و ۵ لایه است. همچنین نشان داده شده که این روش، لایه با رسانایی کمتر که در زیر لایه رسانا قرار گرفته را به خوبی تعیین می کند و این در حالی است که روش های الکترومغناطیسی به وجود لایه ها یا توده های رسانا حساس تر هستند. در مدل های مورد استفاده، با عوض کردن ترتیب رسانایی لایه ها، پایداری و قدرت روش معکوس سازی اُکام را در بازایی رسانایی لایه ها نشان داده ایم. همچنین تأثیر تعداد بسامدهای مورد استفاده در مدل سازی روی نتایج بررسی شده است.

واژه های کلیدی: الکترومغناطیس هوابرد، دستگاه معادلات غیرخطی، ماتریس ژاکوبی، معکوس سازی اُکام

## Recovering 1D conductivity from AEM data using Occam inversion

Shirzaditabar, F.<sup>1</sup> and Oskooi, B.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ph. D. Student of Geophysics, Earth Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

<sup>2</sup> Assistant Professor, Earth Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 17 Aug 2009, Accepted: 13 Oct 2010)

### Abstract

Over the past three decades helicopter-borne electromagnetic (HEM) measurements have been used to reveal the resistivity distribution of the earth's subsurface for a variety of applications. HEM systems include a "bird" or sensor containing one or more pairs of transmitting and receiving coils. The separation between the rigidly mounted transmitting and receiving coils of a coil-pair typically lies between 4 and 8 m. Because the distance between transmitter and receiver coils in the bird is much smaller than the altitude of the bird (typically more than 30 m), we can use magnetic dipole approximation for the transmitter coil. This approximation allows the ease of primary and secondary magnetic field calculations. The EM bird is towed under the helicopter to minimize the helicopter effects. The modern HEM systems use multi-frequency devices operating at 4–6

frequencies ranging from 200 Hz to 200 kHz. The receiving coil measures the voltage induced by the primary field from the transmitting coil and by the secondary field from the earth. As the secondary field is very small compared to the primary field, the primary field is generally bucked out and the ratio between the secondary and primary fields is presented in ppm. If there are good electrical conductors below the measuring line there will be electrical currents induced and give rise to a phase shift between the primary and secondary field. This means that the measured data is a complex quantity having in-phase and quadrature components.

There are two classes of interpretation tools to apply to HEM data that provide information for use to better understand geological structures and processes. These are either direct transformation of data into a generalized half-space model at certain data frequencies, or inversion of multi-frequency data sets to prepare a layered (1-D) resistivity model of the earth. Transform methods have the advantage of yielding a single solution for the given output parameter, and the disadvantage that the output parameters may provide a poorly resolved image of the geology. On the other hand, inversion methods have the advantage of yielding a much better resolution for the given output parameter and the disadvantage that these methods are slower compared to transform methods. Inversion methods for the interpretation of HEM data for a layered earth are being employed more commonly for helicopter-borne surveys as the data quality is improved and as both the number of frequencies and computer speed are increased. A considerable number of papers exist on the inversion methods used to model the resistivity of a layered earth. These algorithms are useful in conditions where resistivity is locally uniform in the horizontal direction over distances comparable to the footprint of the transmitter. However, if the scale length of the structural variation is small, then differences between the 1-D and 3-D responses will be a problem for the 1-D inversion. The violation of the 1-D assumption may make the recovered models unreliable for interpretation in particular areas of the survey. However, due to the limited extent of the HEM footprint which is less than 200 m in general, one-dimensional inversion of HEM data is often sufficient to explain the data in areas where the subsurface resistivity distribution varies relatively slowly in a lateral direction.

Here, we use simultaneously a number of frequencies in the transmitter. So it is convenient to use "EM sounding" in this work because each of these magnetic fields can penetrate to the associated depths of the ground.

The inversion of EM sounding data does not yield a unique solution but a single model to interpret the observation is sought. Here we use Occam's inversion which yields a model as simple as possible. To obtain such models, the nonlinear forward problem is linearized about a starting model in the usual way, but it is solved explicitly for the desired model rather than for a model correction. To obtain the best solution, we make an objective function which is composed of the norm of model as well as the norm of data differences, and then we minimize this objective function.

Applying the Occam's inversion on synthetic data, created over some 1D models with multiple sequences of resistive and conductive layers, shows that this method works well and the predicted models can be good approximations of synthetic models. The quality of results depends on the number of frequencies used. The more frequencies used, the better the results. Besides, as the value of frequencies increase, the penetrations of EM waves decrease and vice versa. So, removing a frequency of low value can affect the results in the higher depths, as is shown in the last two figures.

Besides, the method does not need a priori information about subsurface structure. All the results are obtained without a primary model. This shows that the method is stable to recover conductivities. On the other hand, results reveal that the method can detect a

resistive layer beneath the conductive one whilst the EM methods are more sensitive to conductors than resistors.

**Key words:** Airborne electromagnetic, Nonlinear forward problem, Jacobian matrix, Occam's inversion.

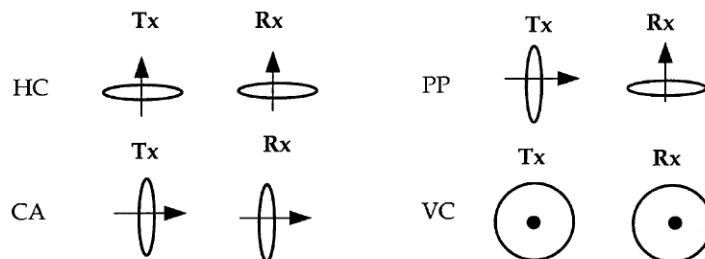
## ۱ مقدمه

اِعمال و یا در دسترس باشد، داده های به دست آمده از پیکربندی های متفاوت از پیچیده ها می توانند اطلاعات کامل تری در مورد رسانش لایه های زیرسطحی به دست دهند.

روش های متفاوتی برای تفسیر داده های الکترومغناطیسی حوزه بسامد وجود دارند که برای به دست آوردن تصاویری از توزیع پارامترهای زمین شناسی به کار برده می شوند. این روش ها به طور کلی در دو دسته قرار می گیرند: ۱- تبدیل مستقیم داده ها برای یک مدل کلی مثل یک نیم فضا و ۲- معکوس سازی داده ها برای یک مدل به خصوص مثل زمین لایه ای. مزیت روش های تبدیل مستقیم این است که برای یک ورودی داده شده، جوابی یکتا و غیر قابل تغییر به دست می دهند. اما عیب آنها این است که تصویری ضعیف از زمین شناسی تولید می کنند (فریزر، ۱۹۷۸ و هوانگ و فریزر، ۲۰۰۱). اما روش های معکوس سازی تکراری هر چند به کندی صورت می گیرند اما تصاویر و مقاطعی به دست می دهند که دارای تفکیک بسیار زیادی است (فارکواریسون و همکاران، ۲۰۰۳).

در بررسی های الکترومغناطیسی هوابرد حوزه بسامد، داده ها را می توان به صورت های گوناگونی برداشت کرد. معمول ترین نوع پیکربندی دستگاه های مورد نظر شامل دستگاه های هم صفحه افقی (HC)، هم صفحه عمودی (VC)، هم محور (CA) و عمود بر هم (PP) هستند، که این نوع پیکربندی در شکل ۱ نشان داده شده است. پیچیده های گیرنده و فرستنده را معمولاً در دستگاهی به نام پرند (bird) قرار می دهند و با بالگرد حمل می کنند. در این نوع از دستگاه ها معمولاً فاصله بین پیچیده های گیرنده و فرستنده در مقایسه با شعاع این پیچیده ها آن قدر بزرگ هست که بتوان فرستنده را به صورت یک دوقطبی مغناطیسی افقی یا عمودی فرض کرد که در این صورت، هم ظاهر معادلات به صورت ساده تری درمی آید و هم فرض ما از واقعیت فاصله زیادی نگرفته است.

وجود جهت گیری های متفاوت در فرستنده، باعث می شود که زمین به صورت های متفاوتی مورد کاوش قرار گیرد. این در حالی است که گیرنده ما هم در جهت های متفاوت مؤلفه های متفاوتی از پاسخ زمین را اندازه گیری می کند. بنابراین وقتی فقط تعداد محدودی بسامد قابل



شکل ۱. چهار نوع پیکربندی مورد استفاده در برداشت های الکترومغناطیسی هوابرد: هم صفحه افقی (HC)، عمودی (PP)، هم محور (CA) و هم صفحه قائم (VC).  $T_x$  و  $R_x$  به ترتیب فرستنده و گیرنده هستند.

مناسبتی ساختار رسانایی زمین را معرفی کند. ضخامت هر لایه ثابت است ولی به این دلیل که کیفیت داده‌های الکترومغناطیسی در عمق افت پیدا می‌کند، با افزایش عمق افزایش می‌یابد. ضخامت لایه‌ها نسبت به عمق هم نباید خیلی کم انتخاب شود چون در آن صورت مقادیر داده‌های کوچک باعث ناپایداری در مدل‌سازی خواهد شد.

## ۲ مدل‌سازی پیشرو

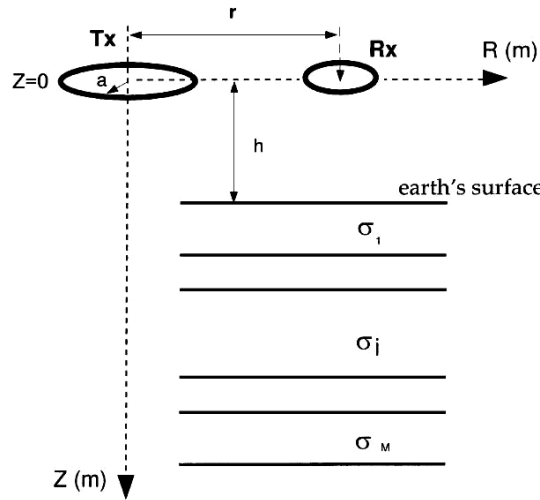
مسئله پیشرو در دستگاه هم‌صفحه افقی، نیازمند محاسبه میدان مغناطیسی حاصل از یک دوقطبی مغناطیسی قائم است. پاسخ یک فرستنده پیچه‌ای با انتگرال‌گیری عددی از پاسخ مربوط به دوقطبی‌های قرار گرفته روی پیچه به دست می‌آید. اما در اکتشاف‌های ژئوفیزیکی، میزان جدایی پیچه‌ها عموماً بیشتر از شعاع پیچه‌های فرستنده است و بنابراین می‌توان و بهتر است که چشمه‌های به شکل پیچه را به صورت دوقطبی در نظر بگیریم.

نخستین بار ویت (Wait) در ۱۹۵۱ و بعد از آن فریشنشت (Frischknecht) و همچنین وارد (Ward) در ۱۹۶۷ روابطی را برای میدان‌های مغناطیسی اولیه و ثانویه حاصل از یک پیچه افقی روی یک زمین لایه‌ای عرضه کرده‌اند. فرض کنید دستگاه گیرنده و فرستنده مطابق شکل ۲ در ارتفاع  $h$  روی یک زمین لایه‌ای قرار دارد. هر یک از لایه‌ها دارای رسانایی  $\sigma_i$  و ضخامت ثابت  $h_i$  هستند. در اینجا فرض می‌شود که گذردهی الکتریکی و نفوذپذیری مغناطیسی ثابت و برابر با مقادیر آنها در خلأ باشند ( $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ). دوقطبی فرستنده با جریان  $I$  متناسب با  $e^{i\omega t}$  که در پیچه فرستنده جاری می‌شود ایجاد و داده‌ها در فاصله شعاعی  $r$  از آن اندازه‌گیری می‌شود. مقدار  $I$  در برداشت‌های هواپرد بین ۶ تا ۸ متر است.

روش مورد استفاده در اینجا روش مسئله معکوس (inverse problem) است که در آن طوری عمل می‌شود که داده‌ها و پارامترهای مدل به طور هم‌زمان به بهینه مقدار خود می‌رسند، یعنی داده‌های به دست آمده از مدل محاسبه شده بهترین برآزش را با داده‌های اصلی داشته باشند، درحالی که پارامترهای مدل از حد معمول خود خارج نشوند.

معکوس‌سازی داده‌های الکترومغناطیسی یک بُعدی از گذشته تا به حال صورت گرفته است. بیشتر این تحقیقات روی معکوس‌سازی داده‌های دستگاه هم‌صفحه افقی (HC) صورت گرفته است که از بین آنها گلن و همکاران در (۱۹۷۳) براساس برآزش داده‌ها و فولگار و آلدنبرگ (۱۹۸۴) براساس کمینه شدن نرم مدل این کار را عملی ساخته‌اند. از آن به بعد تلاش برای به دست آوردن مدل‌های بهتر از سوی افراد متفاوتی صورت گرفته است. ژانگ و همکاران (۲۰۰۰)، رسانایی لایه‌ها را از روش گاوس-نیوتون به دست آوردند. فارکوارسون و همکاران هم (۲۰۰۳) برای به دست آوردن هم‌زمان رسانایی و مغناطیس‌پذیری لایه‌ها از داده‌های هواپرد از روش‌های معکوس‌سازی استفاده کرده‌اند. همچنین هوانگ و فریزر (۲۰۰۳) نیز معکوس‌سازی داده‌های الکترومغناطیسی هواپرد را برای به دست آوردن هم‌زمان رسانایی، مغناطیس‌پذیری و ضخامت لایه‌ها فقط براساس برآزش داده‌ها و برای یک مدل زمین سه لایه عملی کردند.

هدف اصلی این مقاله اعمال الگوریتم معکوس‌سازی اکام (Occam's inversion) بر داده‌های الکترومغناطیسی هواپرد است که به صورت مصنوعی از پیکربندی هم‌صفحه افقی روی زمین لایه‌ای یک بُعدی محاسبه شده‌اند. تعداد لایه‌هایی که برای معکوس‌سازی انتخاب می‌کنیم باید به اندازه کافی زیاد باشد که به صورت



شکل ۲. هندسه دستگاه هم صفحه افقی. یک پیچ فرستنده (Tx) با شعاع a در ارتفاع h در روی سطح یک زمین یک بُعدی قرار گرفته است. گیرنده (Rx) در فاصله شعاعی Γ از فرستنده قرار دارد. زمین به صورت M لایه مدل شده که رسانایی در لایه M برابر σ<sub>i</sub> است (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۰).

عدد موج لایه N<sup>ام</sup> تحت تقریب شبه ایستا

$$\gamma_i^2 = j\omega\sigma_i\mu_i$$

رسانایی ظاهری کلی روی لایه N<sup>ام</sup>

$$Y_i = N_i \frac{Y_{i+1} + N_i \tanh(u_i h_i)}{N_i + Y_{i+1} \tanh(u_i h_i)}$$

$$Y_M = N_M \quad \text{در لایه M<sup>ام</sup>} \quad (3)$$

که در اینجا:  $m = I(\pi a^2)$  ممان مغناطیسی پیچ فرستنده و  $J_0$  تابع بسل نوع اول مرتبه صفر است. معمول است که داده های اندازه گیری شده یا محاسبه شده را به صورت نسبت میدان ثانویه به میدان اولیه و به صورت قسمت در میلیون (ppm) بیان کنند. بنابراین ما باید مدل پیشرو خود را به صورت

$$\frac{H_s}{H_p} \text{ در آوریم:}$$

$$\frac{H_z^s}{H_z^p} = -r^3 \int_0^\infty R_0(\lambda) e^{-\lambda(2h)} J_0(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \quad (4)$$

۳ مسئله معکوس (inverse problem)

هدف اصلی مسئله معکوس، حل یک دستگاه معادلات است که تعداد معلومات یا معادلات آن می تواند بیشتر یا

در این شرایط، در یک زمین لایه ای، مؤلفه های عمودی میدان های مغناطیسی اولیه و ثانویه برای یک دستگاه هم صفحه افقی به صورت زیرند (ویت، ۱۹۸۲):

$$H_z^p = -\frac{m}{4\pi r^3} \quad (1)$$

$$H_z^s = \frac{m}{4\pi} \int_0^\infty R_0(\lambda) e^{-\lambda(2h)} J_0(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \quad (2)$$

ضریب بازگشت موج الکترومغناطیسی از یک زمین

$$R_0(\lambda) = \frac{N_0 - Y_1}{N_0 + Y_1} \quad \text{لایه ای}$$

رسانایی ظاهری (admittance) ذاتی برای لایه N<sup>ام</sup>

$$N_i = \frac{u_i}{j\omega\mu_i}$$

رسانایی ظاهری ذاتی برای هوای آزاد

$$N_0 = \frac{u_0}{j\omega\mu_0} = \frac{\lambda}{j\omega\mu_0}$$

$$u_i = (\lambda^2 + \gamma_i^2)^{1/2} \quad \text{ثابت پراکنندگی برای لایه N<sup>ام</sup>}$$

که  $N$  تعداد داده‌ها و  $M$  تعداد پارامترهای مدل و  $T$  نشانه ترانزاده است. ارتباط تابعی بین پارامترهای مدل و داده‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$d_i = F_i(\mathbf{m}) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

که در اینجا  $F$  یک عملگر غیرخطی است که با اعمال آن بر  $\mathbf{m}$  داده‌ها به دست می‌آیند. در اینجا هدف اصلی ما در روش معکوس سازی، به دست آوردن مدلی است که از نظر ژئوفیزیکی قابل تفسیر باشد و بتواند مشاهدات را به طور مناسبی بازسازی کند. این امر با کمینه کردن تابع هدف مدل صورت می‌گیرد درحالی که داده‌ها هم به طور مناسبی برازش شوند (کانستبل و همکاران، ۱۹۸۷ و اُلدنبرگ، ۱۹۹۴). بنابراین مسئله معکوس را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi_m = \|\mathbf{Lm}\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \varphi_d = \|\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{F}(\mathbf{m})\|^2 \end{aligned} \quad (8)$$

که علامت  $\|\cdot\|$  بیانگر اندازه،  $L$  ماتریس وزنی  $M \times M$  مدل (فارکواریسون و اُلدنبرگ، ۱۹۹۳) و  $\mathbf{d}^{obs}$  هم بردار داده‌های مشاهده شده با طول  $N$  هستند. در حقیقت ما باید تابع هدف زیر را کمینه کنیم:

$$\Phi = \|\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{F}(\mathbf{m})\|^2 + \beta^2 \|\mathbf{Lm}\|^2 \quad (9)$$

که در اینجا  $\beta^2$  ضریب لاگرانژ است که تعادلی میان کمینه شدن پارامترهای مدل و اختلاف داده‌های مشاهده شده و به دست آمده برقرار می‌کند. این تابع هدف زمانی کمینه می‌شود که مشتق آن نسبت به پارامترهای مجهول

صفر باشد؛ یعنی  $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{m}} = 0$ . برای مسائل EM هوابرد یا بالگردی، تابع  $\mathbf{F}(\mathbf{m})$  کاملاً غیرخطی است. برای اینکه مسئله را به طور موضعی خطی کنیم،  $\mathbf{F}(\mathbf{m})$  را حول یک بردار پارامتر مدل  $\mathbf{m}^k$  معلوم، بسط تیلور می‌دهیم و فقط مشتق مرتبه اول را نگه می‌داریم و مرتبه‌های دوم و

کمتر از تعداد مجهولات و یا برابر با آن باشد. از طرفی عملگری که بر مجهولات عمل می‌کند که معلومات را بسازد می‌تواند یک عملگر ضمنی (implicit) یا منفصل (explicit) باشد. اگر عملگر منفصل باشد می‌شود آن را از مجهولات جدا کرد و به صورت یک ماتریس جداگانه نشان داد. به چنین دستگاه معادلاتی که با عملگر منفصل ساخته شده باشد دستگاه معادلات خطی گفته می‌شود. اگر عملگر ما ضمنی باشد آن‌گاه امکان جدا کردن آن از مجهولات وجود ندارد و چنین عملگری را غیرخطی می‌نامند. برای حل چنین دستگاه معادلات غیرخطی می‌توان آن را به طور موضعی به صورت خطی درآورد.

در اینجا از روش معکوس سازی اُکام (Occam's inversion) برای حل مسئله معکوس غیرخطی استفاده می‌شود. یک تابع هدف باید طوری کمینه شود که داده‌ها را در منطق کمترین مربعات برازش کند. معکوس سازی اُکام، یک الگوریتم معروف برای مسائل غیرخطی است که کانستبل و همکاران (۱۹۸۷) معرفی کردند. این نام به اُکام، فیلسوف قرن چهاردهم برمی‌گردد که بیان کرد که توضیحات ساده‌تر باید همیشه به توضیحات پیچیده‌تر ترجیح داده شوند. انجام الگوریتم اُکام بسیار راحت است و فقط به مدل پیشرو غیرخطی  $\mathbf{F}(\mathbf{m})$  و ماتریس ژاکوبی (Jacobian) آن نیاز دارد و در عمل به خوبی کار می‌کند. ایده اساسی معکوس سازی غیرخطی اُکام، استفاده تکراری از خطی سازی موضعی است. در زیر چگونگی عملیات معکوس سازی اُکام شرح داده می‌شود.

بردار داده‌های  $\mathbf{d}$  به صورت مجموعه‌ای از داده‌های اندازه‌گیری شده تعریف می‌شود:

$$\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_N]^T \quad (5)$$

و بردار پارامترهای مدل  $\mathbf{m}$  هم به صورت مجموعه‌ای از پارامترهای مجهول تعریف می‌شود:

$$\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_M]^T \quad (6)$$

$$\Phi_{k+1} = \left\| \hat{d}(m^k) - J(m^k) m^{k+1} \right\|^2 + \beta^2 \left\| L m^{k+1} \right\|^2 \quad (14)$$

بنابراین چون  $m^k$  دانسته فرض شده، کمینه شدن  $\Phi_{k+1}$  فقط به  $m^{k+1}$  وابسته است. اگر از  $\Phi_{k+1}$  نسبت به  $m^{k+1}$  مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم به نتیجه زیر برای  $m^{k+1}$  می رسیم:

$$m^{k+1} = [J(m^k)^T J(m^k) + \beta^2 L^T L]^{-1} J(m^k)^T \hat{d}(m^k) \quad (15)$$

بنابراین با داشتن یک مدل آغازگر (starting model) می توانیم به مدل هایی برسیم که برای آنها تفاوت بین داده های مشاهده شده و محاسبه شده کمتر و بازهم کمتر می شود تا به بهترین مدل برسیم. مقدار عدم برازش (misfit) هم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{d_i - F_i}{s_i} \right)^2 \quad (16)$$

که  $s_i$  عدم قطعیت یا انحراف معیار در داده نام است. اگر خطاها (عدم قطعیت در داده ها) به صورت گاوسی و مستقل باشند، مقدار  $\chi^2$  برابر ۱ خواهد بود.

#### ۴ محاسبه ماتریس حساسیت یا ژاکوبی

روش های معکوسی که با خطی کردن توابع غیر خطی صورت می گیرند، به برآورد ماتریس ژاکوبی وابسته اند. این ماتریس ژاکوبی تغییرات در مدل را به تغییرات در داده ها وابسته می کند و بنابراین عامل مهمی در مسئله معکوس است. برای محاسبه، باید مشتق مدل پیشرو را نسبت به پارامترهای مجهول مدل محاسبه کنیم. چون مجهول رسانایی است پس مشتقات را نسبت به این پارامتر محاسبه می کنیم. تنها جمله در مدل پیشرو وابسته به رسانایی  $R_o(\lambda)$  است، پس مشتقات  $R_o(\lambda)$  را نسبت به پارامترهای  $\sigma_l$  محاسبه می کنیم:

بالاتر را حذف می کنیم:

$$F_i(m^k + \Delta m) = F_i(m^k) + J_{ij} \Delta m \quad (10)$$

که  $J_{ij}$  را ماتریس حساسیت (sensitivity) یا ژاکوبی مشتق جزئی نامیده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial m_j} \quad i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial m_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_M}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial F_M}{\partial m_N} \end{bmatrix} \quad (11)$$

پس می توان نوشت:

$$\Delta d_i = F_i(m^k + \Delta m) - F_i(m^k) = J_{ij} \Delta m \quad (12)$$

در اینجا  $\Delta d_i$  بردار اختلاف بین داده های اندازه گیری شده و پاسخ مدل و  $\Delta m$  بردار مجهولی است که باید حل شود و شامل تفاوت های بین مدل به دست آمده جدید و مدل اولیه در شروع محاسبات است. حال  $k$  امین تکرار با بردار پارامترهای مدل  $m^k$  را در نظر بگیرید. بردار پارامترهای مدل جدید به صورت  $m^{k+1} = m^k + \Delta m$  خواهد بود. پس تابع هدف خطی شده ما به صورت زیر درمی آید:

$$\Phi_{k+1} = \left\| d^{obs} - F(m^k) - J(m^k) \Delta m \right\|^2 + \beta^2 \left\| L(m^k + \Delta m) \right\|^2 \quad (13)$$

حال اگر قرار دهیم تابع هدف ما این گونه خواهد شد:

$$\hat{d}(m^k) = d^{obs} - F(m^k) + J(m^k) m^k$$

و لایه آخر یک نیم‌فضا در نظر گرفته شده است. مقدار ارتفاع برابر ۳۰ متر و مقدار  $Z$  برابر ۸ متر انتخاب شده‌اند که مقادیر معمولی برای برداشته‌های الکترومغناطیسی هواپرد حوزه بسامد هستند. در اینجا از فرمول‌بندی هم‌صفحه افقی استفاده شده و تعداد بسامدها هم ۵ است (۰/۴، ۱/۵، ۱۰، ۵۶ و ۳۰۰ کیلو هرتز). به این خاطر که هر یک از بسامدها عمق به‌خصوصی را مورد کاوش قرار می‌دهند، از محدوده بسامدی بزرگ استفاده شده است که تا عمق مورد نظر نفوذ داشته باشیم. در همه مدل‌ها، مدل آغازگر، نیم‌فضایی با رسانایی ۰/۰۰۱ موهو بر متر است. بیشینه تعداد تکرارها هم برابر ۱۰ انتخاب شده است.

در شکل ۳-الف مدلی دولایه انتخاب شده که لایه اول رسانایی ۰/۰۱ موهو بر متر دارد و لایه دوم هم نیم‌فضایی با رسانایی ۰/۰۵ موهو بر متر است. همان‌طور که دیده می‌شود، لایه اول بسیار خوب بازسازی شده، لایه دوم هم به‌خوبی تشخیص داده شده و رسانایی به دست آمده نزدیک به واقعیت است. مقدار عدم برازش به دست آمده برای این مدل، ۱/۲۷۲۱ است. شکل ۳-ب نیز مدلی دولایه است که این بار لایه اول، با رسانایی ۰/۰۵ موهو بر متر، رساناتر از لایه دوم و یک نیم‌فضای ۰/۰۱ موهو بر متری است. با وجود اینکه مدل ما دارای نوسان‌هایی در لایه اول است اما مقدار این نوسان‌ها زیاد نیست و می‌توان گفت که رسانایی لایه اول به‌خوبی به دست آمده است. در مورد لایه دوم، هرچند وجود این لایه و داشتن مقدار رسانایی کم تشخیص داده شده اما رسانایی کمتری برای آن برآورد شده است. مقدار عدم برازش هم ۱/۳۹ است. شکل ۴ مدل‌های سه‌لایه را نشان می‌دهد. در شکل ۴-الف لایه وسطی رساناتر است ولی در شکل ۴-ب لایه وسطی رسانایی کمتری دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود مدل‌های به‌دست آمده از معکوس‌سازی به مدل ما بسیار نزدیک است. مقادیر عدم برازش هم برای شکل‌های (۴-الف) و (۴-ب) به ترتیب ۱/۲۵۷ و ۱/۴۳ است.

$$\frac{\partial R_0(\lambda)}{\partial \sigma_l} = \frac{\frac{-\partial Y_1}{\partial \sigma_l}(N_0 + Y_1) - \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_l}(N_0 - Y_1)}{(N_0 + Y_1)^2} = \frac{-2N_0}{(N_0 + Y_1)^2} \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_l} \quad (17)$$

که  $\sigma_l$  رسانایی در لایه  $l$ ام است. همچنین می‌توان با استفاده از قاعده مشتقات زنجیری و با استفاده از روابط (۳) نوشت:

$$\frac{\partial Y_l}{\partial \sigma_l} = \frac{\partial Y_1}{\partial Y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial Y_3} \dots \frac{\partial Y_{l-1}}{\partial Y_l} \frac{\partial Y_l}{\partial \sigma_l} \quad (18)$$

و با استفاده از رابطه بازگشتی  $Y_l = N_l \frac{Y_{l+1} + N_l \tanh(u_l h_l)}{N_l + Y_{l+1} \tanh(u_l h_l)}$  می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial Y_l}{\partial Y_{l+1}} = \frac{N_l^2 [1 - \tanh^2(u_l h_l)]}{[N_l + Y_{l+1} \tanh(u_l h_l)]^2} \quad (19)$$

و مشتق  $Y_l$  نسبت به پارامتر  $\sigma_l$  در لایه  $l$ ام را هم می‌توان محاسبه کرد. در نهایت با جایگزین کردن روابط به دست آمده،  $\frac{\partial R_0(\lambda)}{\partial \sigma_l}$  را محاسبه می‌کنیم.

## ۵ بررسی درستی محاسبات

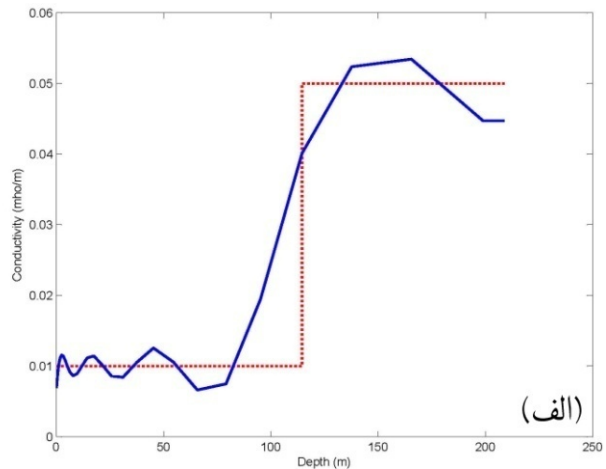
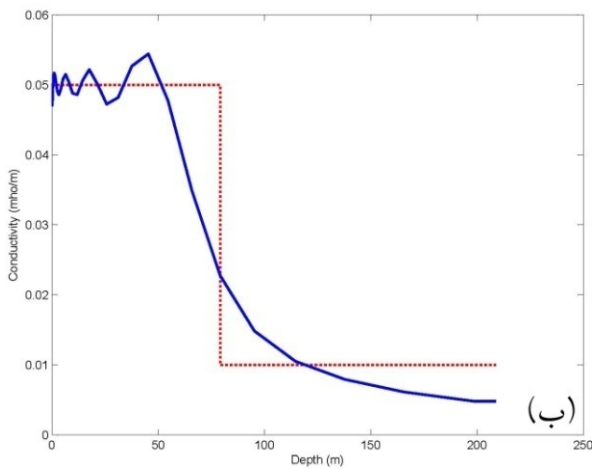
در این بخش برای بررسی کارایی روش معکوس‌سازی آکام، آن را روی داده‌های حاصل از مدل‌های مصنوعی متفاوت اعمال می‌کنیم و نتیجه را توضیح می‌دهیم. برای این کار مدلی در نظر می‌گیریم و پاسخ الکترومغناطیسی آن را محاسبه می‌کنیم. سپس به این داده‌ها یک نوفه تصادفی گاوسی با میانگین صفر و واریانس ۰/۱ اضافه می‌کنیم.

مدلی که با استفاده از آن عمل معکوس‌سازی صورت می‌گیرد یک مدل ۳۰ لایه تا عمق ۲۰۰ متری است که ضخامت لایه‌ها با افزایش عمق به‌طور نمایی اضافه می‌شود

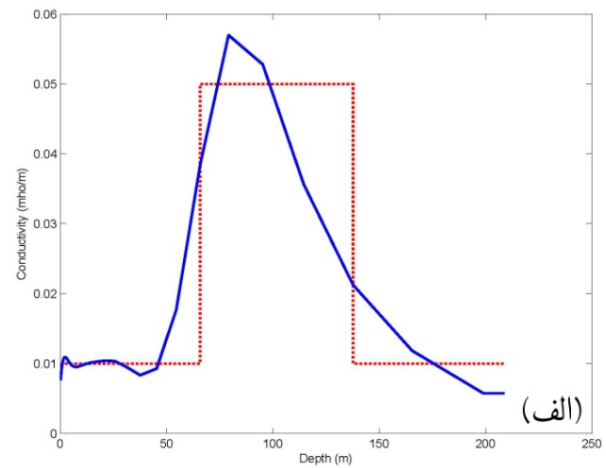
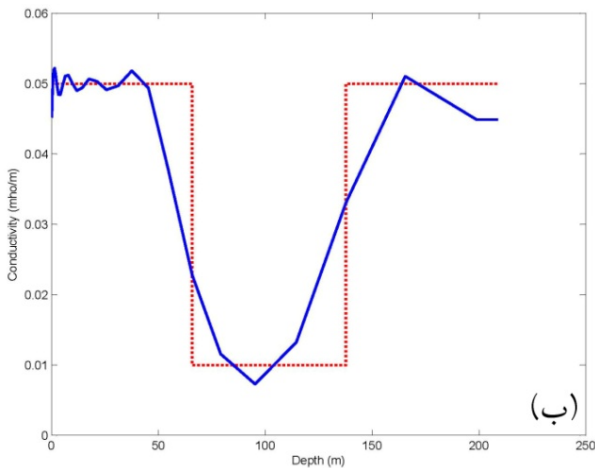


مدل های بازسازی شده برآورد بسیار خوبی از مدل های ما هستند. با صرف نظر از نوسان هایی که در لایه اول داریم می توان گفت که مدل به دست آمده از معکوس سازی، نه فقط وجود لایه ها با رسانایی های متفاوت را تشخیص داده، بلکه مقدار رسانایی هر لایه و محل آن را هم به خوبی برآورد کرده است. مقادیر عدم برازش هم برای شکل های ۵-الف و ۵-ب به ترتیب ۱/۳۸ و ۱/۱۶ است.

حال مدل خود را پیچیده تر می کنیم. یک مدل پنج لایه در نظر می گیریم که رسانایی لایه ها به ترتیب کم و زیاد می شود. در شکل ۵-الف رسانایی لایه های اول، سوم و پنجم، که یک نیم فضا است، ۰/۰۵ موهو بر متر و رسانایی لایه های دوم و چهارم ۰/۰۱ موهو بر متر است. رسانایی در شکل ۵-ب برعکس شکل ۵-الف است. همچنان که از این شکل ها پیدا است،



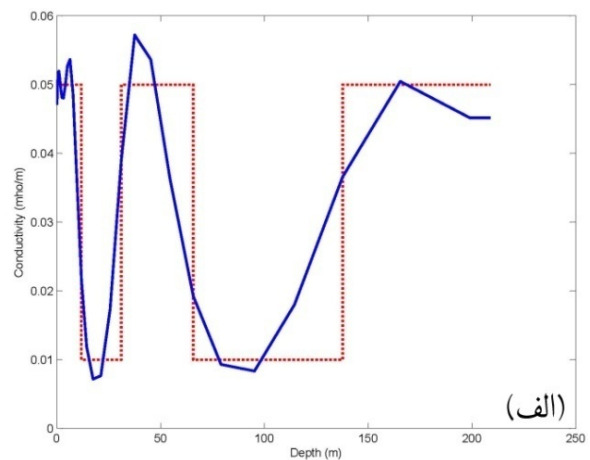
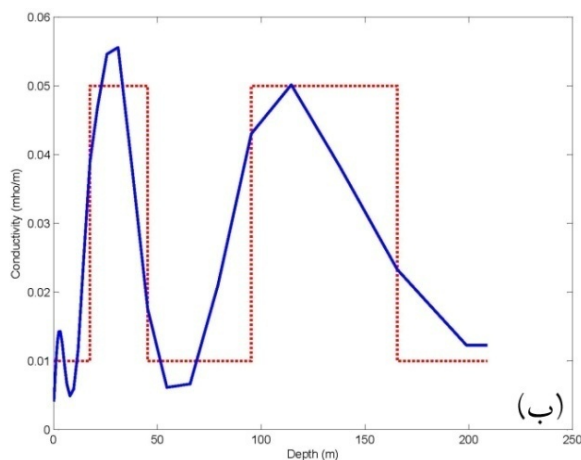
شکل ۳. نتایج معکوس سازی برای یک مدل دو لایه. در (الف) لایه اول و در (ب) لایه دوم رساناتر است. نقطه چین مدل اولیه و خط توپر نتیجه حاصل از معکوس سازی را نشان می دهد.



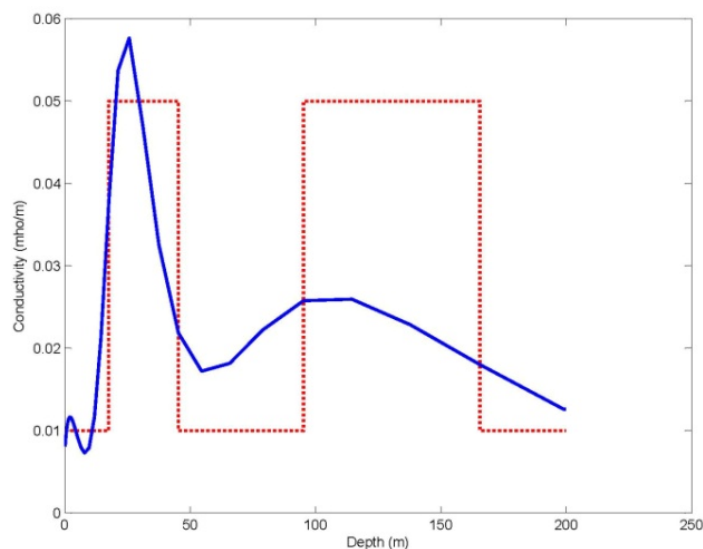
شکل ۴. نتایج معکوس سازی برای یک مدل سه لایه. در (الف) لایه وسط مقاوم تر و در (ب) لایه وسط رساناتر است. نقطه چین مدل اولیه و خط توپر مدل بازسازی شده حاصل از معکوس سازی را نشان می دهد.

بسامدهای مورد استفاده است. مقدار عدم برازش برابر با  $1/85$ ، نشان می‌دهد که داده‌های حاصل از این مدل به خوبی برازش شده‌اند اما اینکه چرا مدل به خوبی بازسازی نشده است به عمق نفوذ امواج الکترومغناطیسی در این مدل بر می‌گردد. در حقیقت می‌توان گفت که این بسامدها نتوانسته‌اند به خوبی عمق بیشتر را مورد کاوش قرار دهند.

شکل ۶، شکلی با مدل شکل ۵-ب است اما مدل به دست آمده از معکوس‌سازی مدلی است که با استفاده از داده‌های سه بسامد  $0.4/10$  و  $56$  کیلوهرتز به دست آمده است. در مقایسه با شکل ۵-ب، مشاهده می‌کنیم که وجود پنج لایه مشخص شده، اما فقط رسانایی لایه‌های اول و دوم نزدیک به واقعیت برآورد شده است. دلیل این برآورد نادرست رسانایی‌ها، به‌طور واضح، تعداد



شکل ۵. نتایج معکوس‌سازی برای یک مدل پنج‌لایه. در (الف) لایه‌های اول، سوم و پنجم اما در (ب) لایه‌های دوم و چهارم رساناتر هستند. نقطه‌چین مدل اولیه و خط توپُر مدل بازسازی شده حاصل از معکوس‌سازی را نشان می‌دهد.



شکل ۶. مدل اولیه مشابه شکل (۵-ب) است که نتایج حاصل از معکوس‌سازی با داده‌های حاصل از سه بسامد به دست آمده‌اند. نقطه‌چین مدل اولیه و خط توپُر مدل بازسازی شده حاصل از معکوس‌سازی را نشان می‌دهند.

داشتن اطلاعات الکترومغناطیسی کمتر در عمق‌های بیشتر است. اما در سطح، نتایج حاصل از معکوس‌سازی‌ها به واقعیت نزدیک هستند.

در مسائل معکوس، بهتر است که یک مدل اولیه داشته باشیم که پاسخ ما در نهایت به آن نزدیک شود. اما در اینجا بدون اینکه یک مدل اولیه داشته باشیم (یعنی اطلاعات قبلی از ضخامت لایه‌ها یا رسانایی در عمق‌های متفاوت) توانسته‌ایم ساختار رسانایی را به‌خوبی برآورد کنیم. کسب این مهم با افزایش دادن تعداد لایه‌ها صورت گرفته است؛ با این‌حال درجه کم تعیین‌شدگی و زمان اجرای برنامه بیشتر شده است. از طرف دیگر نتایج به‌دست آمده به مدل آغازگر بستگی ندارند، یعنی شروع فرایند تکراری با هرچیز که باشد نتیجه یکسانی به‌دست می‌دهد و این از مزایای روش اُکام است.

#### منابع

- Constable, S. C., Parker, R. L. and Constable, C. G., 1987, Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data, *Geophysics*, **52**, 289-300.
- Farquharson, C. G., Oldenburg, D. W. and Routh, P. S., 2003, Simultaneous 1D inversion of loop-loop electromagnetic data for magnetic susceptibility and electrical conductivity, *Geophysics*, **68**, 1857-1869.
- Farquharson, C. G. and Oldenburg, D. W., 1993, Inversion of time domain electromagnetic data for a horizontally layered earth, *Geophys. J. Internat.*, **114**, 433-442.
- Fraser, D. C., 1978, Resistivity mapping with an airborne multicoil electromagnetic system, *Geophysics*, **43**, 144-172.
- Frischknecht, F. C., 1967, Fields about an oscillating magnetic dipole over a two-layer earth and application to ground and airborne electromagnetic surveys, *Quarterly of the Colorado School of Mines*, **62**, No. 1.
- Fullagar, P. K. and Oldenburg, D. W., 1984, Inversion of horizontal loop electromagnetic frequency sounding, *Geophysics*, **49**, 150-164.
- Glenn, W. E., Ryu, J., Ward, S. H., Peeples, W. J. and Phillips, R. J., 1973, The inversion of

#### ۶ بحث و نتیجه‌گیری

به‌طور کلی روش اُکام به دلیل اینکه مربع اختلاف داده‌های به‌دست آمده و مربع نُرم مدل را کمینه می‌کند، قادر به بازسازی مرز شکستگی‌ها نیست؛ به این معنی که حتی اگر تعداد تکرارها بسیار زیاد و تعداد داده‌ها هم به اندازه کافی زیاد باشد، هیچ‌گاه این مرزها بازسازی نخواهند شد. از طرفی در این مقاله، تعداد داده‌ها بسیار کمتر از تعداد پارامترهای مدل است. بنابراین علاوه بر اینکه مرز شکستگی‌ها خوب مشخص نمی‌شود، تعداد جواب‌های زیادی هم به دست می‌آید، یعنی با مسئله یکتا نبودن پاسخ روبه‌رو هستیم. اما در اینجا سعی کرده‌ایم با استفاده از کمینه کردن هم‌زمان اختلاف داده‌ها و نیز ساختار مدل، تا حد زیادی مسئله یکتا نبودن جواب را حل کنیم. همه شکل‌های به‌دست آمده نشان می‌دهد که پارامترهای به دست آمده به ساختار واقعی بسیار نزدیک‌اند، و این نشان می‌دهد که روش اُکام بسیار خوب عمل می‌کند.

مسئله دیگر این است که روش‌های الکترومغناطیسی به وجود رسانا حساس هستند و معمولاً در پیدا کردن لایه‌های با رسانایی کمتر در زیر لایه‌های با رسانایی بیشتر دچار مشکل می‌شوند. اما در اینجا دیده شد که چنین لایه‌هایی هم به‌خوبی تعیین محل شده‌اند و مقدار رسانایی آنها هم برآورد شده است. نتایج به‌دست آمده از روش اُکام نشان می‌دهد که این روش حتی برای مدل‌های پیچیده مثل شکل ۵، که یک توالی از لایه‌های رسانا و مقاوم را نشان می‌دهد، به‌خوبی کار می‌کند و پاسخ‌های نزدیک به واقعیت به‌دست می‌دهد.

مقایسه شکل‌های ۵-ب و ۶ هم نتیجه دیگری را به‌دست می‌دهد. در شکل ۵-ب تعداد بسامدها پنج و در شکل (۶)، سه است. اختلاف نتیجه به‌دست آمده به دو عامل بستگی دارد. اول اینکه درجه کم تعیین‌شدگی دستگاه معادلات ما با سه بسامد نسبت به پنج بسامد بیشتر شده است و دوم اینکه وجود تعداد بسامد کمتر به‌معنی

- vertical magnetic dipole sounding data, *Geophysics*, **38**, 1109–1129.
- Huang, H. and Fraser, D. C., 2001, Mapping of the resistivity, susceptibility, and permittivity of the earth using a helicopter-borne electromagnetic system, *Geophysics*, **66**, 148–157.
- Huang, H. and Fraser, D. C., 2003, Inversion of helicopter electromagnetic data to a magnetic conductive layered earth, *Geophysics*, **68**(4), 1211-1223.
- Oldenburg, D. W., 1994, Practical strategies for the solution of large scale electromagnetic inverse problems, *Radio Science*, **26**, 1081–1099.
- Wait, J. R., 1951, The magnetic dipole over the horizontally stratified earth, *Canadian Journal of Physics*, **29**, 577-592.
- Wait, J. R., 1982, *Geo-Electromagnetism*, Academic press.
- Ward, S. H., 1967, Electromagnetic theory for geophysical applications, in Ward, S. H., Ed., *Mining geophysics, 2, Theory*, Soc. Expl. Geophys., 13–196.
- Zhang, Z., Routh, P. S., Oldenburg, D. W., Alumbaugh, D. L. and Newman, G. A., 2000, Reconstruction of 1-D conductivity from dual-loop EM data, *Geophysics*, **65**(2), 492–501.