دکتر پرویز جبه‌دار مارالانی

دانشیار دانشکده فنی – دانشگاه تهران

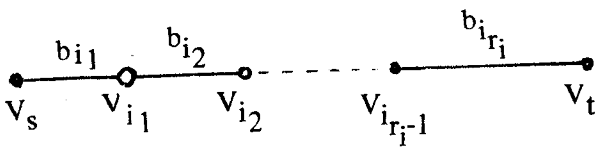
یک شبکه ارتباطی معمولا" توسط یک گراف خطی G نمایش داده می‌شود که شاخه‌های آن نشان‌دهنده کانالهای جریان اطلاعات و گرههای آن نشان‌دهنده منابع، تهکشی[1] و مراکز سوئیچینگ می‌باشد (۱). شاخه‌های (غیرجهت‌دار) گراف G دارای ضریبهای نامنفی متناظری هستند به‌گونه‌یی‌که اگر $c_i$ ضریب شاخه $b_i$ باشد $c_i$ ظرفیت شاخه $b_i$ خواهد بود، این ظرفیت نشان‌دهنده بیشترین حجم ترافیکی است که می‌تواند به‌وسیله شاخه $b_i$ احیانا" در فاصله زمانی واحد عبور داده شود.

ارتباط میان شبکه‌های ارتباطی و مدارهای مقاومتی توسط افراد دیگر بحث شده‌است (۴ – ۲). منظور ازاین‌مقاله نشان دادن این نکته است که‌برای‌مدل‌سازی شبکه‌های‌ارتباطی دیجیتالی، بهره‌گیری‌مرسوم‌ازمفهومهای‌ظرفیت‌وظرفیت‌پایانه[2] نامناسب است. برای پیداکردن شاربیشینه میان دوگره گراف G روش دیگری درمقایسه‌باقضیه شار بیشینه-برش کمینه[3] (۵) ارائه‌کرده، و ملاحظه‌خواهیم‌کردکه‌این‌روش باپیدا کردن ادمیتانس میان‌یک‌جفت‌ازسرهای‌یک شبکه مقاومتی، که‌بطور مناسبی‌تعریف شده باشد، معادل است.

ظرفیت یک‌شاخه در مفهوم عادی متناظر باحداکثر تعداد پیغامهائی‌است‌که بتواند بطورهمزمان از درون‌آن شاخه انتقال‌داده‌شود. ازسوی‌دیگر معمولا" ظرفیت‌شاخه به‌حداکثر تعداد بیتهایی گفته‌می‌شودکه بتوانددریک ثانیه‌از درون شاخه انتقال داده شود. باهریک از این تعبیرها، ظرفیت یک مسیر در یک گراف برابر کمینه ظرفیت شاخه‌های موجود درآن مسیر خواهدبود. یعنی‌اگر $P_i(V_s,V_t)=\{b_{i_1},b_{i_2},\dots b_{i_{r_i}}\}$ مسیر میان دوگره $V_s$ و $V_t$ باشد ظرفیت $P_i(V_s,V_t)$ که‌به‌صورت $C[P_i(V_s,V_t)]$ نوشته می‌شود چنین است.

$$C[P_i(V_s,V_t)] = \underset{1<j<r_i}{\mathrm{Min}} [C_{i_j}]$$

که‌درآن $C_{i_j}$ ظرفیت شاخه $b_{i_j}$ است. درحالتی‌که‌ظرفیت‌نشان دهنده شدت شار[4] باشداین‌تعریف‌دارای‌برخی‌نارساییهااست. گیریم $P_i(V_s,V_t)=\{b_{i_1},b_{i_2},\dots b_{i_{r_i}}\}$ مسیرنشان‌داده شده در شکل (۱) باشد اگر $b_{i_j}$ نشان‌دهنده حداکثرتعدادبیتهادرثانیه‌باشد، که‌می‌تواند از درون $b_{i_j}$ انتقال داده شود.




شکل (۱)

زمان لازم برای انتقال یک بیت تنها در درون $b_{i_j}$ را می‌توان‌برای $j=1,2,\dots,r_i$ به‌صورت $\frac{1}{c_{i_j}}$ نوشت. ازاینروکمترین‌زمان کل لازم برای انتقال‌یک‌بیت تنها از $V_s$ تا $V_t$، یعنی $t_{s,t}$، چنین است.

$$t_{s,t} = \sum_{J=1}^{r_i} \frac{1}{c_{i_j}}$$

و ازاینرو، بیشترین شدت شار $f_{s,t}$ که می‌توان‌از $V_s$ به $V_t$ به‌دست آورد چنین است:

$$f_{s_1 t} = \frac{1}{t_{s,t}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{r_i}\frac{1}{c_{i_j}}}$$

این‌مقدار با $c[p_i(V_s,V_t)]$ یکی نیست.

اکنون‌گراف نشان داده شده در شکل (۲) را درنظر می‌گیریم‌که‌مرکب‌ازیک‌جفت‌مسیرجداازهم $P_1(V_s,V_t)$ و $P_2(V_s,V_t)$ است. کمترین زمان لازم‌برای‌انتقال یک بیت تنها در طول مسیر $P_1(V_s,V_t)$ برابر با:

$$\sum_{j=1}^{s_1}\frac{1}{c_{1_j}}$$

وکمترین‌زمان‌لازم برای‌انتقال یک بیت تنها درطول مسیر $P_2(V_s,V_t)$ برابربا

---

1- Sink
2- Terminal Capacity
3- Max-flow Min-Cut
4- Flow rate

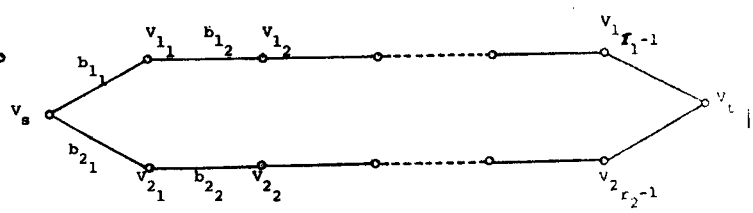
$$\sum_{j=1}^{r_2} \frac{1}{C_{2j}}$$

است . ازاینرو شدت شارهای حداکثر قابل‌حصول در طول $P_1(V_s,V_t)$ و $P_2(V_s,V_t)$ از $V_s$ به $V_t$ بترتیب برابر است با $\dfrac{1}{\sum_{j=1}^{r_1} \frac{1}{C_{1j}}}$ و $\dfrac{1}{\sum_{j=1}^{r_2} \frac{1}{C_{2j}}}$ پس شدت شار حداکثرقابل‌حصول $f_{s,t}$ از $V_s$ به $V_t$ بروشنی چنین‌است :

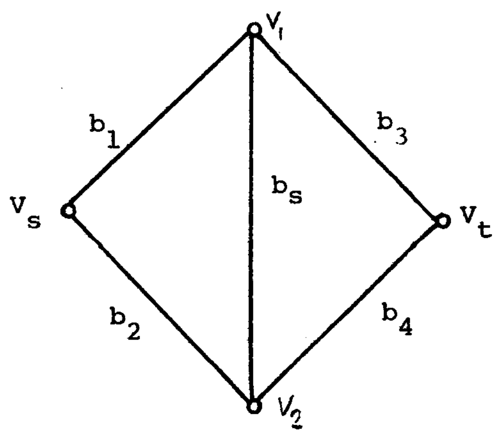
$$f_{s,t} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{r_1} \frac{1}{C_{1j}}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{r_2} \frac{1}{C_{2j}}}$$

بعلاوه $f_{s,t}$ بامقدارحاصل از کاربرد قضیه شاربیشینه برش کمینه یکسان نیست .

باداشتن یک گراف G باچند مسیر جدا از هم میان سرهای موردنظر مانند شکل (۳) محاسبه شدت شار حداکثر $f_{s,t}$ از $V_s$ به $V_t$ روشن نیست . ولی اکنون تشابه زیر را بررسی می‌کنیم .




شکل ۲



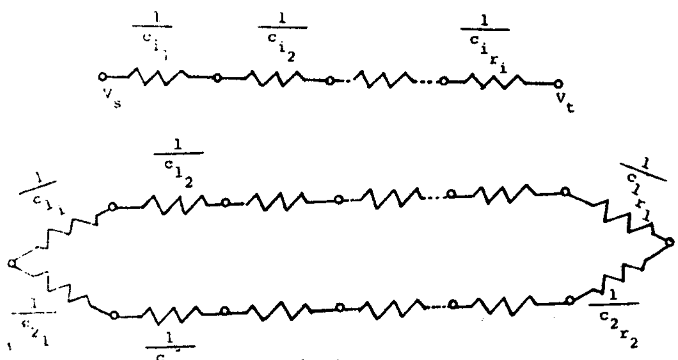

شکل ۳

اگر در گراف شکلهای (۱) و (۲) هرشاخه $b_i$ را با مقاومتی بامقدار $\frac{1}{C_i}$ اهم جانشین کنیم در این‌صورت ادمیتانس $y_{s,t}$ میان $V_s$ و $V_t$ برابر شدت شار حداکثر $f_{s,t}$ است . برای‌شبکه‌مقاومتی‌شکل (۴) الف ، این‌مقداربصورت :

$$y_{s,t} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{r_i} \frac{1}{C_{i_j}}}$$

و برای شبکه مقاومتی شکل (۴) ب به صورت زیر است :

$$y_{s,t} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{r_1} \frac{1}{C_{1_j}}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{r_2} \frac{1}{C_{2_j}}}$$



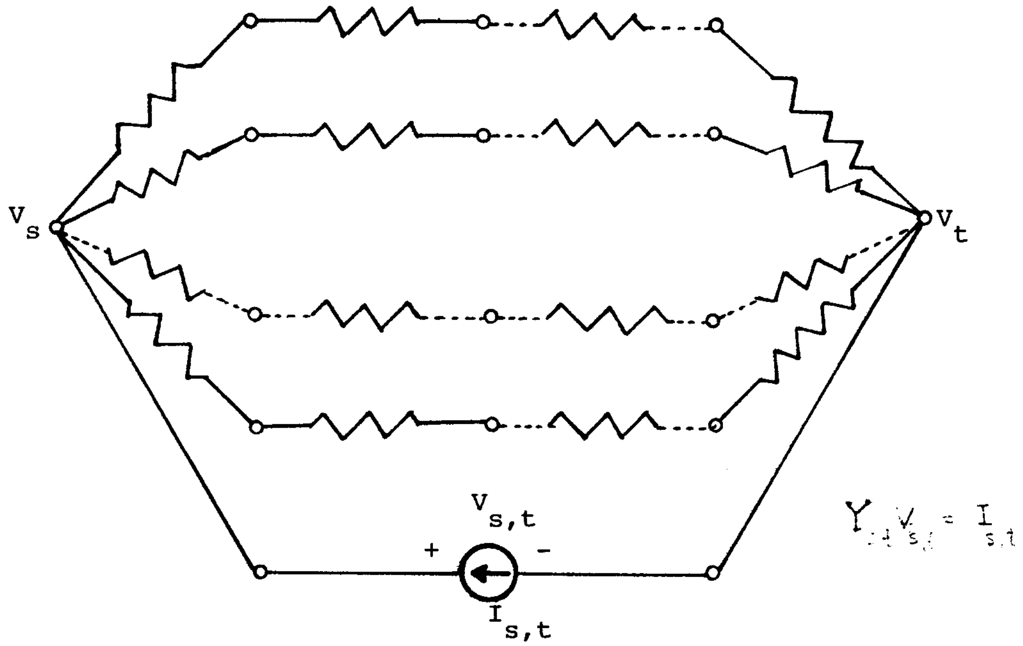
(ب)

شکل ۴

تعمیم بلافاصله‌ای‌که‌برای آن $y_{s,t}=f_{s,t}$ مشابه‌های مقاومتی گرافهائی باچندمسیر جدا از هم است . از آنجائی‌که دراین‌گرافها $y_{s,t}=f_{s,t}$ اگریک‌منبع جریان‌ثابت $I_{s,t}$ میان گرههای $V_s$ و $V_t$ مانند شکل (۵) اعمال شود ولتاژ $V_s$ زمان لازم برای‌انتقال‌یک‌پیغام $I_{s,t}$ بیت را از $V_s$ به $V_t$ نشان‌می‌دهد . افزون براین جریان درون هرشاخه نشان‌دهنده ، تعدادکل بیتهای انتقال داده شده از آن شاخه و ولتاژ دوسر هرشاخه نشان‌دهنده ، حداقل‌زمان‌لازم برای‌انتقال‌آن‌تعدادبیتها است .

آنچه در صفحهٔ پیش‌گفته شد برای هرگراف $G$ درست است. اگر هرشاخهٔ $b_i$ از گراف $G$ با مقاومتی با مقدار $\frac{1}{C_i}$ اهم جایگزین شود دراین‌صورت ادمیتانس $y_{s,t}$ میان سرهای $V_s^i$ و $V_t$ تعداد بیت درثانیه‌های حداکثری را نشان می‌دهد که‌می‌توان از $V_s$ به $V_t$ انتقال داد. جریان درون هرشاخهٔ مقاومتی تعداد کل بیتهائی را که ازآن شاخه انتقال‌داده‌می‌شود نشان می‌دهد و ولتاژ دوسر هرشاخه نشانگرزمان‌کل‌لازم برای ارسال این بیتها از آن شاخه است. برای اثبات درستی این نکته از روش استقرا بر روی تعداد گرههای گراف بهره خواهیم گرفت.

گیریم $V_1$، $V_2$، ...، $V_n$ گرههای‌یک گراف $G$ باشند. اگر $n=2$ باشد $G$ مرکب‌از $n$ شاخه‌موازی‌است‌وازبحث‌پیشین خود نتیجه می‌گیریم که این مطلب درست‌است. اکنون فرض کنید که مطلب فوق برای‌تمام‌گرافهائی با $2 \geqslant N$ گره درست باشد و اینک $n = N + 1$ را بررسی می‌کنیم. گیریم $V_s$ و $V_t$ هرجفت‌گره $G$ باشد. از آنجائی که $n > 2$ است گره‌دیگری مانند $V_i$ درگراف $G$ وجوددارد‌به‌گونه‌یی‌که $i \neq s$ و $i \neq t$ می‌توان‌گراف $G$ با $N + 1$ گره رابابه‌کاربردن تبدیل ستاره به‌مثلث‌تعمیم‌یافته‌درگره $V_i$ بریک‌گراف $\hat{G}$ با $N$ گره‌کاهش‌داد.

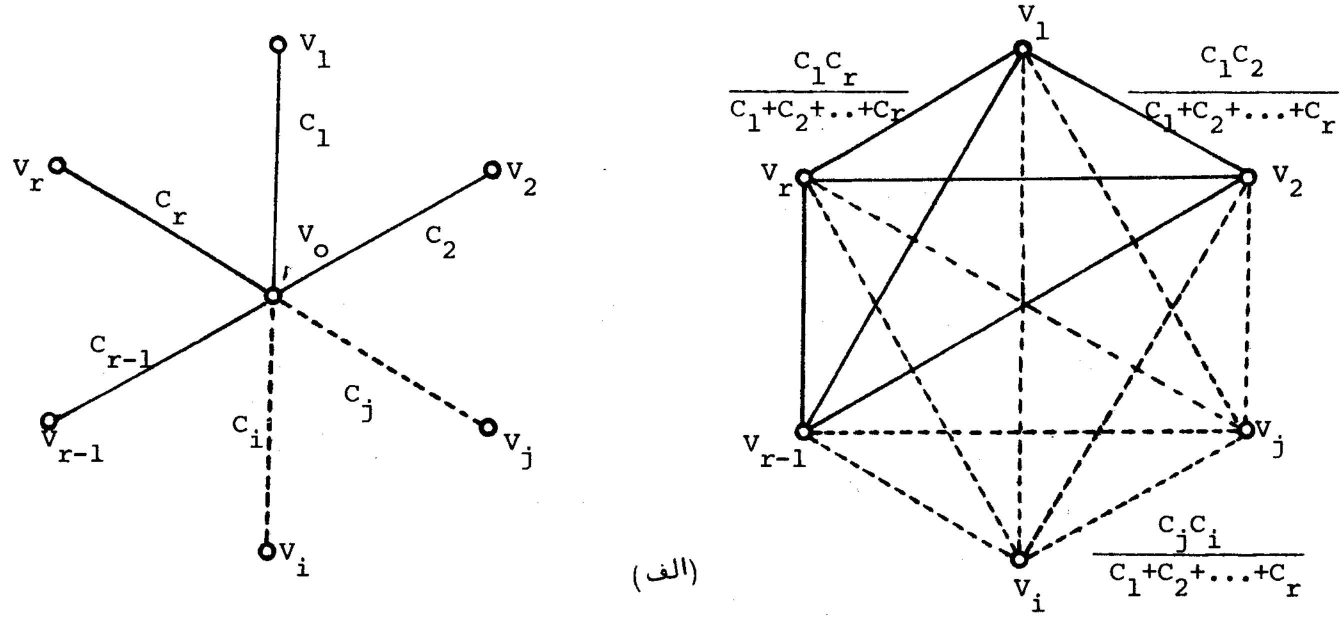



شـــــکل (۵)

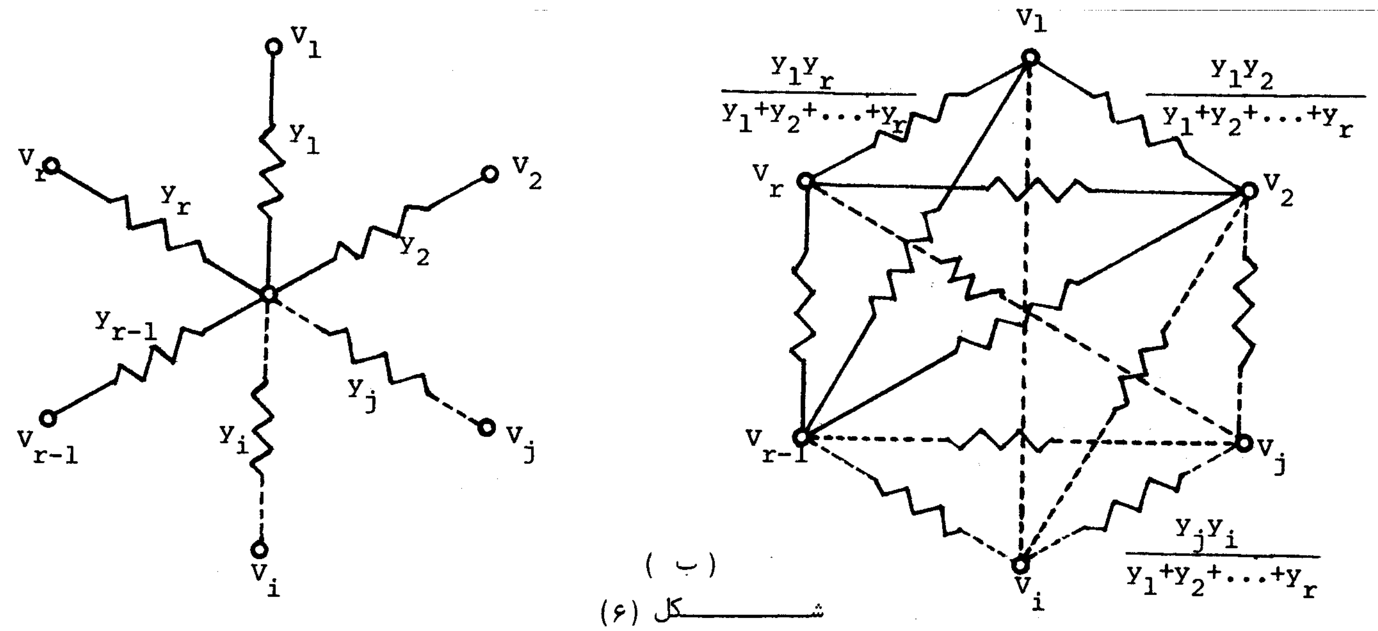
این‌تبدیل در شکل (۶) تشریح شده‌است. تمام عناصر ایجاد شده‌دراعمال‌این‌تبدیل مقاومتها هستند. یک خاصیت‌شناخته شدهٔ تبدیل ستاره به‌مثلث آن است که باتبدیل به‌کار رفته تمام‌ولتاژهاوجریانهای‌سرتغییرناپذیرباقی‌می‌ماندوادمیتانس میان‌هرجفت گره $V_j$ و $V_k$ با $j \neq i$ و $k \neq i$ پیش‌از تبدیل و پس‌از تبدیل یکسان است. افزون براین ملاحظهٔ این نکته آسان‌است‌که‌شبکهٔ‌ارتباطی ستاره‌ای‌با $r + 1$ سرازاین‌خاصیت موردنظر پیروی می‌کند. نشان دادن‌این‌نکته دشوار نیست که این‌چنین شبکه ستاره‌ای را می‌توان با یک گراف کامل مرکب از $r$ سرکه ازتبدیل ستاره به‌مثلث حاصل می‌شود جایگزین کردبی‌آنکه‌تاثیری‌برروی خواص پردازش اطلاعات دراین $r$ سر داشته‌باشد. از اینروباداشتن‌یک گراف با $N + 1$ گره‌می‌توان یک‌گراف‌هم‌ارزبا $N$ گره‌به‌دست‌آوردوبدینسان‌نکته‌اثبات‌می‌شود.

نتیجهٔ بحث ما این است که برای پیدا کردن شدت شار حداکثر در یک گراف G با یک نوع شار می‌بایست بسادگی یک شبکهٔ مقاومتی مشابه ایجاد کرده ، ادمیتانسهای مناسب را اندازه‌گیری کنیم .

از $V_{s_1}$ به $V_{t_1}$ و از $V_{s_2}$ به $V_{t_2}$ ، ... و از $V_{s_k}$ به $V_{t_k}$ بفرستیم. گیریم تعداد بیتها در این پیغامها بترتیب برابر $I_{s_1,t_1}$، $I_{s_2,t_2}$ ... $I_{s_k,t_k}$ باشد . در این صورت فرض کنیم یک شبکهٔ مقاومتی مشابه ساخته شده و یک منبع جریان ثابت با مقدار $I_{s_i,t_i}$ میان گرههای $V_{t_i}$، $V_{s_i}$




(الف)




(ب)

شکل (۶)

بحث ما به شبکه‌های ارتباطی غیرجهت‌دار محدود شده بود . بسادگی دیده می‌شود که مطلب مشابهی را می‌توان درمورد گرافهایی که شاخه‌های آنها جهت‌دار (یکطرفه) هستند بیان کرد و آن ، ساختن شبکه‌های مشابه است که در هر شاخهٔ آنها یک مقاومت و یک دیود سری‌وار قرار دارد .

تعمیم طبیعی این مطلب برای شبکه‌های با چند گونه شار نیز ممکن است . فرض کنیم می‌خواهیم پیغامهائی

وصل شود ( برای K و . . . . ، ۲ ، ۱ = i ) . آنگاه ولتاژ $V_{s_i,t_i}$ که از $V_{s_i}$ به $V_{t_i}$ سنجیده می‌شود زمان کل لازم برای انتقال $I_{s_i,t_i}$ بیت از $V_{s_i}$ به $V_{t_i}$ است به شرط آنکه همه پیغامهای رسیده ، برای انتقال در طول یک شاخه مخلوط شوند به‌گونه‌یی که انتقال یک پیغام تنها از آن شاخه کامل نباشد مگر آنکه تمام پیغامهای رسیده انتقال داده شده باشند . در این مورد اطلاعات ماتریس ادمیتانس شبکه K-قطبی برای محاسبهٔ زمانهای انتقال همه سرها کفایت می‌کند .

سرانجام اگر اولویتهای متفاوتی به‌پیغامهای مختلف داده شود چنین به‌نظر می‌رسد که می‌توان باجایگزین کـردن منابع کنترل شده درشبکه، ولتاژهای‌سر، زمانهای انتقالی را نشان دهد که متناظر باشارهای‌جریان باضرایب اولیت باشد.

**فهرست منابع**

1- S. Seshu and M.B. Reed, Linear Graphs and Electrical Networks,Addison-Wesley 1961.

2- J.B. Dennis, Mathematical Programming and Electrical Networks,John Wiley and Sons 1959.

3- I. Cederbaum "On optimal operation of Communication Nets" Journal of the Franklin Institute Vol. 274, No. 2 August 1962.

4- I.T.Frisch and W.H. Kim. "n-port Resistive Networks and Communication Nets" IEEE Transaction on Ocicuit Theory Vol. CT-8,No.4 December 1961.

5- L.R. Ford Jr. and D.R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press 1962.