نمونه‌ای از کاربرد قضایای تقارب (حساب جامعه)
در تعیین حد شعاعی توابع

نوشته‌ی :
ارسلان شادمان
استادیار دانشکده فنی

مقدمه

نخستین هدف این مقاله آشنا ساختن خواننده است با یکی از موارد استعمال قضایای تقارب که در مبحث جدید انتگرال بشکل کاملاً مکبتی درآمده است. ازنظر سطح درس ، بآن قسمت از مبحث انتگرال احتیاج داریم که قاعدةً بایستی در سال سوم یا چهارم رشته‌ی ریاضی دانشکدهٔ علوم وهم چنین دوره‌لیسانس رشته‌ی فیزیک و دوره‌ی مهندسی برق ومکانیک گنجانیده‌شده باشد. منظور بیشتر انتگرال رادن (RADON) و مختصری از نظریه‌ی توزیع‌شوارتز (SCHWARTZ) میباشد. لیکن مثالی که ملاحظه‌خواهدشداز توابع زیر همساز (Sousharmoniqne) [۱] و یا نظریه‌ی پتانسیل بحث میکند که در برنامه‌ی لیسانس فعلی کمتر مطرح است.

برای رسیدن بهدف بالا یکی از مسائل ساده‌ایرا که بمناسبت تحقیقی در حد شعاعی توابع چندی زیر همساز (Plurisousharmonique) [۱] طرح و حل کرده‌ایم عرضه مینمائیم [۲]. این مسأله بررسی حد شعاعی تابع v تعریف شده روی صفحه‌ی $\mathbf{C}$ توسط دستور :

$$v(z) = \exp\Big(\sum_{n \geqslant 1} \alpha_n \mathrm{Log} \mid z - q_n \mid \Big)$$

میباشد که در آن α_n و q_n دو دنباله از اعداد متعلق بفاصله‌ی $[0,1[$ میباشند و در شرایط مناسبی صدق‌میکنند. تابع v زیر همساز ویا مقادیر بزرگتر یا مساوی صفراست‌و با توجه بشرایطی که روی α_n و q_n قائل میشویم فقط در نقطه‌ی o گسسته‌است. ثابت‌میکنیم وقتی متغیر z روی نیم خطی غیر از ox بطرف o

میل کند تابع v پیوسته‌است یعنی $v(z)$ بسوی $v(o)$ میل میکند. اثباتی کامل با استفاده از قضیه‌ی تقارب زیر سلطه (Théorème de la convergence dominée) ارائه میشود[۳]. آنگاه از خود سؤال میکنیم: اگر فقط متوسل برروش مقدماتی میشدیم و از قضایای تقارب استفاده نمیکردیم، چه نتیجه‌ای بدست‌میآمد؟ در جواب باین سؤال تلاشی میشود که‌نشان میدهد با صرف‌وقت و کار بیشتر نتیجه هنوز کامل بدست‌نمیآید؟ فقط تخمینی برای $H(\theta)$، تفاضل‌حد بالائی و حد پائینی تابع v وقتی متغیر روی نیم خط D_θ بسوی صفرمیل میکند، بدست میآوریم:

$$D_\theta=\{re^{i\theta} \quad ; \quad r>o\} ;$$

$$H(\theta)= \limsup v(z) - \liminf v(z) \ , \ z\longrightarrow o \ , z\in D_\theta \cdot$$

تخمینی که با روش مقدماتی بدست میآوریم عبارتست از.

$$\begin{cases} H(\theta)=o \ , & \frac{\pi}{۲}\leqslant |\theta| \leqslant\pi \\ H(\theta) \leqslant -(\Sigma\alpha_n) \ \mathrm{Log}\sin|\theta| \ , & o<|\theta|<\frac{\pi}{۲} \cdot \end{cases}$$

حال آنکه با استفاده از قضایای تقارب داریم

$$H(\theta)=o \quad , \quad o<|\theta|\leqslant\pi \cdot$$

این قسمت از مقاله را که بتلاشی با روش مقدماتی‌تر موسوم ساخته‌ایم هرچند خسته کننده‌میتواند بود از دوجهت آوردیم: یکی اینکه با مقایسه، روش قوی‌استفاده از قضایای تقارب‌اهمیت‌واقعی خود را نشان میدهد؛ دیگر اینکه خود فنون‌مقدماتی بکار رفته‌ممکن است در مسائل دیگری که از قضایای انتگرال‌نمیتوان کمک‌گرفت بیاری شتابند. شاید خواننده با روشی مقدماتی نتایجی بهتر از تخمین فوق بدست آورد. امیدواریم در اینصورت با انتشار روش خود برنویسنده منت گذارد.

هدف دیگراین مقاله ارائه‌ی یکی از نتایج حاصله درمورد حد شعاعی توابع زیر همساز میباشد.
مسأله‌اینست: اگر تابعی زیر همساز مانند v روی $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant ۲)$ در نقطه‌ی z_o گسسته باشد، مجموعه‌ی نیم خطهائی را که از z_o رسم میشوند بدو دسته تقسیم کنیم، یکی $A_v(z_o)$ و دیگری متممآن $A'_v(z_o)$؛ نیم خط D از $\mathbf{R}^n$ بمبدأ z_o متعلق به $A_v(z_o)$ میباشد هرگاه (اگر و فقط اگر) داشته باشیم:

$$\lim v(z)=v(z_o) \quad , \quad (z\longrightarrow z_o \ , \ z\in D) \cdot$$

قضیه‌ایکه بیان میکنیم میگوید: اگر نیم خط D با محمل اندازه‌ی وابسته به v، یعنی با $S=\mathrm{supp}(\Delta v)$، « زاویه بسازد»، در اینصورت D متعلق‌است‌به $A_v(z_o)$. در واقع‌قضیه‌ایکه بیان‌میکنیم اندکی کلی‌تر است‌و بجای‌نیم‌خط D برای هر مخروط‌بسته (برأس z_o که با محمل فوق (S) زاویه‌بسازد)

صادق است. این نتیجه با تمام ناچیزیش میتواند بعنوان نتتجه‌ی عمده‌ی این مقاله از حیث تحقیق بحساب آید. احتمال میرود این قضیه قبلاً کشف شده باشد؛ دراینصورت خرسند خواهیم شد اطلاعاتی در این زمینه دریافت داریم.

درعرضه‌ی مطالب برنامه‌ی زیر را رعایت میکنیم:

۱ - طرح یک مسأله‌ی کلی؛ ۲ - ساختمان یک مثال نمونه؛

۳ - تلاشی با روش مقدماتی تر؛ ۴ - برگشت بمسأله‌ی کلی؛

۵ - یادآوریهای لازم؛ ۶ - یاداشتها و مراجع (ارقام داخل پرانتز ( ) مخصوص یادداشتها و ارقام داخل کروشه [ ] از آن مراجع خواهد بود).

۱ - طرح یک مساله‌ی کلی

تابعی مانند f روی میدان D از $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ تعریف شده است و مقادیر آن روی خط مختوم $[-\infty, +\infty]$ میباشند. فرض کنیم z_0 نقطه‌ایست از D. مطلوب است بررسی نیم خط‌هائی از $\mathbf{R}^n$ بمبدأ z_0 که وقتی متغیر z روی یکی از آنها بسوی z_0 میل میکند، مقدار f(z) بسوی $f(z_0)$ میل کند. چنین نیم خطهائیرا شعاع های پیوستگی تابع f درنقطه‌ی z_0 مینامیم. مجموعه‌ی شعاع های پیوستگی f درنقطه‌ی z_0 را با $A_f(z_0)$ و اگر ابهامی نباشد با A_f نمایش میدهیم. میتوان هرنیم خط را با نقطه‌ای از کره‌ی واحد بمرکز o و شعاع ۱ یکی گرفت. باین ترتیب.

$$A_f(z_0)=\{z\in\mathbf{R}^n\ ;\ \|z\|=1\ ,\ \lim_{\substack{t\to o\\ t>o}} f(z_0+tz)=f(z_0)\}. \tag{1}$$

مسأله فقط وقتی جالب است که f درنقطه‌ی z_0 گسسته باشد. اگر f نیم پیوسته از طرف بالا فرض شود، شرط گسستگی اینست:

$$\liminf f(z)<f(z_0)\quad ,\quad (z\in D\ ,\ z\longrightarrow z^\circ).$$

اگر f بیش از اندازه کلی فرض شود، نمیتوان توقع داشت نتایج دقیقی بدست آید. درنتیجه f را جزء یکدسته توابع میگیریم مانند P که درعین گسستگی خواص قوی و جالبی داشته باشند و بعلاوه درعمل هم اغلب ظاهرشوند تاهم نتایج حاصله وهم شرکت سایر علاقه‌مندان بتحقیق ریاضی امکان دهند این بحث مختصر و مقدماتی بوضع بهتری گسترده شود.

بهترین داوطلب برای این بررسی توابع زیر همساز میباشند (۴). درحالت $n=2$، یک شرط مساعد اضافی برقرار است و آن اینکه درصفحه، پاره خط باندازه‌ی کافی بزرگ است بطوریکه اگر f روی $\mathbf{R}^2$ زیر همساز باشد داریم:

$$\limsup f(z_0+tz)=f(z_0)\quad ,\quad (t>o\ ,\ t\longrightarrow o). \tag{2}$$

میدانیم برای $n\geqslant ۳$ دیگر این خاصیت برقرار نیست و باصطلاح پاره خط درفضای سه بعدی نخ کشیده (effilé) است و حال آنکه درصفحه نخ کشیده نیست و نخ پر (non – effilé) است.

درنتیجه مسأله رادر حالت $D=\mathbf{C}$ چنین طرح میکنیم.

مسأله ـ فرض میکنیم P مجموعه‌ی توابع زیر همساز $v:\mathbf{C}\longrightarrow[-\infty,+\infty[$ باشد. بررسیهای زیر را انجام دهید:

۱ ـ مطلوب است بررسی بخشهائی از دایره‌ی $|z|=۱$ که میتوانند بشکل A_v برای یک v متعلق به P باشند؛

۲ ـ بخشی از دایره‌ی $|z|=۱$ مفروض است. مطلوب است ساختمان تابعی مانند v متعلق به P بطوریکه بخش مفروض مساوی A_v باشد؛

۳ ـ تابعی مفروض است مانند v ، $v\in P$. مطلوب است A_v .

آنگاه تعمیم مسأله بحالت $D=\mathbf{R}^n$ مطرح است.

در این مقاله از حل کامل مسأله بسیار دور هستیم و فقط بجوابهائی ناقص و جزئی قناعت میکنیم. مسائل دیگری نیز میتوان بیان کرد که بنوبه خود جالب باشند. اما این کار را بموقعی موکول کنیم که جزئی پیشرفتی در بررسی خود کرده باشیم.

۲ ـ ساختمان یک مثال نمونه

در این بخش از مقاله حالت خاصی از قسمت دوم مسأله را حل میکنیم:

مسأله ـ مطلوب است تعریف تابعی زیر همساز و مثبت (بزرگتر یا مساوی صفر) مانند

$$v:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{R}\quad,\quad v\geqslant o$$

بطوریکه:

$$A_v=\{z\ ;\ |z|=۱\ ,\ z\neq ۱\}$$

بعبارت دیگر:

$$A_v=\{e^{i\theta}\ ;\ o<\theta<۲\pi\}. \qquad (۳)$$

جواب ـ گواینکه میتوانیم شرح بدهیم چگونه بتعریف چنین تابعی هدایت میشویم، اما ترجیح میدهیم بحث را به بند راجع ببرگشت بمسأله‌ی کلی موکول کنیم و در اینجا فقط یک جواب را بنویسیم و ثابت کنیم درشرایط مطلوب صدق میکند. تابع v را چنین تعریف میکنیم: دنباله‌های α_n و q_n از اعداد حقیقی را طوری انتخاب میکنیم که داشته باشیم:

(i) $$۱=q_۱\quad,\quad q_n>q_{n+1}\quad,\quad \lim q_n=o\quad;$$

(ii) $$\alpha_n>o\ ,\ \sum_{n\geqslant ۱}\alpha_n<+\infty\ ;$$

(iii) $$-\infty < \sum_{n\geqslant 1} \alpha_n \operatorname{Log} q_n \cdot$$

امکان این انتخاب از مثال عددی زیر آشکار است :

$$q_1=\alpha_1=1 \quad ; \quad q_n=\frac{1}{n} \quad , \quad \alpha_n=\frac{1}{n^2 \operatorname{Log} n} \quad (n\geqslant 2)\cdot$$

اکنون قرار دهیم :

(٤) $$w(z)=\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n \operatorname{Log} | z-q_n |$$

(٥) $$v(z)=\exp(w(z))$$

حکم - تابع $v(z)$ که بوسیله‌ی مشخصات بالا تعریف شده است ، یک جواب مسأله است.

اثبات - تابع w زیر همساز است زیرا یک پتانسیل لگاریتمی است که بوسیله اندازه‌ای مثبت با محمل فشرده تعریف شده است. این اندازه همان :

$$\mu=\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n \delta_{(q_n)}$$

میباشد که در آن $\delta(q_n)$ اندازه‌ی دیراك (Dirac) در نقطه‌ی q_n است و منظور از سری ، سری متقارب بمعنی تقارب ضعیف اندازه‌ها (Convergence vague des mesures) میباشد [٥]. داریم :

$$\operatorname{supp} \mu=\{1,q_1 , \dots ,q_n , \dots\}\cup\{o\}$$

$$\| \mu \| = \sum_{n\geqslant 1} \alpha_n < +\infty \cdot$$

ازهمین جا معلوم میشود تابع w درجمیع نقاط صفحه جز در مرکز پیوسته است. درمرکز داریم:

$$-\infty=\lim w(q_n) < w(o) = \sum_{n\geqslant 1} \alpha_n \operatorname{Log} q_n.$$

پس معلوم میشودنه‌تنها تابع w در مرکزگسسته است بلکه اگر روی نیم خط ox به o نزدیک شویم تابع گسسته است.

مسأله اینست که ثابت کنیم اگر روی نیم خط دیگری به o نزدیک شویم تابع پیوسته است. در اینصورت v جواب خواهد بود. باتوجه باینکه تابع w نسبت بمحور x ها متقارن است :

$$w(\bar{z})=w(z) ,$$

کافی است ثابت کنیم

$$o<\theta\leqslant\pi \Longrightarrow e^{i\theta}\in A_v$$

و اما اگر

$\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ باشد ، داریم $o \leqslant cos\theta$ پس

$$|re^{i\theta}-q_n|^2=(r\cos\theta-q_n)^2+r^2\sin^2\theta\geqslant q^2_n$$

در نتیجه :

$$w(re^{i\theta})\geqslant\sum\alpha_n \mathrm{Log} q_n=w(o)$$

پس :

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\Longrightarrow \liminf_{\substack{r\to o\\ r<o}} w(re^{i\theta})\geqslant w(o)$$

و چون بطورکلی :

$$\limsup_{\substack{r\to o\\ r>o}} w(re^{i\theta})=w(o),$$

پس :

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi \Longrightarrow \lim_{r\to o} w(re^{i\theta})=w(o)\Longrightarrow e^{i\theta}\in A_v$$

میماند اینکه ثابت کنیم :

$$o<\theta<\frac{\pi}{2}\Longrightarrow e^{i\theta}\in A_v. \tag{6}$$

لم ـ اگر $o<\theta<\frac{\pi}{2}$ باشد و قرار دهیم (با حفظ علائم فوق):

$$a=w(o)\quad,\quad b_\theta=\liminf_{\substack{r\to o\\ r<o}} w(re^{i\theta}),$$

دراینصورت داریم

$$a=b_\theta$$

اثبات لم ـ چون θ ثابت است ، تا اطلاع ثانوی قرار دهیم $b=b_\theta$. دنباله ای نزولی مانند $(r_k)_{k\geqslant 1}$ وجود دارد بطوریکه :

$$r_1=\cos\theta\quad,\quad r_k>r_{k+1}\quad,\quad \lim r_k=o$$

و بعلاوه :

$$b=\lim_{k\to\infty} w(r_k e^{i\theta}).$$

و اما داریم :

$$w(r_k e^{i\theta})=\int f_k(\zeta)\,d\mu(\zeta) \tag{7}$$

$$a=\int f(\zeta)d\mu(\zeta) \tag{8}$$

که در آن :

$$f(\zeta)=\text{Log}\,|\,\zeta\,| \quad , \quad f_k(\zeta)=|\,r_k e^{i\theta}-\zeta\,|\,\cdot$$

اکنون کافی است ثابت کنیم شرایط قضیه‌ی تقارب زیر سلطه‌ی لبگ (Lebesgue) برقرار است :

الف ـ دنباله‌ی $f_k(\zeta)$ تقریباً همه‌جا («تقریباً» بمعنی اندازی μ) بسوی تابع $f(\zeta)$ میل‌میکند ؛

ب ـ تابعی مانند $h(\zeta)$ میتوان یافت بطوریکه :

$$|\,f_k(\zeta)\,|\leqslant h(\zeta) \quad , \quad \int h(\zeta)d\mu(\zeta)<+\infty\cdot \tag{۹}$$

بموجب قضیه‌ی لبگ با این دو شرط خواهیم داشت :

$$a=\int f(\zeta)d\mu(\zeta)=\lim_{k\to+\infty}\left(\int f_k(\zeta)d\mu(\zeta)\right)=b.$$

شرط الف ـ در واقع f_k همه‌جا بسوی f میل میکند جز (برای اطمینان خاطر) در نقطه‌ی o ؛ واما $\{o\}$ برای اندازه‌ی μ قابل صرفنظر است : اگر $\varepsilon>o$ مفروض باشد ، عددی مانند N میتوان یافت بطوریکه

$$\sum_{n>N}\alpha_n<\varepsilon\,,$$

و اگر $\rho=q_{N+1}$ انتخاب‌شود ، اندازه‌ی قرص $|\,\zeta\,|<\rho$ (بمعنی اندازه‌ی μ) کوچکتر از ε خواهد بود.

شرط ب ـ داریم :

$$o\leqslant t\leqslant ۱ \implies \text{Log}\ (t\sin\theta)\leqslant f_k\,(t) \tag{۱۰}$$

درنتیجه اگر $o\leqslant t\leqslant ۱$ باشد داریم :

$$-f_k\,(t)=|\,f_k(t)\,|\leqslant-\text{Log}t-\text{Log}\,(\sin\theta)\cdot$$

پس قرار دهیم :

$$h(\zeta)=-\text{Log}\,|\,\zeta\,|\,-\text{Log}\,(\sin\theta)$$

خواهیم داشت :

$$\int h(\zeta)d\mu(\zeta)=-\text{Log}(\sin\theta)\,\left(\sum_{n\geqslant ۱}\alpha_n\right)-a<+\infty,$$

با استفاده از شرایط موجود (ii) و (iii) روی α_n و q_n .

اثبات لم ، و بهمین جا اثبات‌حکم و در نتیجه ساختمان مثال نمونه بپایان رسید. [۶]

تذکر ـ متغیر انتگرال‌گیری را بجای تمام صفحه‌ی C میتوانیم روی فاصله‌ی $[۰,۱]$ فرض کنیم زیرا محمل اندازه‌ی μ بخشی است از $[۰,۱]$.

۳ ـ تلاشی با روش مقدماتی‌تر

دیدیم که برای $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ بآسانی ثابت شد $e^{i\theta}$ یک شعاع تقارب ویا شعاع پیوستگی تابع w را مشخص میکند. اینک از خود سؤال میکنیم آیا نمیتوان با همان روش مقدماتی نتیجه لم قبل را بدست آورد؟ دقیقتر، مساله زیر را طرح میکنیم:

مسأله ـ دنباله‌های α_n و q_n در شرایط (i) , (ii) , (iii) صدق میکنند. قرار میدهیم:

$$w(z)=\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n \mathrm{Log}\,|z-q_n|$$

$$a=\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n \mathrm{Log} q_n \quad , \quad b_\theta=\liminf_{\substack{r\to o\\ r>o}} w(re^{i\theta})\cdot$$

$$H(\theta)=a-b_\theta\cdot$$

مطلوب است تخمینی‌برای $H(\theta)$ وقتی $\frac{\pi}{2} > \theta > o$ است بدون استفاده از قضایای انتگرال. اما میتوان از رابطه‌ی (۲) استفاده کرد.

روش مقدماتی تخمین $H(\theta)=a-b_\theta$ ــ دنباله‌های r_k و r'_k را چنان انتخاب کنیم که:

$$\lim r_k=o\ ,\ \cos\theta>r_k>r_{k+1}\ ;\ \cos\theta>r'_k>r'_{k+1}\ ,\ \lim r'_k=o\ ;$$
$$\lim_k w(r_k e^{i\theta})=b_\theta\ ;\ \lim_k w(r'_k e^{i\theta})=a\cdot \tag{۱۱}$$

میتوان فرض کرد:

$$\cos\theta>r'_k>r_k>r'_{k+1}>r_{k+1}$$

زیرا اگر چنین نبود زیر دنباله‌هائی از:

$$z'_k=r'_k e^{i\theta} \quad \text{و} \quad z_k=r_k e^{i\theta}$$

استخراج میکردیم که دراین شرط جدید صدق کنند.

نقشه‌ی ما اینست که یک نامساوی مانند:

$$w(z_k)\geqslant w(z'_k)+g_k \tag{۱۲}$$

بدست آوریم و تخمینی برای g_k را محاسبه کنیم.

برای اینکار قرار میدهیم:

$$t_k=\frac{r_k+r'_k}{۲\cos\theta} \tag{۱۳}$$

بطوریکه $t_k>t_{k+1}$ و $\lim t_k=o$. برای k عدد N_k را چنین تعریف میکنیم:

(۱۴) $$N_k=\max\ \{ p\in N\ ;\ n\leqslant p \Longrightarrow q_n\geqslant t_k\}\ ;$$

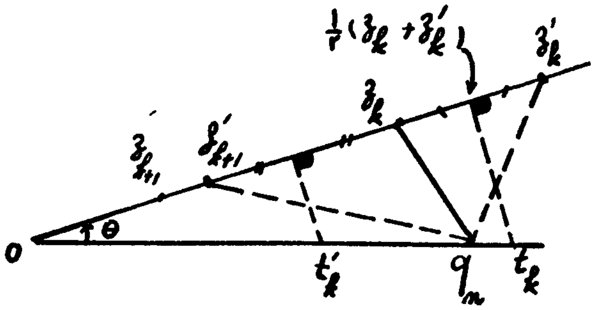
واضح است N_k کاملاً تعریف شده است زیرا مجموعه‌ی بالا غیر تهی و از طرف بالا محدوداست.

باین ترتیب داریم :

$$N_k\leqslant N_{k+1}\leqslant\cdots\ ;\ \lim\ N_k=+\infty\ ;$$

بعلاوه انتخاب N_k طوری است که :

(۱۵) $$n>N_k\Longrightarrow q_n<t_k\cdot$$



شکل ۱

باین ترتیب خواهیم داشت :

$$w(z_k)=\sum_{n\leqslant N_k}\alpha_n\ \mathrm{Log}\ |\ z_k-q_n\ |\ +\sum_{n>N_k}\alpha_n\mathrm{Log}\ |\ z_k-q_n\ |$$

$$\geqslant\sum_{n\leqslant N_k}\alpha_n\ \mathrm{Log}\ |\ z'_k-q_n\ |+\sum_{n>N_k}\alpha_n\ \mathrm{Log}\ |\ z_k-q_n\ |$$

$$=w\ (z'_k)-\sum_{n>N_k}\alpha_n\ \mathrm{Log}\ |\ z'_k-q_n\ |+\sum_{n>N_k}\alpha_n\mathrm{Log}\ |\ z_k-q_n\ |\ \cdot$$

پس :

$$w(z_k)\geqslant w(z'_k)+g_k$$

که در آن :

(۱۶) $$g_k=-\sum_{n>N_k}\alpha_n\ \mathrm{Log}\left|\frac{z'_k-q_n}{z_k-q_n}\right|$$

باتوجه بتعریف N_k داریم :

$$|\ g_k\ |\ =-g_k=\sum_{n>N_k}\alpha_n\ \mathrm{Log}\left|\frac{z'_k-q_n}{z_k-q_n}\right|\ \cdot$$

میتوان اثر دنباله‌ی z'_k را از میان برد (البته بقیمت از دست دادن مقداری دقت) باین ترتیب :

$$|g_k| \leqslant \sum_{n>N_k} \alpha_n \operatorname{Log} \left| \frac{z_{k-1}-q_n}{z_k-q_n} \right| \tag{17}$$

اکنون توابع y_k را تعریف کنیم :

$$y_k(t) = \left| \frac{z_{k-1}-t}{z_k-t} \right| \quad , \ (0 \leqslant t \leqslant 2)$$

و قرار دهیم :

$$M_k = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} y_k(t)$$

دوحالت ممکن است :

حالت اول : دنباله‌ی M_k از طرف بالا محدود است بعددی مانند M . دراین حالت :

$$|g_k| \leqslant \left(\sum_{n>N_k} \alpha_n \right) \operatorname{Log} M$$

درنتیجه با توجه بتقارب سری $\Sigma \alpha_n$ و این نکته که $\operatorname{Lim} N_k = +\infty$ ، خواهیم داشت :

$$\lim_{k \to +\infty} g_k = 0 .$$

میتوان با در دست داشتن $\varepsilon > 0$ ، عدد N را چنان یافت که $\sum_{n>N} \alpha_n$ از $\frac{\varepsilon}{\operatorname{Log} M}$ تجاوز نکند و عدد K را چنان یافت که $k > K \Longrightarrow N_k > N$. پس :

$$k > K \Longrightarrow |g_k| \leqslant \varepsilon .$$

حالت دوم ـ دنباله‌ی M_k از طرف بالا محدود نیست :

$$\lim_{k \to +\infty} \sup M_k = +\infty$$

دراین حالت ، مفید است $[y_k(t)]^2$ را حساب کنیم :

$$[y_k(t)]^2 = \frac{r^2_{k-1} - 2tr_{k-1}\cos\theta + t^2}{r_k^2 - 2tr_k\cos\theta + t^2}$$

و ملاحظه کنیم که برای تعیین ماکسیمم و می‌نیمم بایستی ریشه‌ی معادله‌ی:

$$t^2\cos\theta - (r_k + r_{k-1})t + r_k r_{k-1}\cos\theta = 0$$

را در مقدار تابع قرارداد . باین ترتیب حاصل میشود :

$$M^2_k = \frac{r^2_k + r^2_{k-1} - 2r_k r_{k-1}(\cos^2\theta) + (r_{k-1} - r_k)(r^2_k + r^2_{k-1} - 2r_k r_{k-1}\cos 2\theta)^{1/2}}{2r^2_k \sin^2\theta}$$

چنانکه می‌بینیم ، M_k فقط بنسبت :

$$\varphi_k = \frac{r_{k-1}}{r_k} \tag{۱۸}$$

بستگی دارد :

$$M^2_k = \frac{1+\varphi^2_k - 2\varphi_k \cos^2\theta + (\varphi_k - 1)(1+\varphi^2_k - 2\varphi_k \cos 2\theta)^{1/2}}{2\sin^2\theta} \tag{۱۹}$$

و بعلاوه :

$$\lim\sup M_k = +\infty \Longleftrightarrow \lim\sup \varphi_k = +\infty .$$

چون در حالت دوم هستیم داریم :

$$\lim \sup \varphi_k = +\infty$$

و با استخراج یک دنباله از z_k میتوان فرض کرد :

$$\lim_{s\to\infty} \varphi_{k_s} = +\infty$$

ویا با همان نامگذاری قبلی فرض کرد :

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_k = +\infty ; \tag{۲۰}$$

این خاصیت برای هر زیر دنباله محفوظ خواهد ماند. اکنون ، بطریق مشابه قرار میدهیم :

$$t'_k = \frac{r_k + r'_{k+1}}{2\cos\theta} \tag{۲۱}$$

$$N'_k = \max\{p \in N \; ; \; n \leqslant p \Longrightarrow q_n \geqslant t'_k\}$$

بطوریکه با محاسبه‌ای کاملاً مشابه حاصل میشود :

$$w(z_k) \geqslant w(z'_{k+1}) - \sum_{n \leqslant N'_k} \alpha_n \operatorname{Log} \left| \frac{z_{k+1} - q_n}{z_k - q_n} \right| .$$

و اما اگر m_k می‌نیمم تابع $y_k(t)$ برای $o \leqslant t \leqslant 1$ باشد ، داریم :

$$\max_t \left| \frac{z_{k+1} - t}{z_k - t} \right| = \frac{1}{m_{k+1}} .$$

و از طرف دیگر محاسبه‌ای ساده نشان میدهد .

$$m_k = \frac{\varphi_k}{M_k} .$$

در نتیجه :

$$\left(\frac{1}{m_k}\right)^2 = \left(\frac{M_k}{\varphi_k}\right)^2$$

و با توجه به (۱۹) حاصل میشود :

$$\lim \frac{1}{m_k} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot$$

پس ، از نامساوی‌های :

$$w(z_k) \geqslant w(z'_{k+1}) - \text{Log}\left(\frac{1}{m_{k+1}}\right) \sum_{n \leq N'_k} \alpha_n$$

$$w(z_k) \geqslant w(z'_{k+1}) - \left(\sum_{n \geqslant 1} \alpha_n\right) \text{Log}\left(\frac{1}{m_{k+1}}\right)$$

نتیجه میشود که وقتی k بسوی بینهایت میل کند خواهیم داشت :

$$\lim\ w(z_k) \geqslant \lim w(z'_{k+1}) - \left(\sum_{n \geqslant 1} \alpha_n\right) \text{Log}\left(\lim \frac{1}{m_{k+1}}\right)$$

و یا :

$$b_\theta \geqslant a - (\Sigma\alpha_n) \text{Log}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

پس با این محاسبه‌ی مقدماتی حاصل میشود :

$$H(\theta) \leqslant \left(\sum_{n \geqslant 1} \alpha_n\right) \text{Log} \frac{1}{\sin\theta} \cdot \qquad (22)$$

تذکر ۱ - این روش از خاصیت

$$a = \limsup_{r \to o}\ w(re^{i\theta})$$

استفاده نکرد و در واقع میتوانستیم بجای a بنویسیم a_θ و قرار دهیم $H(\theta) = a_\theta - b_\theta$.

تذکر ۲ - گواینکه درضمن محاسبه دو حالت تشخیص دادیم و در یکی از آن دو حالت ثابت کردیم g_k بسوی صفر میل‌میکند ، نباید نسبت به این نتیجه خوش‌بین بود. زیرا عملاً ما هیچگونه‌اطلاعی را جمع بدنباله‌ی z_k نداریم. برعکس ، میتوان همیشه‌فرض کرد :

$$\lim \left| \frac{z_k}{k_{k+1}} \right| = +\infty$$

درنتیجه فقط تخمین حالت دوم کلی است.

تذکر ۳ - همانطورکه دربند گذشته دیدیم ، روش عالیتر نشان میدهد در واقع $H(\theta) = o$. علت اینکه ما با این روش به‌نتیجه‌ی دقیق نرسیدیم قربانیهائی بود که‌درضمن محاسبه انجام دادیم.

٤ ـ برگشت بمسألهٔ‌کلی

فرض کنیم v تابعی‌زیرهمساز روی C باشد ؛ تصریح کنیم v مقدار $-\infty$ را نیز میتواند اختیار کند اما متحداً مساوی $-\infty$ نیست. اندازهٔ وابسته به v را با μ نمایش دهیم :

$$\mu=\frac{1}{2\pi}\ \Delta v=\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{۲۳}$$

(مشتق گیری بمعنی نظریهٔ توزیع است). فرض کنیم v_R اندازهٔ‌مثبت تعریف شده روی تمام C بادستور زیر باشد : برای تابع پیوسته و با محمل فشردهٔ f داریم :

$$<v_R\ ,\ f>=\int_{|\zeta|<R} f(\zeta)d\mu(\zeta)\ . \tag{۲٤}$$

دراینصورت بموجب قضیهٔ تجزیهٔ رتیس (F. RIESZ) [۷] خواهیم داشت :

$$v=h\bullet v_R+H_R \tag{۲۵}$$

که در آن H_R تابعی است روی تمام C که در داخل قرص باز B_R بمرکز o و شعاع R تابعی است همساز و h همان تابع اصلی نظریهٔ پتانسیل لگاریتمی است :

$$h(\zeta)=\text{Log}\ |\ \zeta\ |\ .$$

ازاینجامعلوم میشود برای‌مسألهٔ‌مورد نظر ، فقط تحدید μ به قرصهای کوچک B_R اهمیت‌دارد.

درنتیجه از این پس فرض میکنیم خود تابع v بشکل پتانسیل‌اندازهٔ مثبت مانند μ است بطوریکه :

$$\begin{cases} v(z)=\int \text{Log}\ |\ z-\zeta\ |\ d\mu(\zeta); \\ z\in \text{supp}\mu\Longrightarrow\ |\ z\ |\ \leqslant 1\ , \end{cases} \tag{۲۶}$$

(منظوراز $\text{supp}\mu$ طبق معمول محمل اندازهٔ μ است).

چون میخواهیم تابع v درمرکزگسسته باشد ، بایستی :

اولاً ـ مقدار $v(o)$ مخالف $-\infty$ باشد ؛

ثانیاً ـ مرکز o نقطهٔ تجمع (point d'accumulation) محمل μ باشد. (این شرط ازقضیه اوانس ـ وازیلسکو (Evans – Vasilesco) [۸] نتیجه میشود).

درمثال‌نمونهٔ بند ۲ این نکات‌رعایت شده بود و بعلاوه محمل μ روی نیم خط ox بود. اکنون خواهیم دید‌که‌آن مثال در واقع حالت بسیار خاصی از یک قضیهٔ‌کلی است. قبلاً خاطرنشان سازیم‌که در حالت‌کلی $(n\geqslant 2)$ قضیهٔ تجزیهٔ ریتس برقرار است : تابع زیر همساز اصلی عبارتست از :

$$h(\zeta)=\mathrm{Log}\,\|\zeta\| \quad , \quad (n=۲)\ ,$$

$$h(\zeta)=\frac{-۱}{\|\zeta\|^{n-۲}} \quad , \quad (n\geqslant ۳)\ ,$$

وضریب Δv عبارتست از یک بخش بر اندازه‌ی کره‌ی واحد بعنوان سطح $(n-۱)$ بعدی :

$$\cdot\ \mu=\frac{۱}{\sigma_n}\,\Delta v$$

قضیه - تابع زیر همساز v روی‌فضای $\mathbf{R}^n$ ، نقطه‌ی $z_\circ$ از $\mathbf{R}^n$ و بخش A ازکره‌ی $\|z\|=۱$ مفروض‌اند. اگر بخش باز B ازکره‌ی $\|z\|=۱$ یافت شود بطوریکه :

اولاً - بخش بسته‌ای مانند C یافت‌میشود که در شرط $A\subset C\subset B$ صدق کند ؛

ثانیاً - یک همسایگی نقطه‌ی $z_\circ$ مانند U در $\mathbf{R}^n$ یافت میشود که در شرط :

$$\mathrm{supp}(\Delta v)\ \cap\{z_\circ+rb\ ;\ r>o\ ,\ b\in B\}\ \cap U=\varnothing \tag{۲۷}$$

صدق کند ، دراینصورت A بخشی است از مجموعه‌ی اشعه‌ی پیوستگی v در نقطه‌ی $z_\circ$.

اثبات - ازلم زیر استفاده میشود (بعلاوه تا پایان اثبات فرض میکنیم $z_\circ=o$) (۹) :

لم - درشرایط‌قضیه اگر محمل Δv را با S نمایش دهیم داریم : عددی مانند $\rho>o$ و عددی مانند α با شرط $o<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ یافت میشود بطوریکه برای هرنقطه مانند z از مخروط :

$$\Gamma=\{rc\ ;\ r\geqslant o, c\in C\}$$

و هر نقطه ζ از S که در شرایط $\|z\|<\rho$ و $\|\zeta\|<\rho$ صدق کنند داریم :

$$\|z-\zeta\|\geqslant\|\zeta\|\sin\alpha\cdot \tag{۲۸}$$

فعلاً لم را بپذیریم. قراردهیم :

$$C_n(\alpha)=۱\ ,\ (n=۲)$$
$$C_n(\alpha)=(\sin\alpha)^{۲-n}\ ,\ (n\geqslant ۳)$$
$$D_۲(\alpha)=\mathrm{Log}(\sin\alpha)$$
$$D_n(\alpha)=o\ ,\ (n\geqslant ۳)\cdot$$

باین ترتیب ، برای z و ζ در شرایط :

$$\|\zeta\|<\rho \ \text{ و }\ \|z\|<\rho \ \text{ و }\ \zeta\in S \ \text{ و }\ z\in\Gamma$$

داریم :

$$h(z-\zeta)\geqslant C_n(\alpha)h(\zeta)+D_n(\alpha)\cdot \tag{۲۹}$$

میتوان فرض کرد $o<\rho<\frac{۱}{۲}$ بطوریکه اگر v_ρ مساوی $h*v_\rho$ باشد داریم :

$$v_\rho(z)=\int_{\|z\|<\rho} h(z-\zeta)d\mu(\zeta)$$

ازاین پس قرار دهیم $v=v_\rho$ (ρ ثابت‌است). داریم(باقرا دادن H بجای H_ρ):

$$v(z)=\int h(z-\zeta)dv(\zeta)+H(z)$$

اکنون گوئیم وقتی $z\in\Gamma$ بسوی صفر میل میکند توابع $h(z-\zeta)$ بسوی $h(\zeta)$ میل میکنند و به موجب (۲۹) داریم :

$$|h(z-\zeta)|\leqslant C_n(\alpha)\,|h(\zeta)|-D_n(\alpha)$$

و اما با فرض $v(o)>-\infty$ داریم :

$$\left|\int h(\zeta)dv(\zeta)\right|=|v(o)-H(o)|<+\infty\cdot$$

درنتیجه شرایط قضیه‌ی تقارب زیر سلطه‌ی لبگ برقرار است. پس :

$$\lim_{\substack{z\in\Gamma\\ z\to o}} v(z)=\int h(\zeta)dv(\zeta)+H(o)=v(o)\cdot \tag{۳۰}$$

اکنون لم را ثابت کنیم :

اثبات لم - فرض کنیم ∂B و ∂C مرزهای B و C برروی کره باشند. باین‌ترتیب ∂B و ∂C دوبخش بسته ازکره میباشند و داریم $\partial B\cap\partial C=\varnothing$. پس ∂B و ∂C فاصله‌ای دارند اکیداً مثبت مانند d :

$$d=\inf\|b-c\|=\min\|b-c\|\quad,\ (b\in\partial B\ ,\ c\in\partial C)\cdot$$

بعلاوه این فاصله‌ی می‌نیمم در نقطه‌ای مانند b_1 از ∂B و نقطه‌ای مانند c_1 از ∂C تحقق می‌پذیرد :

$$d=\|b_1-e_1\|\cdot$$

اکنون قرار میدهیم :

$$\alpha=\min\left(\frac{\pi}{۴}\ ,\ \mathrm{Arc}\cos\vec{b_1}\cdot\vec{c_1}\right) \tag{۳۱}$$

منظور از $\vec{b_1}\cdot\vec{c_1}$ حاصلضرب داخلی b_1 و c_1 در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ است. داریم $\alpha>o$. زیرا اگر در یک فضای هیلبرت حقیقی دو عنصر b_1 و c_1 ازکره‌ی واحد در رابطه‌ی $b_1\cdot c_1=۱$ صدق کنند خواهیم داشت :

$$\|b_1-\lambda c_1\|^۲=(۱-\lambda)^۲$$

که نتیجه میدهد $b_1=c_1$. اکنون کافی است ثابت کنیم اگر z متعلق بمخروط Γ و ζ متعلق بمخروط Σ بمعادله‌های :

$$\Gamma = \{ rc \;;\; r \geqslant o \;,\; c \in C\}$$
$$\sum = \{ rs \;;\; r \geqslant o \;,\; s \notin B\}$$

باشند داریم :

$$\| z-\zeta \| \geqslant \| \zeta \| \sin\alpha \cdot$$

اگر $z=o$ باشد این رابطه واضح است. پس فرض کنیم $z \neq o$ و تصویر قائم ζ را روی خط $\mathbf{R}z$ با $P_z(\zeta)$ نمایش دهیم. فاصله‌ی ζ از خط $\mathbf{R}z$ عبارتست از $\| \zeta - P_z(z) \|$ و در رابطه‌ی زیر صدق میکند :

$$\| \zeta - P_z(\zeta) \|^{2} = \| \zeta \| \sin^{2}\theta$$

درحالیکه :

$$\| \zeta - z \|^{2} = \| \zeta \|^{2} + \| z \|^{2} - 2\zeta \cdot z$$

که در آن قرارداده‌ایم :

$$\theta = \mathrm{Arc}\cos[(\zeta \cdot z) / \| \zeta \| \; \| z \|]$$

اگر $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ باشد داریم $\| \zeta - z \|^{2} \geqslant \| \zeta \|^{2}$ پس بطریق اولی

$$\| z-\zeta \| \geqslant \| \zeta \| \sin\alpha \cdot$$

اگر $\theta < \frac{\pi}{2}$ باشد توجه میکنیم که لزوماً $\alpha \leqslant \theta$ خواهدبود. برای خاتمه‌ی اثبات لم کافی است فصل مشترک مخروطهای Γ و Σ را با گوی $\| z \| < \rho$ باندازه کافی کوچک درنظر بگیریم واضح است که داریم $S \cap U \subset \Sigma$.

اثبات لم و بهمین‌جا اثبات قضیه پایان پذیرفت.

تذکر ۱ - رابطه‌ی (۳.) که ثابت شد، در واقع بیش از حکم قضیه را در بردارد.(۱۰)

تذکر ۲ - واضح است که بجای $\frac{\pi}{4}$ هر عدد ثابت متعلق به $]o \,,\, \frac{\pi}{2}[$ را میتوان قرارداد.

۵ - یادآوریهای لازم

هرچند برای اکثر خوانندگان زاید است، از آنجا که مایلیم مقاله مورد استفاده‌ی دانشجویان و مهندسین جوان نیز باشد، لازم بنظر میرسد یادآوریهائی بشود.

در آنچه می‌آید فضای حقیقی $\mathbf{R}^n$ مجهز بحاصلضرب داخلی :

$$x \cdot y = (x_1 , \cdots , x_n) \cdot (y_1 , \cdots , y_n) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

میباشد و قرارمیدهیم : $\| x \| = \sqrt{x \cdot x}$ یعنی :

$$\| x \|^{2} = x_1^{2} + \cdots + x_n^{2} \cdot$$

فرض کنیم D یک میدان (بخش باز و یک پارچه) از $\mathbf{R}^n$ باشد.

تعریف ۱ ـ تابع $v : D \longrightarrow [-\infty , +\infty[$ را « زیر همساز» گوئیم هرگاه

(I) v متحداً مقدار $-\infty$ نیست ؛

(II) v نیم پیوسته از طرف بالا است ؛

(III) v همواره کوچکتر از میانگین خود روی سطح کره میباشد .

توضیح اینکه : (II) میگوید : برای هرعدد حقیقی c بخش $\{x \,;\, v(x) < c\}$ یک بخش باز از D است ؛

(III) میگوید : اگر $x_\circ$ نقطه‌ای از D و r عددی اکیداً مثبت $(r > o)$ باشندبطوریکه :

$$(x \in \mathbf{R}^n , \quad \| x - x_\circ \| \leqslant r) \Longrightarrow x \in D ,$$

دراینصورت داریم :

$$v(x_\circ) \leqslant \frac{1}{\sigma_n(r)} \int_{\| x - x_\circ \| = r} v(x) d\sigma_n(x)$$

که در آن منظور از $d\sigma_n$ جزء سطح روی کره و منظور از $\sigma_n(r)$ اندازه‌ی سطح کره است .

وجه تسمیه‌ی زیر همساز نیز همین خاصیت (III) است .

قضیه ۱ ـ اگر v زیر همساز باشد ، دراین صورت v یک توزیع تعریف میکند و داریم :

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 v}{\partial {x_n}^2} \geqslant o \, .$$

بعبارت دیگر لاپلاسین (Laplacien) تابع v بمعنی نظریه‌ی توزیع اندازه‌ایست مثبت .

اندءزه‌ی وابسته به v عبارتست از :

$$\mu = \frac{1}{\sigma_n(1)} \Delta v$$

قضیه ۲ ـ اگر توزیع T روی D در نامساوی $\Delta T \geqslant o$ صدق کند، دراینصورت T تابعی تقریباً زیر همسازاست‌بدینمعنی که تابعی‌زیرهمساز مانند v یافت میشود بطوریکه T و v همه جابرابرند جز روی یک بخش ناچیز برای اندازه‌ی لبگ (اصطلاح تقریباً زیر همساز را بخاطر presque sousharmonique آورده‌ایم). بعلاوه تابع v بطور یکتا مشخص‌میشود .

تعریف ۲ ـ تابع h را چنین تعریف میکنیم :

$$h(z) = \begin{cases} \operatorname{Log} \| z \| , & n = 2 \\ - \| z \|^{2-n} , & n \geqslant 3 \end{cases}$$

و « تابع‌زیرهمساز اصلی » (Fonction sousharmonique fondamentale) مینامیم .

تعریف ۳ - اگر μ اندازه‌ای‌مثبت روی $\mathbf{R}^n$ و با محمل‌فشرده‌باشد ، بنابتعریف حاصلضرب امتزاجی $h*\mu$ را « پتانسیل » اندازه‌ی μ گویند . در حالت $n=۲$ یک پتانسیل لگاریتمی و در حالت $n\geqslant ۳$ یک پتانسیل نیوتونی داریم . تصریح کنیم:

$$(h*\mu)\ (z)=\int h\ (z-\zeta)d\mu\ (\zeta);$$

انتگرال روی تمام $\mathbf{R}^n$ است و البته میتواند ببخشی باز شامل $\mathrm{supp}\mu$ (محمل μ) قناعت کند .

قضیه ۳ - پتانسیل اندازه‌ی مثبت μ با محمل فشرده تابعی است زیر همساز روی R^n .

قضیه ٤ - اگر v تابعی زیر همساز روی $\mathbf{R}^n$ و R عددی اکیداً مثبت باشد ، اندازه‌ای مثبت‌مانند v_R یافت میشود که محمل آن درگوی $\| z \| \leqslant R$ باشد و بعلاوه تجزیه‌ی زیر را داشته باشیم :

$$v=h*v_R+H_R$$

که در آن H_R تابعی است روی $\mathbf{R}^n$ که در داخل گوی $\| x \| < R$ همساز میباشد . بعلاوه v_R و H_R بطور یکتا برای v بدست میآیند .

قضیه ٥ - برای آنکه تابع زیر همساز v درنقطه‌ی $z_\circ$ از D پیوسته باشد ، لازم وکافی است تحدید v به محمل اندازه‌ی وابسته به v (یعنی به محمل Δv) درنقطه‌ی $x_\circ$ پیوسته باشد .

تعریف ٤ - بخش E از D مفروض است . میگوئیم E درنقطه‌ی $x_\circ$ از D نخ پر (non - effilé) است هرگاه :

۱° $x_\circ$ متعلق به چسبیدگی E است یعنی هرهمسایگی $x_\circ$ بخش E را تلاقی میکند ؛

۲° اگر v تابع زیر همساز غیر مشخصی باشد ، داریم :

$$\limsup_{\substack{x\to x_\circ \\ x\in E}} v(x)=v(x_\circ)\ .$$

اگر بخش E درنقطه‌ی $x_\circ$ نخ پرنباشد میگوئیم « نخ کشیده » (effilé) است .

قضیه ٦ - فرض کنیم $x_\circ$ نقطه‌ای از D و E پارهخطی‌بمبدأ $x_\circ$ است . دراینصورت : اگر $n=۲$ باشد ، E در نقطه‌ی $x_\circ$ نخ پر است و اگر $n\geqslant ۳$ باشد ، E درنقطه‌ی $x_\circ$ نخ کشیده است .

٦ - یادداشتها و مراجع

(۱) لغات و اصطلاحات‌فارسی که‌دراین مقاله آمده‌اند تا اندازه‌ی زیادی جنبه‌ی سوقت‌دارند و چه‌بسا از تنگی قافیه حکایت میکنند . لغت‌همساز بجای (harmonique) قبلاً بکار رفته است [٥] . لغت‌زیرهمساز برای (Sousharmonique) بی‌مناسبت‌نیست . امالغت‌چندی زیر همساز بجای (Plurisousharmonique) ممکن است درآینده‌ی نزدیکی جای خود را بلغت بهتری بدهد .

(۲) مسألهی حدشعاعی وبطور کلی تر بررسی یک تابع چند متغیر روی یک نیم خط ،مساله‌ای قدیمی است و بخصوص درنظریه‌ی توابع مختلط نتایج زیبائی بدست آمده است. اما این مسأله بیشتر در حالت یک نقطه‌ی مرزی مطرح میشود. مثلاً قضیه‌ی مشهور فاتو (Fatou) و تعمیم‌های آن بخاطر می‌آید [٦] و [۹]. فرقی بین آن مسائل بامسأله‌ای که دراین مقاله مطرح است دراینست که درآنها اکثراً تابع مورد نظر در داخل بخش باز Ω پیوسته و حتی تحلیلی حقیقی ویا همساز میباشد، درحالیکه اینجا تابع درهمسایگی نقطه‌ی مورد نظر تعریف شده اما پیوسته نیست. روی نقاط مرزی برای توابع زیر همساز نیز کار بسیار شده‌است [٤]. بهرحال همین مسائل « درونی » نیز چندان ساده ویا خالی از فایده نیست [۱۱] و [۱۲].

(۳) این مثال را در پائیز ۱۳٤٦ درگزارش گواهینامه‌بررسیهای ژرف (D. E. A.) آورده بودیم. تکثیر آن و هم‌چنین روش مقدماتی تخمین را باین زمان گذاشتیم که همراه نتیجه‌ای کلی‌تر عرضه شود. از نتایج روی توابع چندی زیر همساز بعمدا سخنی نرفته است تا مقاله سنگین نشود.

(٤) برای بررسی توابع زیر همساز بخصوص مراجعه شود به [٤]. در[٤] هم‌چنین منابع اصلی نظریه‌ی پتانسیل کلاسیک با اشاراتی گویا معرفی میشوند. در سطح این مقاله هیچ جای‌صحبت‌از نظریه‌های اصولی پتانسیل نیست.

(٥) راجع بنظریه‌ی اندازه‌هاوبطور کلی مقداری از حساب جامعه که دراینجا بکار رفته است‌میتوان هیچگونه مرجعی را معرفی نکرد. معذلک برای انتگرال ونظریه‌ی مقدماتی توزیع کتاب گیشارده [٥] وبرای نظریه‌ی توزیع کتاب شوارتز [۸] را معرفی میکنیم. مقداری از این نظریه بزبان فارسی در دانشکده علوم دانشگاه‌تهران عرضه میشود، مثلاً به [۱۳] مراجعه شود.

(٦) این نمونه کمک میکند مثال‌های دیگری ساخته شود. مثلاً اگر تعداد معدودی نقطه را از دایره‌ی $|z| = 1$ برداریم و باقیمانده را A بنامیم میتوان تابعی زیر همسازساخت مانند v بطوریکه $A_v = A$. مثال‌های دیگری نیز میتوان ساخت که بموقع خود معرفی خواهیم کرد.

(۷) قضیه ٤ یادآوریها. برای قضیه‌ی تجزیه‌ی ریتس درحالت یک نا معادله‌ی امتزاجی

$$A \cdot T \geqslant 0$$

رجوع شود به [۸] صفحه ۲۱۹.

(۸) قضیه ٥ یادآوریها. برای اثبات رجوع شود به [٤] صفحه ٤۹.

(۹) اساساً اثبات‌شامل دوقسمت‌است: یکی استفاده از قضایای نظریه‌ی پتانسیل وهم‌چنین‌قضایای تقارب انتگرال، دیگری استفاده از فنون مقدماتی فضاهای R^n اقیلدسی. قسمت دوم را که ساده‌تر است در لم خلاصه میکنیم.

(۱۰) درواقع این قضیه‌میگوید اگر بخشی مانند E از فضای R^n با محمل اندازه‌ی وابسته به v در نقطه‌ی z_0 « زاویه بسازد » دراینصورت تحدید v به E درنقطه‌ی z_0 پیوسته است:

تعریف ـ دوبخش E و F از $\mathbf{R}^n$ مفروض‌اند. میگوئیم E و F درنقطه‌ی z_0 زاویه میسازند اگر مخروطهای بسته‌ی Γ و Σ یافت شوند بطوریکه:

۱° فصل مشترك Γ و Σ منحصر است بنقطه‌ی z^0؛

۲° اندوده (germe) مخروط Γ در نقطه‌ی z_0 شامل اندوده‌ی بخش E درنقطه‌ی z_0 میباشد، همچنین اندوده‌ی Σ شامل اندوده‌ی F است.

ـ برای مفاهیم مقدماتی روی حد بالائی و حد پائینی دانشجویان را بمطالعه‌ی [۱] دعوت میکنیم.

ـ برای مفاهیم روی توابع چندی زیرهمساز محققین را به [۲] و [۷] مراجعه میدهیم. بخصوص در رابطه با مقاله‌ی حاضر یادآوری میکنیم هر تابع چندی زیر همساز روی $\mathbf{C}^m$ تابعی است زیر همساز روی $\mathbf{R}^{2m}$ [۲].

فهرست منابع

(BIBLIOGRAPHIE)

[۰] ـ افضلی پور: «توابع متغیر مختلط»، انتشارات دانشگاه تهران شماره ۰، تهران، ۱۳۲۸.

[۱] ـ آوانیسیان: «مقدمه برآنالیزنوین»، از نشریات دانشگاه ملی ایران، تهران، ۱۳٤۱.

[2] AVANISSIAN, V. « Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublment sousharmoniques », Ann. ENS, t. 78 (I96I), pp 101 - 161.

[3] BRELOT, M. « Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d' un point », Act. Sc. et Ind. n° 139, Hermann, Paris, 1934.

[4] BRELOT, M. « Eléments de la théorie classique du potentiel », 3e éd. Les cours de Sorbonne, C. D. U., Paris, 1965.

[5] GUICHARDET, A. « Calcul Intégral », coll. U, Armand Colin, Paris, 1969.

[6] HOFFMAN, K. « Banach Spaces of Analytic Functions », Prentice - Hall Ser. Mod. An., New Jersey, 1962.

[7] LELONG, P. « Plurisubharmonic functions and positive differentrial forms », Gordon Breach, New York, 1968.

[8] SCHWARTZ, L. «Théorie des distributions », Hermann, Paris, 1967.

[9] VALIRON , G. «Fonctions analytiques » , Presses Universitaires de France , Paris , 1954.

[10] VLADIMIROV , S. V. « Methods of the theory of functions of several complex variables »
(ترجمه از روسی)

[11] CHADEMAN , A . « Sur la limite radiale des fonctions plurisousharmoniques en un point isolé de la frontière » , (Rapport de D. E. A. , Paris , 1967) , à paraître

[12] CHADEMAN , A. « Sur les notions élémentaires de la htéorie spectrale » , Thèse de 3e eycle , Paris , 1970 .

[۱۳] «نظریه‌ی توزیع» ، سلسله سخنرانیهای ریاضی بزبان فارسی ، دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران ، ۱۳۵۰

Exemple d'applications des théorèmes de convergence (Calcul Intégral) aux limites radiales des fonctions

Arsalan Chademan

(Faeulté Technique , Université de Téhéran)

Abstract

Cet article contient un résultat, probablement inédit, sur la limite radiale des fonctions sousharmoniques. Mais il s'occupe avant tout d'un essai de méthode, invitant ainsi les jeunes ingénieurs iraniens et les mathématiciens appliquées débutants à s'initier aux techniques fonctionnelles.

On poursuit le plan suivant : 1 - Position d'un problème général ; 2 - Construction d'un exemple type ; 3 - Effort avec une méthode plus élémentaire ; 4 - Retour au problème général ; 5 - Rappels ; 6 - Notes et références.

I. - Le résultat général se trouve dans la section 4. Dans le résumé, il est préférable de le présenter en premier lieu.

DEFINITION. - Soient S et C des parties de $\mathbf{R}^n$ telles que l'intersection des adhérences $\bar{S}$ et $\bar{C}$ soit non vide. Soit $z_0 \in \bar{S} \cap \bar{C}$. On dira que « **C fait un angle avec** S **au point** z_0 » si la condition suivante est vérifiée : il existe Γ et Σ **cônes fermés** (non nécessairement convexes) de $\mathbf{R}^n$ tels que :

(i) $\Gamma \cap \Sigma = \{z_0\}$;

(ii) au point z_0, le germe de C (resp. S) est inclus dans le germe de Γ (resp. Σ) .

THEOREME. - Soient v une fonction sousharmonique dans $\mathbf{R}^n$, S le support du laplacien Δv de v , z_0 un point de S et A une partie de $\mathbf{R}^n$ vérifiant $z_0 \in \bar{A}$. **pour**

que la restriction de v à A soit continue en $z_\circ$, i. e.

$$\lim v(z) = v(z_\circ) \quad , \quad (z \in A \, , \, z \longrightarrow z_\circ) \, ,$$

il suffit que A fasse un angle avec S au point $z_\circ$.

Ce résultat est analogue au théorème de limites radiales « non tangentielles» de Fatou (voir par exemple [6]) ; mais ce n'est qu'une apparence. Il se rapproche plutôt du fameux théorème d'Evans - Vasilesco (voir par exemple [4] , page 49) ; mais il n'en est pas un simple corollaire ! Il est facile de donner des exemples pour voir que la condition $A \bigcap S = \varnothing$ ne peut pas substituer la conditlon indiquée.

II. - Parlons un peu des trois premières sections:

1 - Soit f une fonction à valeurs dans la droite achevée $[-\infty \, , \, +\infty]$ définie sur un domaine D de $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$) ; f est supposée d'une certaine classe *P*. Il s'agit d'éudier les **rayons de continuité** de f représentés par la partie $A_f(z_\circ)$ de la sphère unité :

$$(1) \qquad A_f(z_\circ) = \{ z \in \mathbf{R}^n \, , \, \| z \| = 1 \quad | \quad \lim_{\substack{t > \circ \\ t \to \circ}} f(z_\circ + tz) = f(z_\circ) \} \, ;$$

$z_\circ$ est un point de discontinuité de f.

La classe *P* sera ici la classe des fonctions sousharmoniques. Des problèmes de construction et de détermination se posent.

2 - Construire une fonction sousharmonique dans le plan $\mathbf{R}^2$ à valeurs positives ($\geqslant \circ$) discontinue à l'origine et telle que $A_v(O) = \{ (1 \, , 0) \}$. La réponse typique est donnée par $v = \exp(w)$, où :

$$(2) \qquad w(z) = \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n \operatorname{Log} | z - q_n |$$

(α_n) et (q_n) sont deux suites données de nombres rels tels que :

$$(i) \qquad 1 = \alpha_1 \quad , \quad \alpha_n > \alpha_{n+1} > \circ \quad , \quad \Sigma \alpha_n < +\infty \, ;$$

$$(ii) \qquad 1 = q_1 \quad , \quad q_n > q_{n+1} \quad , \quad \lim q_n = \circ \; ;$$

$$(iii) \qquad -\infty < \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n \log q_n$$

La démonstration utilise de manière essentielle le théorème de la convergence dominée de Lebesgue , et aussi la convergence vague d'une série de mesures.

3. - Donner une estimation, pour la fonction w de la section précédente, de

$$(3) \qquad H(\theta) = \limsup w(re^{i\theta}) - \liminf w(re^{i\theta}), \; (r > 0, r \to 0),$$

sans utiliser les théorèmes de convergence du calcul intégral.

La méthode utilisée pourra servir ailleurs. Cependant, elle est assez pénible et n'abboutit finalement qu'au résultat suivant :

$$H(\theta) = 0, \text{ si } \frac{\pi}{2} \leqslant |\theta| \leqslant r; \; H(\theta) \leqslant (\Sigma \alpha_n) \operatorname{Log} \frac{1}{\sin\theta}, \text{ si } 0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Or, nous avions prouvé dans la section 2, grâce à des instruments de l'analyse fonctionnelle (accessibles aux jeunes ingénieurs), le vrai résultat $H(\theta) = 0$ pour $0 < |\theta| \leqslant \pi$.