

مقایسه دو مدل برای تعیین توزیع دما در خاک

دکتر منصور بهروزی لار

دانشیار مکانیک ماشینهای کشاورزی دانشگاه تهران و

رئیس انجمن مهندسين ماشینهای کشاورزی و مکانیزاسیون ایران

اثر دما در خاک بخصوص در منطقه ریشه، در رشد گیاه پر واضح است. تبخیر رطوبت در سطوح بالا تحت تأثیر مستقیم دما قرار دارد و اثر آن در رویش گیاهان بخصوص در مناطق دیم کاری و کم آب شدید است. لذا پیش‌بینی دمای خاک در اعماق مختلف بسیار مهم است.

پیش‌بینی توزیع دما در خاک که محیطی ناهمگن است، هوا و آب در آن در جریان است، و ضرایب هدایت گرمایی و ظرفیت گرمایی آن تغییر می‌کند موضوعی بس دشوار است. تاکنون هیچ فرمول ریاضی برای آن ارائه نشده است. دو مدل ریاضی و شبیه‌سازی به هر حال توسط نگارنده ابداع شده‌اند. در مقایسه با ارقام آزمایشگاهی مدل شبیه‌سازی نتیجه مطلوب‌تری را ارائه داده است. مقایسه‌ای بین پیش‌گویی حاصل از هر یک از مدلها به عمل آمده است.

چکیده

دما در مقاطع مختلف خاک تا اعماق ۱۵۰ - ۲۰۰ میلیمتری و بخصوص در منطقه ریشه اثرات مهمی را در پی می‌آورد. رشد ریشه، جذب مواد غذایی و جوانه زدن بستگی به دما دارد. کشاورزان این موضوع را به تجربه دریافته‌اند لذا تاریخ کشت تقریبی محصولات مختلف را معلوم داشته‌اند ولی زمان دقیق، نیاز به پیش‌گویی علمی دما در هر سال و برحسب شرایط جوی آن دارد. دما و رطوبت خاک اثر متقابل بر یکدیگر دارند؛ پس برای تعیین مقدار رطوبت موجود و در دسترس باید دما را بدانیم. مقدار رطوبت، هم بر هدایت و ظرفیت گرمایی خاک تأثیر می‌گذارد و هم بر وزن مخصوص ظاهری خاک؛ وزن مخصوص خاک نیز بر پدیده تخلخل و فشردگی دخالت دارد که این به نوبه خود در رشد گیاه مؤثر است.

خاک اگر به سبب محتوای رطوبت و وزن مخصوص این چنین ناهمگن نبود، اگر تابش خورشید بر سطح خاک در روز و در تمام فصل رویش یک اندازه بود یا اگر فقط حالت پایای توزیع دما کفایت می‌کرد، می‌توانستیم به راحتی از فرمولهای حاکم بر انتشار دما در اجسام جامد استفاده کنیم ولی چنین نیست. لذا برای دریافت یک مدل ریاضی باید از روش تحلیلی اختلافات جزئی (Finite Difference Analytical Method) استفاده کرد. چنین مدلی گرچه قابل حصول است ولی اعمال آن نیاز به محاسبات طولانی سری ریاضی دارد که گاه با پدیده تشدید همراه خواهد بود. روش دیگر برای حل چنین مدل‌های فیزیکی ناهمگن و پیچیده استفاده از تشابه الکتریکی و کاربرد کامپیوتر (Electronic System Analogies Programming) است. هر یک از این روشها در این مقاله تشریح شده است.

۱ - مدل ریاضی توزیع دما

لایه‌ای از خاک به ضخامت Δx و عمق x را در نظر می‌گیریم. تابش خورشید سبب بالا رفتن دما در سطح خاک شده و اختلافاتی با دما در ته خاک به وجود می‌آورد. این اختلافات دما به هدایت گرمایی منتهی می‌شود. اگر دما در سطح لایه را به $T(x,t)$ نشان دهیم از آن‌ته لایه $T(x+\Delta x,t)$ خواهد بود (ش ۱). T تابع دما و t زمان است. مقدار

گرمای هدایت شده رابطه مستقیم با ضریب هدایت گرمایی جسم و اختلاف دما در سر و ته و رابطه معکوس با طول مسیر (Δx) دارد پس،

$$Q_t = -KA \frac{T(x+\Delta x,t) - T(x,t)}{\Delta x} \quad (1)$$

که در آن: Q_t = گرمای هدایت شده به cal/sec

$$q_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} Q_t = -KA T_x(x,t) \quad (2)$$

که در آن $T_x(x,t)$ به معنی مشتق $T(x,t)$ نسبت به x است؛ ولی همه گرمای ورودی خارج نمی شود بلکه مقداری از آن جذب می شود. این گرمای جذب شده است که به تغییر دما در خاک منجر می شود. مقدار گرمای جذب شده برابر تفاضل گرمای ورودی و خروجی است (ش ۱). از تساوی این دو کمیت موقعی که $\Delta x \rightarrow 0$ فرمول هدایت حرارتی در حالت یک بعدی و غیردائمی (۳) حاصل می شود.

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < b, t > 0 \quad (3)$$

K = ضریب هدایت گرمایی به $\text{cal/mm}^\circ\text{C sec}$

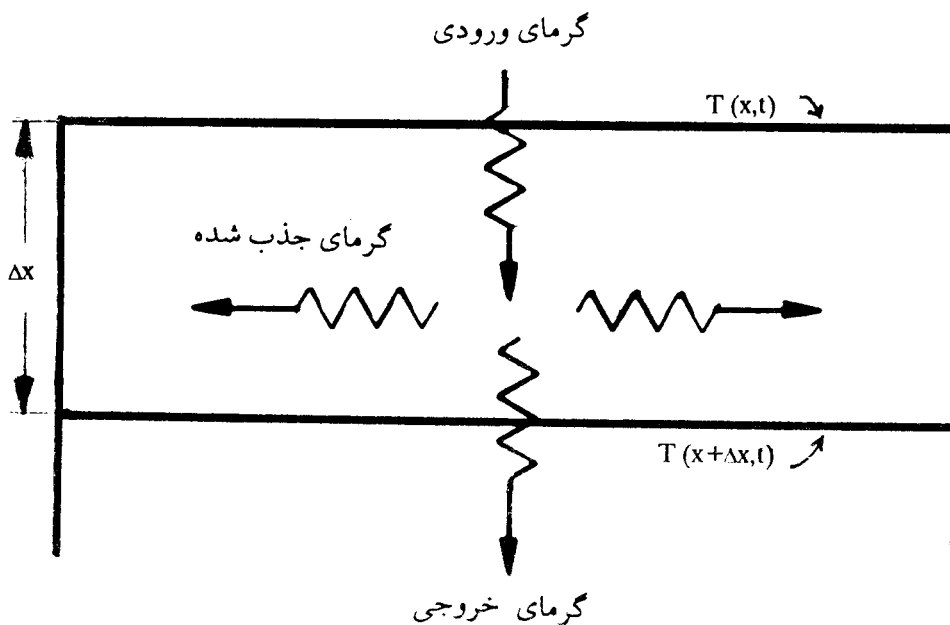
A = مساحت رویه خاک به mm^2

$T(x + \Delta x, t)$ = دما در سطح خاک به $^\circ\text{C}$

$T(x, t)$ = دما در ته لایه به $^\circ\text{C}$

Δx = ضخامت لایه به mm

k را فقط می توان برای ضخامت بسیار کوچکی ثابت فرض کرد زیرا محتوای رطوبت مختلف اعماق خاک در آن تأثیر می گذارد پس فرمول فوق فقط برای $\Delta x \rightarrow 0$ صادق است و



شکل ۱ - نمایش پدیده فیزیکی انتشار گرما در یک لایه

سه شرط اولیه داشته باشیم. این سه می توانند دما در سطح خاک، در ته خاک و در لحظه معینی مثلاً $t = 0$ باشند. دما در سطح خاک تابعی از زمان است؛ از آن ته خاک نیز؛ ولی شاید در عمق 150 میلیمتری بتوان آن را به تقریب، ثابت و برابر T_b فرض کرد. دما در سطح خاک را که ممکن است نیم سینوسی فرض کرد و منحنی تابش نیم سینوسی خورشید را تبعیت می کند به $Q(b)$ می نمایانیم. در لحظه $f(x), 0$ بستگی به عمق خاک دارد. پس

k را پخشندگی گرمایی خوانند و رابطه ۳ به فرمول گرمایی فوریه (Fourier) معروف است. ضریب k بستگی به وزن مخصوص و ضریب گرمایی خاک دارد و این هر دو، وابسته به رطوبت خاک. مقدار آن از جدولی به دست می آید که به تجربه از محتوای رطوبتهای متفاوت به دست آمده اند.

حل معادله ۳ الگوی توزیع دمای یک بعدی در اعماق خاک را می دهد ولی این کار ممکن نیست مگر اینکه

$$u(x,t) = S(t) X(x)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = S'(t) X(x)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = S(t) X''(x)$$

$$S'(t) X(x) = S(t) X''(x)$$

$$\frac{S'(t)}{kS(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (5)$$

تساوی دو تابع مختلف (۵) زمانی امکان پذیر است که هر دو برابر یک عدد ثابت باشند. این دو عدد را به $-\lambda$ نشان می‌دهیم.

$$\frac{S'(t)}{kS(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (6)$$

$$S'(t) + \lambda kS(t) = 0 \quad (7)$$

تابعی که رابطه (۶) برای آن صدق کند باید به شکل سینوسی و از آن (۷) به صورت نمایی باشد،

$$X(x) = A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x \quad (8)$$

$$S(t) = c e^{-\lambda kt} \quad (9)$$

با ارضای دو شرط اولیه برای دستور (۸)

$$X(0) = 0 + B = 0 \implies B = 0$$

$$X(b) = A \sin b\sqrt{\lambda} = 0$$

$$b\sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$S(t) = c e^{-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 kt}$$

$$u(x,t) = A c e^{-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
 پس

ضریب Ac ممکن است برای مقادیر $n = 1, 2, 3, \dots$ متفاوت

$$T(0,t) = \phi(t), \quad T(b,t) = T_b, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

$$T(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq b$$

حل معادله دیفرانسیل (۱) تحت شرایط اولیه (۴) هنوز مشکل است چون دما در سطح خاک تابعی از زمان است. اگر مقطعی عمل شود، می‌توان این دما را ثابت و مثلاً T_0 گرفت ولی حتی در این صورت هم باید تغییر تابعی انجام دهیم تا دماهای سطح و ته خاک صفر شوند. لذا تابعی چون $g(x)$ را با رابطه زیر فرض می‌کنیم که بدون ایجاد تغییر در معادله دیفرانسیل منظور ما را برآورده سازد این تابع مسلماً باید نسبت به x از درجه ۱ باشد تا در دوبار مشتق‌گیری از آن برحسب x صفر شود.

$$g(x) = C_1 x + C_2$$

$$g(b) = T_b \text{ و } g(0) = T_0$$

$$g(0) = C_2 = T_0$$

طوری که

$$g(b) = C_1 b + T_0 = T_b$$

$$g(x) = T_0 + \frac{T_b - T_0}{b} x$$

حالا با تغییر تابع $u(x,t) = T(x,t) - g(x)$ به روابط زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < b, \quad t > 0$$

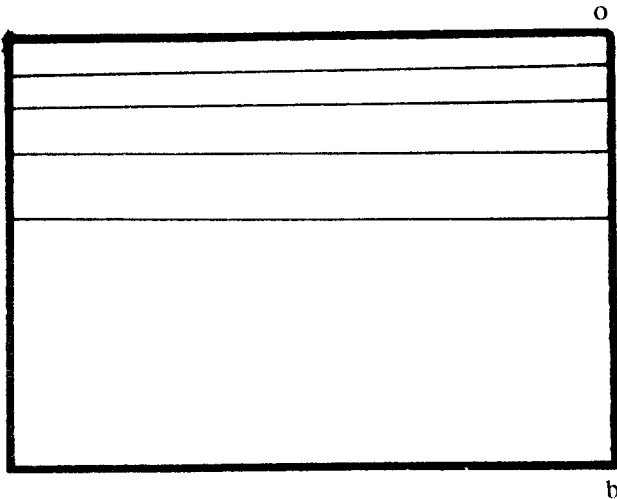
$$u(0,t) = 0, \quad u(b,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) - g(x), \quad 0 \leq x \leq b$$

ملاحظه می‌شود که تغییر تابع مذکور، هیچ اثری در معادله دیفرانسیل ندارد ولی دو شرط اولیه مکانی روابط (۴) یعنی $T(0,t)$ و $T(b,t)$ را صفر کرده است ($u(0,t) = 0, u(b,t) = 0$) این تغییر تابع سبب سهولت عملیات در حصول ضرایب ثابت B و λ خواهد شد که بعداً آمده است.

تابع $u(x,t)$ باید حاصل ضرب دو تابع $S(t), X(x)$ باشد.

زمان معین بتوان ثابت فرض کرد. پس لایه خاک ۱۵۰ میلیمتری را باید به ضخامت‌های نازک تقسیم‌بندی کرد (ش ۲). ضخامت این لایه‌ها لازم نیست یک اندازه باشد ولی هرچه کوچکتر باشد جواب دقیق‌تر است. رابطه ۱۰ سپس برای اولین لایه و برای زمان $t = a$ ثانیه حل می‌شود. شرایط حاصل در ته این لایه، را باید به عنوان شرایط اولیه در لایه دوم به کاربرد و مقدار مناسب ضریب k را برای این لایه محسوب داشت. این ضریب را فقط تجربی و آن هم تقریبی می‌توان داشت. این محاسبات برای تمام لایه‌ها باید انجام گیرد. سپس تمام عملیات بالا را برای زمان دیگر مثلاً $t = a+1$ ثانیه و زمانهای دیگر تکرار می‌کنیم. گرمای خروجی از لایه بالایی را ورودی لایه پایینی



شکل ۲ - لایه b میلیمتری را به لایه‌های نازکتر تقسیم می‌کنیم.

می‌گیریم. دقت محاسبات همچنین بستگی به تعداد جملاتی از رابطه (۱۰) دارد که با هم جمع می‌شود و عملیات ریاضی زیادی باید انجام گیرد که جز با کامپیوتر اگر ناممکن نباشد مسلماً وقت‌گیر است.

۲ - شبیه‌سازی کامپیوتری

تشابه بارزی بین سیستم الکتریکی با گرمایی، مکانیکی و هیدرولیکی وجود دارد. این تشابه به پیدایش

باشد. برای نشان دادن این وابستگی، آن را به C_n نمایش می‌دهیم.

$$u(x,t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{b}, n = 1, 2, 3 \dots$$

در شرایط معین ریاضی مربوط به همگرایی سریها، مجموع جمله‌های بالا نیز حل معادله است.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{b}$$

برای ارضای شرط سوم شرایط اولیه

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{b} = f(x) - g(x)$$

ولی این دستور در صورتی قابل حل است که طرف راست آن نیز از شکل سینوسی باشد. رابطه سینوسی فوریه، چنین خواهد داد،

$$C_n = \frac{2}{b} \int_0^b [f(x) - g(x)] \sin \frac{n\pi x}{b} dx$$

لذا فرمول نهایی توزیع دما در یک لایه خاک،

$$u(x,t) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^b [f(x) - g(x)] \sin \frac{n\pi x}{b} dx \right\} e^{-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{b} \quad (10)$$

در حصول این فرمول ضریب K را ثابت فرض کرده‌ایم ولی این فرضی است که کمتر با واقعیت تطبیق می‌کند. یادآوری می‌شود که

$$k = \frac{K}{c \Delta x}$$

بود. هم ضریب هدایت گرمایی K به محتوای رطوبت خاک و خلل و فرج آن یعنی وزن مخصوص وابسته است و هم گرمای ویژه c . وزن مخصوص f نیز به رطوبت و خلل فرج بستگی دارد. محتوای رطوبت از طرفی بستگی به دما و نقل و انتقالات در اثر نیروی ثقل، تبخیر و یا کشش سطحی در لوله موئین دارد. لذا این ضریب را شاید فقط برای یک لایه نازک، در یک رطوبت مشخص و در یک

$$I_{C1} = \frac{dv_2}{dR} - \frac{dv_1}{dR} = \frac{d^2v}{dR^2} \quad (12)$$

$$v = \frac{1}{C_1} \int I_{C1} dt \quad (13)$$

$$I_{C1} = C_1 \frac{dv}{dt}$$

دستورهای (۱۲) و (۱۳) برابرند پس،

$$\frac{\partial v(R,t)}{\partial t} = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 v(R,t)}{\partial R^2} \quad (14)$$

ملاحظه می شود که با فرض $\frac{1}{C} = k$ دستور (۱۴) درست شبیه دستور (۳) است و لذا نتایج مشابهی به بار خواهند آورد. با حل معادله (۱۴) و سپس برگردان کردن آن می توان به توزیع دما در خاک رسید. شرایط اولیه مشابه (۴) لازم برای حل دستور (۱۴) به شرح زیرند:

$$v(0,t) = v(t), v(b,t) = V_0, t > 0 \quad (15)$$

$$v(R,0) = v(R)$$

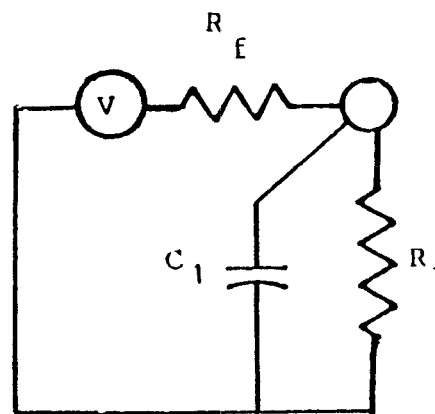
حال ممکن است پرسیده شود که چه تفاوتی بین حل دستورهای (۳) و (۴) از یک سو و (۱۴) و (۱۵) از سوی دیگر وجود دارد چون ظاهراً حل دستورهای اخیر نیز همان اندازه دشوار است. این شک درست است ولی دو تفاوت وجود دارد یکی اینکه حل دستورهای (۱۴) و (۱۵) کاملاً با کامپیوتر قیاسی امکان پذیر است فقط کافی است مقادیر C, R, V مشابه را محاسبه کرد و دیگر آنکه برنامه های کامپیوتری از پیش نوشته شده

Electronic Circuit Analogies Programming (ECAP)

Princeton Circuit Analogies Programming (PCAP)

وجود دارند که فقط ارقام C, R, V را طلب می کند تا فوراً جواب را تحویل دهند. در این حالت نیازی به حل معادله (۱۴) نیست زیرا برنامه مذکور این کار را انجام می دهد فقط کافی است مقادیر مشابه ضرایب را تعیین کنیم.

علم شبیه سازی (Simulation) انجامیده است. سیستم فیزیکی حرارتی مورد بحث را از جنبه الکتریکی بازنگاری می کنیم. از گرمای ورودی به هر لایه، قسمتی جذب آن لایه می شود که موجب بالا رفتن دما است و بقیه به خارج منبع ولتاژ، مقاومت و خازن طبق شکل ۲ نیز همین کار را می کند جریان خروجی مقاومت R_f به گره ۱ یعنی سطح لایه می رسد. قسمتی از این جریان به وسیله مقاومت R_1 به لایه بعدی هدایت می شود ولی بقیه آن در خازن C_1 ذخیره شده ولتاژ گره ۱ را بالا می برد. سطح ولتاژ گره ۱ بستگی به مقدار مقاومت R_1 دارد و زمان لازم برای رسیدن به این ولتاژ با ظرفیت خازن تعیین می شود. R_1 مشابه عکس ضریب هدایت گرمایی و C_1 گرمای ویژه است که هر کدام باید نسبت به ابعاد لایه، محاسبه شوند. فعل و انفعالات در گره ۱ از قانون دوم کیرشرف و قانون اهم مشخص است.



شکل ۳ - مدار RC

طبق قانون اهم

$$I_{R1} = \frac{v_1 - v_2}{R} = \frac{(v_2 + \Delta v) - v_2}{\Delta R} = \frac{dv}{dR} \quad (11)$$

مقدار الکتریسیته ذخیره شده، با افت ولتاژ دوسریا تفاضل جریان ورودی به لایه و خروجی از آن متناسب است پس،

$$C = C_F (cf) H$$

(۱۷)

به دست می آیند که در آنها
 $b =$ طول مسیر هدایت گرما
 $A =$ سطح ورود گرما
 $K =$ ضریب هدایت گرمایی
 $C_F =$ مقیاس اختیاری برای خازن
 $C =$ گرمای ویژه خاک
 $f =$ وزن مخصوص خاک
 $H =$ حجم خاک

برای محاسبه ضرایب تشابه، ابتدا مقیاسی برای ولتاژ یا شدت جریان و سپس برای مقاومت و تقریباً دلخواه اختیار می کنیم. به عنوان مثال

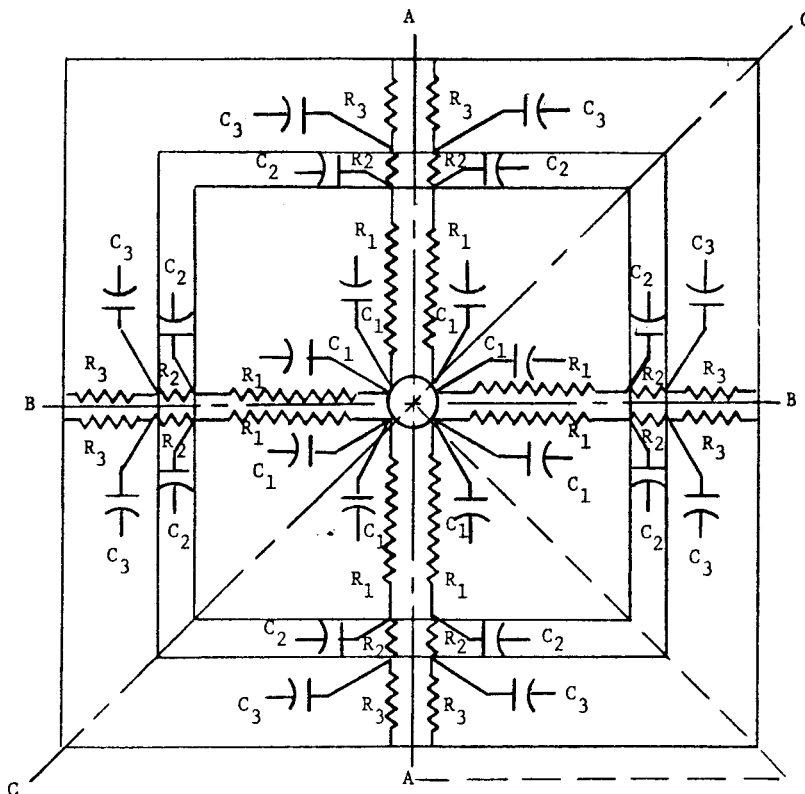
$$\frac{v}{T} = v_F, \frac{R}{k} = R_F$$

$$I_F = \frac{v_F}{R_F}$$

مقادیر مقاومت مشابه ضریب هدایت گرمایی آن گاه از دستورهای

$$R = R_F \frac{b}{AK} \quad (۱۶)$$

شکل ۴ مدار شبیه سازی سطح خاک را نشان می دهد.



شکل ۴ - مدار شبیه سازی سطح خاک

نتایج

سطح خاک و یا عمق ۵ میلیمتری سریع خشک می شوند لذا منحنیهای پیش بینی شده از مدل ریاضی و شبیه سازی خیلی به مقادیر اندازه گیری شده نزدیک اند. در اعماق بیشتر ۲۵ و ۱۵۰ میلیمتری به دلیل دخالت بیشتر

تصاویر ۵-۷ منحنیهای دمای حاصل در اعماق ۵، ۲۵ و ۱۵۰ میلیمتری خاک را بترتیب از اندازه گیریهای آزمایشگاهی، پیش بینی مدل ریاضی و پیش بینی مدل شبیه سازی نشان می دهند.

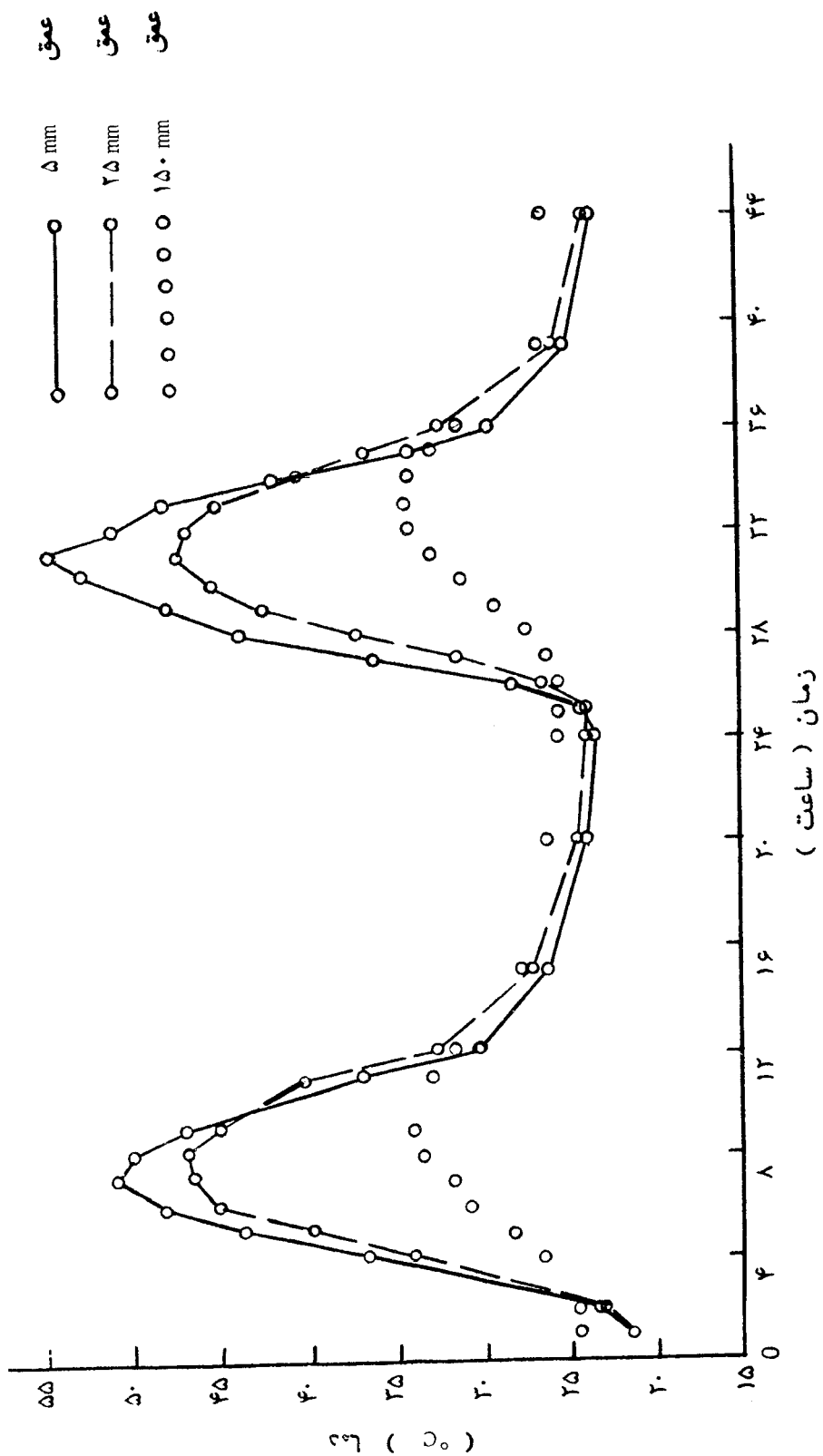
مقاومت در تغییر دما، اختلافاتی مشاهده می‌شود. این اختلافات برای مدل ریاضی بیشتر از آن شبیه‌سازی است. منحنی مدل ریاضی آن طور که انتظار می‌رود صاف نیست و این نشانگر مقطعی بودن لایه‌هاست. در حدود ساعت ۹ اول و دوم شکستگی نسبتاً شدید در اعماق ۵ و ۲۵ میلیمتری پیش‌گویی مدل ریاضی مشاهده می‌شود که احتمالاً اثر روز و نوسان است.

منحنیهای پیش‌بینی شده مدل شبیه‌سازی، تشابه تقریباً کاملی با منحنیهای آزمایشگاهی دارد. مقادیر بیشینه دمای پیش‌بینی شده در اعماق ۲۵ و ۱۵۰ میلیمتر کمتر از آن آزمایشگاهی است. این اختلاف به احتمال زیاد نتیجه تأثیر رطوبت است.

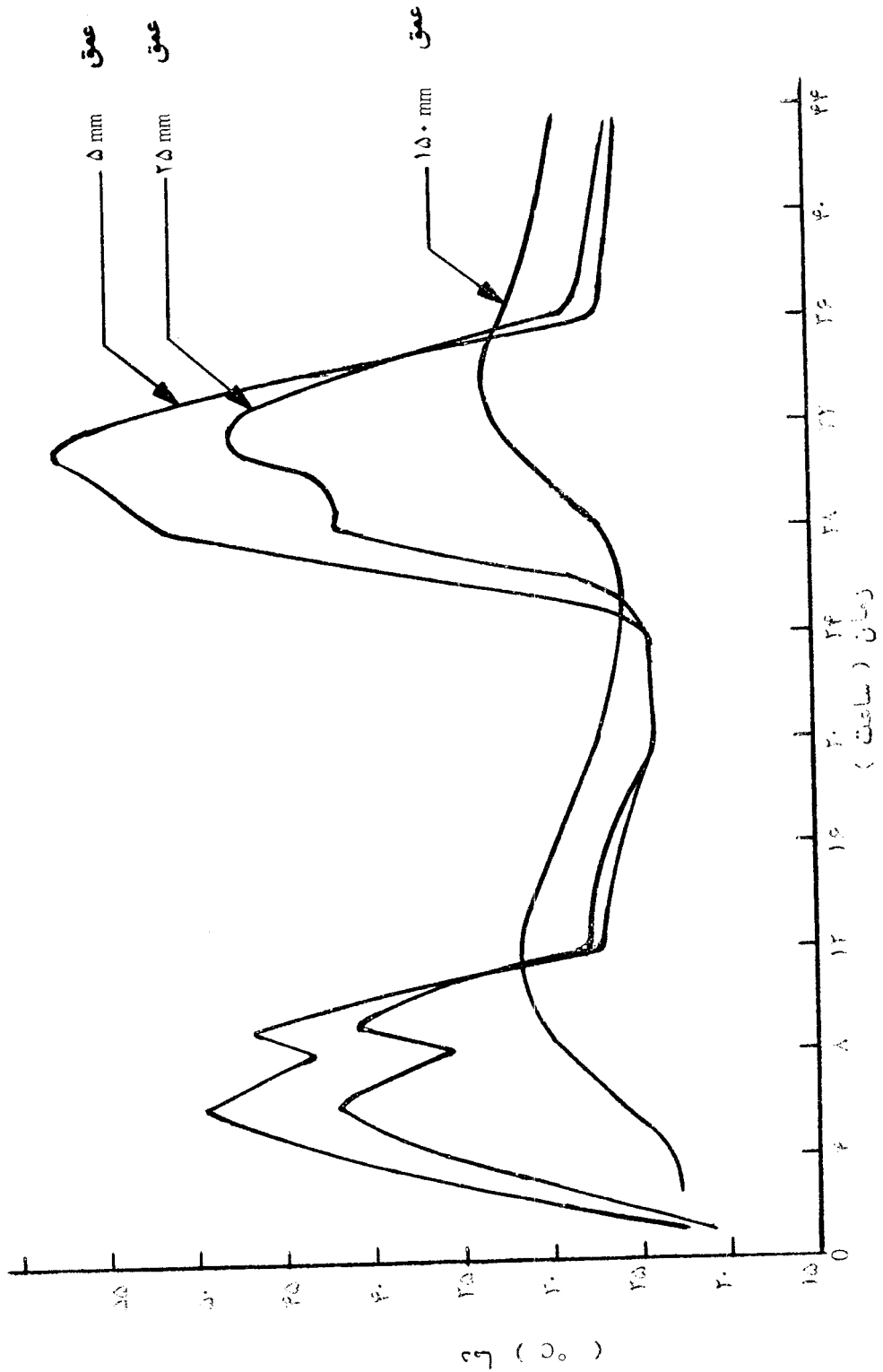
محتوای رطوبت خاک توسط خازنها به طور مقطعی و به دلیل محدودیتهای برنامه‌ای مدل، با تقریب زیاد شبیه‌سازی شده‌اند. پیش‌بینی محتوای رطوبت خاک یکی از معضلات است چون حرکت آب تحت اثر سه پدیده

مدل شبیه‌سازی را علاوه بر دقت و صحت بیشتر آن، می‌توان به طور معکوس نیز کاربرد و بدان وسیله، وزن مخصوص خاک در اعماق مختلف را تعیین کرد. بدین ترتیب که مقادیر خازن برنامه را آنقدر تغییر می‌دهیم تا منحنی پیش‌بینی شده کاملاً با منحنی آزمایشگاهی تطبیق کند. آن‌گاه از دستور ۱۷ به طور معکوس، مقدار وزن مخصوص قابل محاسبه خواهد بود.

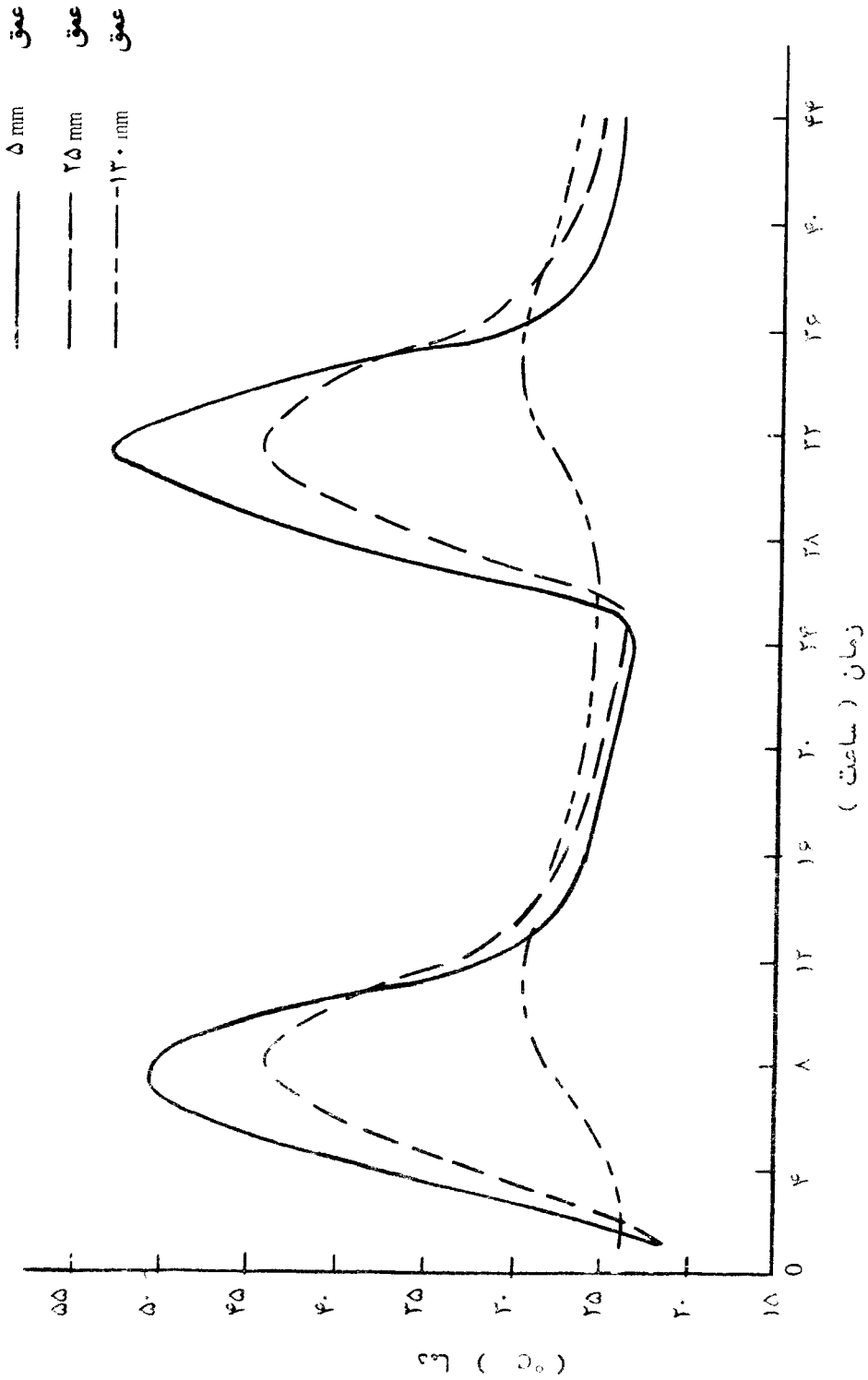
محتوای رطوبت خاک توسط خازنها به طور مقطعی و به دلیل محدودیتهای برنامه‌ای مدل، با تقریب زیاد شبیه‌سازی شده‌اند. پیش‌بینی محتوای رطوبت خاک یکی از معضلات است چون حرکت آب تحت اثر سه پدیده



شکل ۵- منحنی ارقام آزمایشگاهی دمای میانگین در اعماق ۵، ۲۵ و ۱۵۰ میلیمتری خاک.



شکل ۶- منحنی انتشار پیش‌بینی شده دما در خاک با مدل ریاضی در اعماق ۵، ۲۵ و ۱۵۰ میلی‌متری



شکل ۷ - منحنی انتشار پیش‌بینی شده دما در خاک با مدل شبیه‌سازی در اعماق ۵، ۲۵ و ۱۲۰ میلیمتری

فهرست منابع :

- 1 - Barger et al. 1984 . Tractors and their power units. John Wiley & sons, Inc. New York .
- 2 - Behroozi - Lar, 1973. Simulation of Transient Heat Transfer in soil system . Ph.D. Dissertation ,N.C. State University, Raleigh , N.C.
- 3 - Behroozi - Lar , M.Huang B.K. and Bowen , H.D. 1986.Circuit Simulation of Soil Temperature Profile. ASAE, Vol, 19 No. 4, St. Joseph Michigan .
- 4 - Huang B.K. 1972. Digital Simulation Analysis of Biophysical Systems. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. U.S.A.
- 5 - Passkis, V. and L.F. Ryder. 1968. Direct Analog Computer. International Publishers. A division of John Wiley and Sons. Inc, N.Y.
- 6 - Rabenstein , L.A. 1966. Introduction to Ordinary Differential Equations. Academic Press , N.Y.

