تحلیل دینامیکی و آنالیز سازه‌های ساندویچی

دکتر محمود موسوی مشهدی

استادیار گروه مهندسی مکانیک ـ دانشکده فنی ـ دانشگاه تهران

مهندس فرهاد جاویدراد

دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک ـ دانشکده فنی ـ دانشگاه تهران

مهندس علی شمسیان

عضو هیئت علمی دانشکده مهندسی مکانیک ـ دانشکده فنی ـ دانشگاه رازی باختران

چکیده

در این مقاله روش در تحلیل دینامیکی سازه‌های ساندویچی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. به این منظور یک برنامهٔ کامپیوتری به زبان فورترن ۷۷ نوشته شده که عملیات آنالیز دینامیکی سازه‌های ساندویچی را از روش بی‌همتهی انجام می‌دهد. از این برنامه علاوه بر تعیین بسامدهای طبیعی و نرمال می‌توان برای به دست آوردن پاسخ دینامیکی سازه به شرایط اولیه (ارتعاش آزاد) و به نیرو (ارتعاش اجباری) استفاده نمود. در این تحقیق با حل چند مسئله به کمک برنامهٔ تهیه شده اثر جرم متمرکز، شرایط تکیه‌گاهی و اثر نوع جزءبندی بر بسامدهای طبیعی تیرها و صفحات ساندویچی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. و در نهایت بسامدهای طبیعی یک صفحه ساندویچی با یک صفحهٔ سادهٔ همجنس و هموزن مقایسه شده است.

مقدمه

سازه‌های ساندویچی به خاطر سبکی وزن و مقاومت بالا در صنایع و خصوصاً صنایع فضائی نقش بسیار اساسی دارند. تحلیل این سازه‌ها در مقایسه با سازه‌های ساده همگن از پیچیدگی بیشتری برخوردار است، لذا تحلیل‌گران سازه مقالات کمتری در مقایسه با سازه‌های سادهٔ همگن در این خصوص انتشار داده‌اند. تحلیل استاتیکی و دینامیکی این سازه‌ها به روش انتگرال‌گیری عددی در مراجع [۳-۱] آمده است. اما تاکنون طبق آخرین بررسیهای به عمل آمده آنالیز بر روی این سازه‌ها انجام نپذیرفته است، اگر کاری هم در این خصوص انجام گرفته مقاله‌ای منتشر شده در این باب در دست نیست.

در مرجع [۲] روشهای انتگرال‌گیری عددی در تحلیل دینامیکی سازه‌های ساندویچی به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است. این روش اغلب برای بررسی پاسخ‌دهی سازه‌ها در مواردی که نیروی وارد بر سازه آنی است و یا تغییرات آن (مانند حالات ضربه) شدید است، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در حالیکه "روش بی‌همتهی"[۱] در مواردی که بارگذاری روی سازه تغییرات خیلی شدید ندارد (مثل بارگذاری هارمونیک) یا در حالت ارتعاش آزاد (پاسخ به شرایط اولیه تغییر مکان یا سرعت)، مورد استفاده قرار می‌گیرد. علاوه بر آن تعداد عملیات محاسباتی در روش انتگرال‌گیری عددی، با تعداد مقاطع زمانی مورد بررسی که ممکن است بسیار زیاد باشد، در حالی که در روش مودال پس از به دست آمدن مودهای نرمال و بسامدهای طبیعی می‌توان پاسخ دینامیکی را برای هر تعداد مقاطع زمانی مورد نظر به سرعت محاسبه نمود.

برای تعیین پاسخ دینامیکی از روش مودال، ابتدا باید فرکانسهای طبیعی و مودهای نرمال (حداقل چند مود و بسامد اول سازه) محاسبه شوند، که این امر به حل یک "مسئله ویژه مقداری"[۲] منجر می‌شود. حل مسائل ویژه مقداری از روشهای گوناگون میسر است. اما یکی از مفیدترین روشها برای مسائل ارتعاشات سازه‌ها، "روش تکرار زیر فضا"[۳] است که توسط "بت"[۴] ساخته شده است.

در این مقاله ابتدا روش مودهای نرمال و بسامدهای طبیعی سازه از روش تکرار زیر فضا مورد بررسی قرار می‌گیرد و سپس پاسخ دینامیکی سازه‌های ساندویچی به نیرو و یا شرایط اولیه تعیین می‌شوند. در پایان با حل سه مسئله با برنامهٔ کامپیوتری گسترش یافته علاوه بر تعیین مودهای نرمال و بسامدهای طبیعی برای آنان مواردی از قبیل، اثر جرم متمرکز، اثر تکیه‌گاه و اثر نوع جزء در بسامدهای طبیعی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱- روش مودال در تحلیل دینامیکی سازه‌ها:

به منظور تحلیل دینامیکی یک سازه با استفاده از روش اجزای محدود می‌بایست اول سازه را به اجزای محدود تقسیم کرده، ماتریسهای جرمی و سختی را برای هر جزء به دست آورد، و سپس ماتریسهای جرمی و سختی هر جزء را بر ماتریس جرمی و سختی کلی جزء سوار کرد. معادلات مربوط به تعیین ماتریس سختی سازه‌های ساندویچی در مرجع [۲] به صورت کامل آمده است. لذا در این مقاله از چگونگی تشکیل ماتریس سختی صحبتی به عمل نخواهد آمد. چگونگی تشکیل ماتریس جرمی سیستم در این مقاله بطور اختصار ارائه خواهد شد.

با معلوم بودن ماتریسهای جرمی و سختی می‌توان با استفاده از معادلهٔ زیر (در حالت غیرمیرا) تغییر مکان گره‌ای سازه را نسبت به زمان تعیین نمود.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (۱)$$

که در آن $[K]$ ماتریس سختی کلی و $[M]$ ماتریس جرمی کلی سازه است. $\{F\}$ بردار نیروهای گره‌ای وارده و $\{U\}$ بردار تغییر مکان گره‌های مدل اجزاء محدود می‌باشد که تابعی از زمان است. بنابراین $\{\ddot{U}\}$ بردار شتابهای گره‌ای خواهد بود. در نبود بارگذاری خارجی، هر درجهٔ آزادی غیر مقید در معادله (۱) دارای یک حرکتهای هارمونیکی همفاز با بسامد ω است.

$$\{U\} = \{\bar{U}\}\sin\omega t \quad (۲)$$

$$\{\ddot{U}\} = -\omega^2\{\bar{U}\}\sin\omega t$$

که در آن $\{\bar{U}\}$ بردار دامنهٔ ارتعاش گره‌ها و ω بسامد طبیعی ارتعاش است، اگر معادلات (۲) را در معادله (۱) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$([K] - \omega^2[M]\{\bar{U}\} = \{0\} \quad (۳)$$

در معادله (۳) به دلیل اینکه $\{\bar{U}\}$ صفر نیست، باید دترمینان عبارت داخل پرانتز صفر باشد. بنابراین با فرض $\lambda = \omega^2$ یک مسئله ویژهٔ مقداری به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\det([K] - \lambda[M\}) = 0 \quad (۴)$$

از معادله (۴) n مقدار (که n تعداد درجات آزادی غیرمقید

---

1 - Superposition mod　　2 - Eigen value problm　　3- Iteration method subspace　　4- Bathee

سازه است) برای ویژهٔ مقداری λ به دست می‌آید و به ازای هر مقدار λ (بسامد طبیعی) یک بردار {X} نیز وجود دارد که در رابطه (۳) (به جای {U}) صدق می‌کند، که آن مود نرمال مربوط به آن بسامد نامیده می‌شود. مودهای نرمال در حقیقت موقعیت گره‌های سازه را نسبت به یکدیگر در بسامدهای طبیعی نشان می‌دهند. مودهای نرمال دارای خواص ویژه‌ای هستند که اهمیت آنها در حل مسائل ارتعاشی افزایش می‌یابد. اول اینکه آنها نسبت به ماتریسهای متقارن سختی و جرمی متعامد هستند، یعنی $\{X_i\}^T[M]\{X_j\}=0$ و $\{X_i\}^T[K]\{X_j\}=0$ برای کلیه $i\neq j$. دوم اینکه اگر بر حسب ماتریس جرمی به صورت واحد درآیند، یعنی $\{X_i\}^T[M]\{X_i\}=I$، حاصلضرب مربع آنها نسبت به ماتریس سختی بسامدهای طبیعی را به دست می‌دهند، یعنی $\{X_i\}^T[K]\{X_j\}=\omega_i^2$. اگر n بردار مودهای نرمال را به طور ستونی در یک ماتریس قرار دهیم یک ماتریس $(n \times n)$ به دست خواهیم آورد، که ماتریس مودال نامیده می‌شود.

$$[X] = [\{X\}_1\{X\}_2 \dots \{X_n\}]$$

$$[X]^T [M] [X] = [I] \qquad (۵)$$

$$[X]^t [K][X] = [\omega^2]$$

که در آنها [I] ماتریس واحد و $[\omega^2]$ یک ماتریس قطری است که اعضای آن بسامدهای طبیعی هستند.

۳- تعیین ماتریس جرمی

یک ماتریس جرمی در حقیقت مدل ناپیوستهٔ جرم پیوستهٔ سازه است. این جرمها به صورت گلوله‌ای در گره‌های اجزاء متمرکز می‌شوند و ماتریسی را تشکیل می‌دهند که به عنوان ماتریس جرمی سازه شناخته می‌شود. دو روش متداول برای تعیین ماتریس جرمی موجود است.

الف: "ماتریس جرمی سازگار"[1] که در آن توزیع جرم در گره‌های یک جزء بر مبنای توابع شکلی که برای تغییر مکانها تعریف شده‌اند صورت می‌گیرد. در این حالت ماتریس جرمی یک ماتریس نواری و متقارن است که طول "نصف نوار"[2] آن برابر با مرتبهٔ ماتریس سختی است.

ب: "روش جرم گلوله‌ای"[3] در این روش جرم کلی سازه با نسبتی در گره‌های جزء متمرکز می‌شود، بطوری که جرم کلی متمرکز شده در گره‌ها برابر با جرم کلی جزء مربوطه باشد. در این حالت ماتریس جرمی یک ماتریس قطری است. در ضمن باید متذکر شد که در روش الف نیز بی‌همتهی جرمهای توزیع شده در گره‌ها مساوی با جرم کلی اجزاء است.

روش (الف) اصولاً توزیع دقیقتری از جرم را نسبت به روش (ب) ارائه می‌دهد. اما ماتریس جرمی در این حالت نواری بوده و این موضوع تعیین ویژه مقداری را مشکلتر می‌کند و ممکن است مقرون به صرفه نباشد. در حالیکه روش (ب) به دلیل قطری بودن برای مسئله ویژه مقداری مناسبتر است.

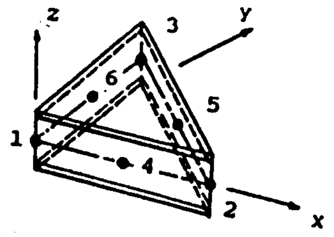
در این تحقیق روش استفاده شده ترکیبی از دو روش مذکور است مزیت روش (ب) یعنی قطری بودن را داراست و عناصر روی قطر آن از روش (الف) محاسبه می‌شوند. در حقیقت در این روش ابتدا عناصر روی قطر ماتریس جرمی از روش (الف) محاسبه می‌شود و سپس (با روش ارائه شده در مرجع [۴]) یک پارامتر طوری محاسبه می‌شود که با ضرب آن در جرمهای محاسبه شده، جرم کلی جزء حفظ می‌شود. ماتریس جرمی برای یک جزء مثلثی مرتبه بالا که در این تحلیل مورد استفاده قرار گرفته عبارتست از:

$$[M]= \int\rho\ [N]^T[N]\ dv=2 \int\rho_f\ [N]^T[N]\ dv_f + \int\rho_c[N]^T[N]\ dv_c \qquad (۶)$$

---

1 - Consistent　　2 - Half Bandwidth　　3- Lumped

که در آن $[N]^T = [N_1\ N_2\ N_3\ N_4\ N_5\ N_6]$ توابع شکلی هستند که در محاسبه ماتریس سختی جزء تخت مثلثی به کار گرفته شده‌اند [مرجع ۲]. ρ_f و ρ_c به ترتیب جرم حجمی صفحات روکش و هسته ساندویچ هستند. شکل (۱) جزء به کار گرفته شده در تحلیل را نشان می‌دهد. انتگرال (۶) برای هر جزء به سادگی با استفاده از روش گاوس قابل محاسبه خواهد بود. در برنامهٔ کامپیوتری تهیه شده، از روش سه‌نقطه‌ای گاوس استفاده شده است. پس از محاسبه [M] برای هر جزء ماتریس جرمی کل سازه به دست می‌آید.



شکل (۱) جزء تخت مثلثی

۳- روش حل مسئله ویژهٔ مقدارها با استفاده ازتکرار زیر فضا

یکی از روشهای شناخته‌شده در حل مسائل ویژهٔ مقدارها روش تکرار زیرفضاست. این روش به دلیل اینکه فضای (n×n) مسئله را به یک فضای کوچکتر (n×m) بدل می‌کند که در آن n تعداد کل درجات آزادی مسئله است و m تعداد مودهای خواسته شده است که معمولاً از تعداد درجات آزادی کل مسئله کمتراست. این عمل می‌تواند در حل مسئله تسریع نماید. در مسائل سازه‌یی که معمولاً فقط چند مود اول مورد احتیاج است استفاده از روشهائی که تمامی ویژهٔ مقدارها را پیدا می‌کنند اقتصادی نیست.

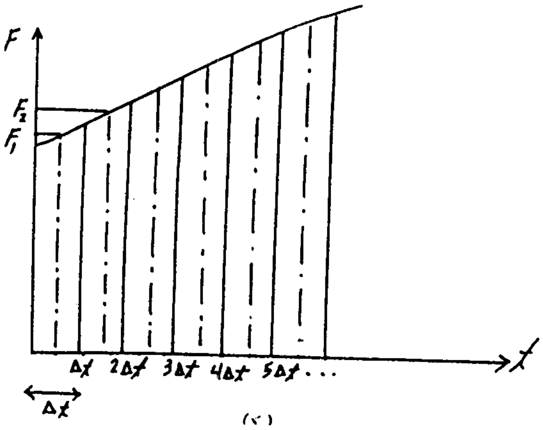
همانطوری که قبلاً بیان شد، روش تکرار زیرفضا می‌تواند در تحلیل مسائل ارتعاشات بسیار مؤثر واقع شود.

اهمیت این روش اولاً بر اساس انتخاب بردار اولیه (نقطه شروع اولیه) است که بر اساس آن مسئلهٔ واقعی (n×n) به یک فضای کوچکتر (n×m) تبدیل شده و عملیات در این فضای کوچکتر انجام میشود. ثانیاً همگرائی این روش سریع است. این موضوع در حل مسائل ارتعاشات سازه‌های ساندویچی بررسی شده است. البته سرعت جواب کاملاً بستگی به انتخاب بردار اولیه دارد. در برنامه کامپیوتری نوشته شده بردارهای تکرار اولیه در برنامه بوجود می‌آیند و این بردارها طوری در نظر گرفته شده‌اند که در درجات آزادی گیردار سازه، مقدار آنها صفر باشد تا هرچه بیشتر به جواب واقعی نزدیکتر باشد و ضمناً استقلال خطی آنها نیز حفظ گردد. الگوریتم برنامهٔ نوشته شده برای حل ویژهٔ مقدارها در مرجع [۴] بطور کامل آورده شده است.

۴- تعیین پاسخ به نیروی دینامیکی یا شرایط اولیه:

پاسخ یک سیستم دینامیکی به شرایط اولیه (ارتعاش آزاد) و یا پاسخ به نیروی برانگیزنده (ارتعاش اجباری) را می‌توان با معلوم بودن بسامدهای طبیعی و مودهای نرمال آن سیستم، محاسبه نمود. اگر سیستم با بسامد طبیعی یا یکی از بسامدهای طبیعی ارتعاش کند تمام نقاط آن جسم بطور هم فاز ارتعاش سینوسی خواهند داشت که موقعیت این ذرات نسبت به یکدیگر مطابق با مود نرمال مربوطه خواهد بود. با معلوم بودن مودهای نرمال (ماتریس مودال) می‌توان دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم سیستم دینامیکی که مرتب می‌باشند را مستقل نمود و سپس هر معادلهٔ دیفرانسیل مستقل را برای هر درجهٔ آزادی مربوطه مستقلاً حل نمود. و سپس از جمع مودهای مختلف (که معمولاً چند مود اول کافی

هستند) پاسخ کلی را به دست آورد. برای اینکه عمومیت برنامهٔ کامپیوتری نوشته شده حفظ شود، پاسخ به صورت عددی محاسبه می‌شود و نیرو یا نیروهای اعمال شده نیز به صورت عددی در مقاطع زمانی Δt به برنامه داده می‌شوند. بدین صورت می‌توان هر نیروی دلخواه را به پوستهٔ ساندویچی اعمال نمود (شکل ۲).



شکل (۲) توزیع نیرو در مقاطع زمانی Δt

هر تابع نیروی اعمال شده را می‌توان به صورت نیروهای ثابت (ضربه) در مقاطع زمانی کوچک فرض نمود و مقدار آن را در فایل داده‌ها وارد نمود.

برای حل با استفاده از ماتریس مودال فضای $[\vec{X}]$ را به فضای $[\vec{Y}]$ که در آن سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی، مستقل هستند، تبدیل می‌کنیم.

$$\vec{X}(t) = [X]\,\vec{Y}(t)$$

$$[M]\,[\ddot{\vec{X}}(t)] + [K]\,[\vec{X}(t)] = [\vec{F}]$$

$$[M][X][\ddot{\vec{Y}}(t)] + [K][X][\vec{Y}(t)] = [\vec{F}] \qquad (۸)$$

$$[X]^T[M][X][\ddot{\vec{Y}}(t)] + [X]^T[K][X]^T[\vec{Y}(t)] = [X]^T[\vec{F}]$$

$$[M_G]\,[\ddot{\vec{Y}}(t)] + [K_G][\vec{Y}(t)] = [\vec{F}_G]$$

چون مرتبهٔ ماتریس $[X]$، $n\times m$ (که در آن n تعداد کل درجات آزادی و m تعداد مودهای خواسته شده است که در حل شرکت دارند) بنابراین مرتبه ماتریس $[M_G]$، $(m\times m)$ خواهد بود که خیلی کوچکتر از $(n\times n)$ است و به همین ترتیب مرتبهٔ ماتریس $[K_G]$ نیز $(m\times m)$ بوده و بردار $\vec{F}$ نیز دارای m مؤلفه است. بدین ترتیب سیستم معادلات دیفرانسیل (۸) اولاً مستقل بوده و ثانیاً مرتبهٔ آن خیلی کوچکتر از مرتبهٔ مسئلهٔ اصلی است بنابراین حل آن خیلی ساده است.

اگر ماتریس مودال نسبت به جرم، به صورت واحد در آمده باشد آنگاه:

$$[X]^T\,[M]\,[X] = [M_G] = [I] \qquad (۹)$$

$$[X]^T\,[K]\,[X] = [K_G] = [\omega_i^2] \qquad (۱۰)$$

که در آنها $[I]$ ماتریس واحد $(m\times m)$ و $[\omega_i^2]$ ماتریس قطری $(m\times m)$ است که اعضای روی قطر آن مجذور بسامدهای طبیعی $\omega_1^2,\ldots,\omega_m^2$ می‌باشند. بنابراین معادلات دیفرانسیل (۸) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$Y_i(t) + \omega_i^2 Y_i(t) = F_{Gi} \qquad i= 1,2,.....m \quad (۱۱)$$

حل کل معادلات (۱۱) بسادگی قابل انجام می‌باشد مرجع [۴]. بعد از یافتن پاسخ در فضای $\vec{Y}(t)$، با تبدیل معکوس می‌توان پاسخ را در فضای $\vec{X}(t)$ نیز تعیین نمود.

مسئله (۱)

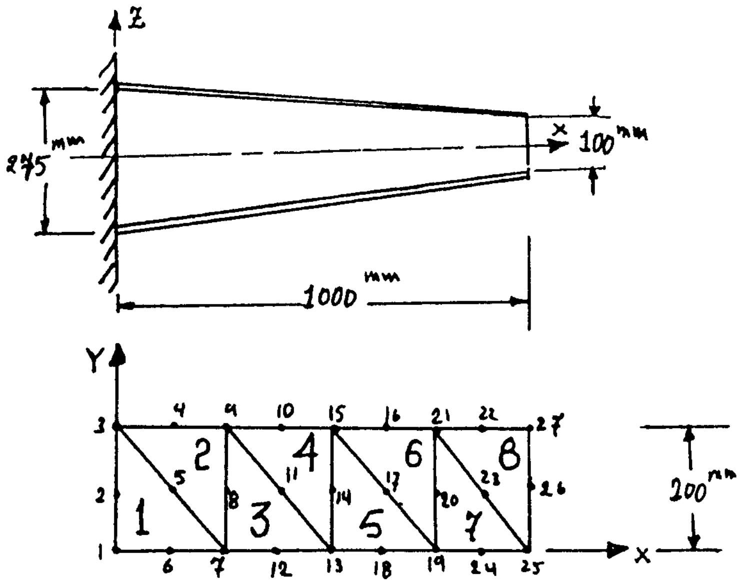
تیر ساندویچی با ضخامت متغیر: هندسه و مواد تشکیل‌دهندهٔ تیر ساندویچی یکسر گیردار با ضخامت متغیر در شکل (۳) داده شده است.

الف) تیر مذکور تحت تغییر مکان اولیه 0.3mm در انتهای آزاد قرار گرفته است.

ب) به منظور بررسی جرم متمرکز روی پوستهٔ ساندویچی

جرم 10Kg در انتهای آزاد تیر قرار داده شده است. (5Kg در گره 26و 2.5kg در گره 25و 2.5Kg در گره 27).هدف در این بخش مسئله بررسی اثر بار متمرکز بـر انـتهای تـیر و مقایسه بسامدهای طبیعی با حالت (الف) می‌باشد.

پرکننده پلاستیک	صفحات روکش آلومینیمی
$E_c = 10\times 10^3 N/mm^2$	$E_f = 100\times 10^3 N/mm^2$
$\nu_c = 0.3$	$\nu_f = 0.3$
$\rho_c = 1\times 10^{-7}$ kg/mm^2	$\rho_f = 1\times 10^{-6}$ kg/mm^3



شکل (۳) تیر مورد تحلیل و نمای جزءبندی در صفحهٔ xy

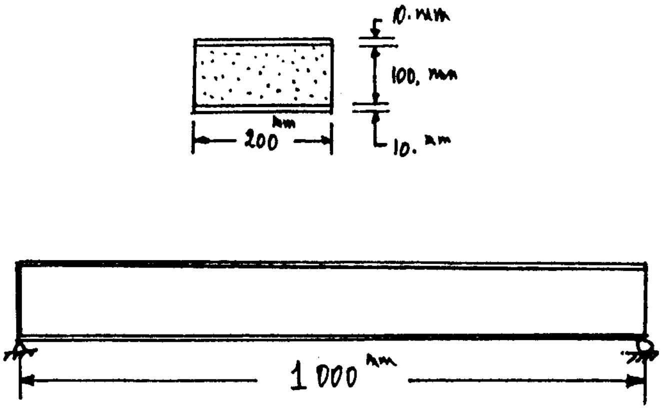
در این مثال بسامدهای طبیعی بـرای چـهار مـود اول بـه دست آمده است. در جدول (۱) مقایسه بسـامدهای طـبیعی نشان داده شده است. در حالت جـرم مـتمرکز هـمانگونه کـه انتظار می‌رود بسامدهای طبیعی کوچکتر مـی‌باشند. در ایـن حالت با افزایش جرم به سازه میزان جرم سازه افـزایش یـافته اما سختی آن ثابت باقیمانده است، در نتیجه بسامدهای طبیعی کاهش یافته‌اند.

جدول ۱ـ مقایسه بسامدهای طبیعی

با جرم متمرکز	بدون جرم متمرکز	
7.148	28.775	ω_1
28.77	39.28	ω_2
47.73	127.04	ω_3
14.03	143.3	ω_4

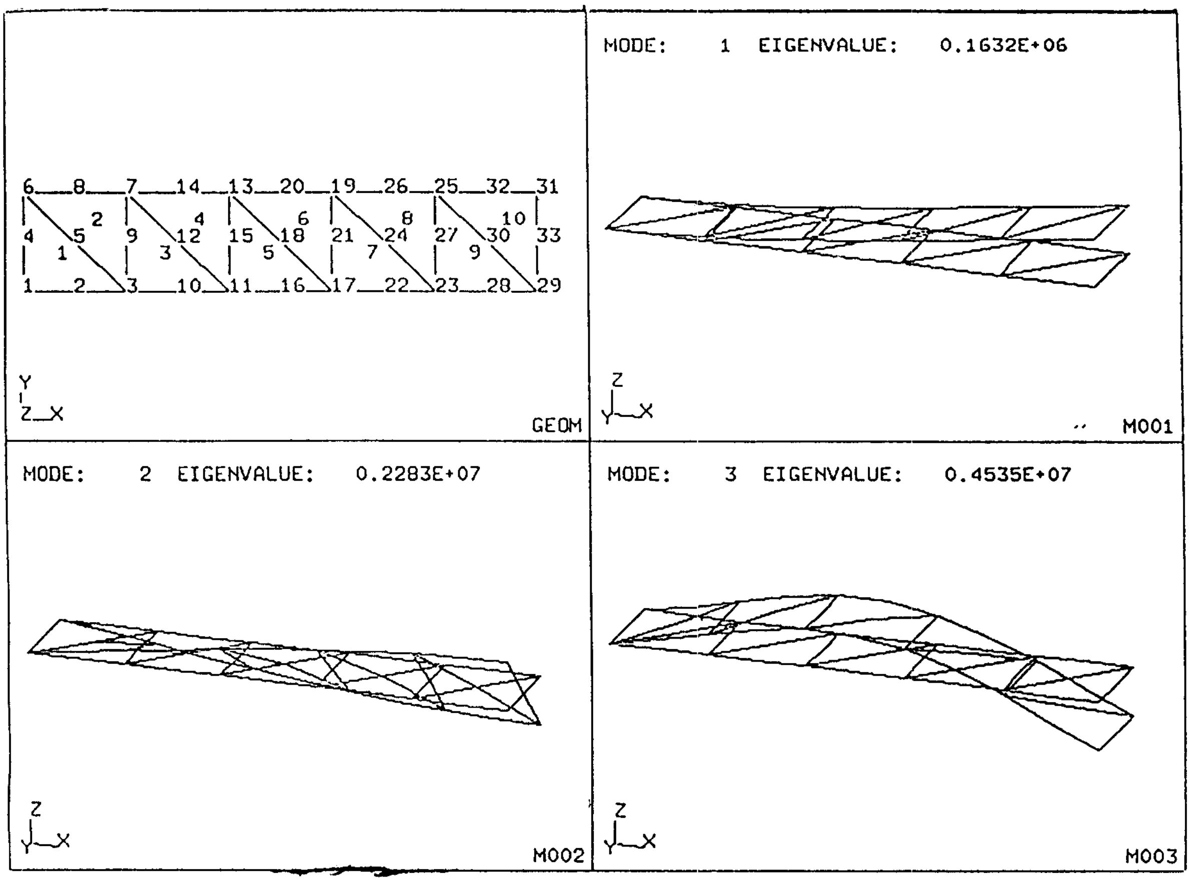
مسئله ۲

تیر ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی مـختلف: بـه مـنظور بررسی اثر تکیه‌گاهی در تیر ساندویچی، یک تیر ساندویچی با هندسهٔ نشان داده شده در شکل (۴) تحت شرایط مـختلف تکیه‌گاهی مدل شده و بسامدهای طبیعی و مـودهای نـرمال تعیین گردیده‌اند.



شکل (۴) تیر ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت

مودهای نرمال برای حالت تیر یکسر گیردار در شکل (۴) ترسیم گردیده‌اند. همانطور که از شکل (۵) مشاهده می‌شود مودهای زوج مربوطه به اثر پیچش در تیر می‌باشد، حـضور مودهای پیچشی به علت عرض نسبتاً قابل توجه تیر می‌باشد. پدیده حاصله نیز مشابه همان حالتی است که بـرای تـیرهای همگن بوجود می‌آید. در تیر سـاندویچی بـه عـلت افـزایش سختی سازه بسامدهای طبیعی افزایش پیدا می‌کنند.



شکل (۵) مودهای نرمال تیر یکسر گیر دار

جدول (۲) بسامدهای طبیعی تیرساندویچی با شرایط تکیه گاهی مختلف را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود بسامدهای طبیعی با محکم‌تر شدن تکیه گاهها افزایش می‌یابند.این رفتار دقیقاً چیزی است که انتظار آن می‌رود.

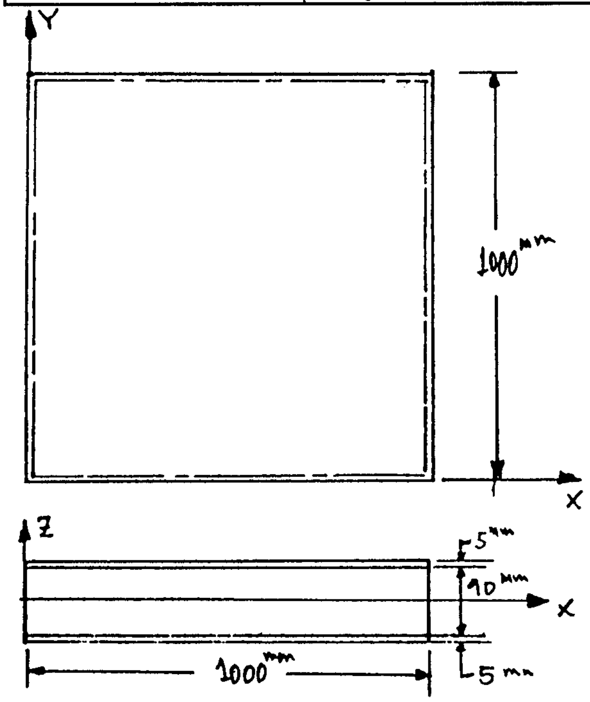
جدول ۲ـ بسامدهای طبیعی تیر ساندویچی با شرایط تکیه گاهی سخت

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
تیریک سرگیر دار	$.1632\times10^6$	$.2283\times10^7$	$.4535\times10^7$	$.2104\times10^8$	$.2489\times10^8$	6787×10^8	$.6787\times10^8$	$.1314\times10^9$	1412×10^9	$.2387\times10^9$
تیر با تکیه گاه ساده	$.1187\times10^7$	$.8020\times10^7$	$.1365\times10^8$	$.3565\times10^8$	$.4785\times10^8$	9040×10^8	$.1083\times10^9$	$.1812\times10^9$	$.1972\times10^9$	$.3237\times10^9$
تیر با تکیه گاههای گیر دار	$.4047\times10^7$	$.9586\times10^7$	$.2029\times10^8$	$.3988\times10^8$	$.5586\times10^8$	9629×10^8	$.1158\times10^9$	$.1885\times10^9$	$.2095\times10^9$	$.3321\times10^9$

مسئله ۳

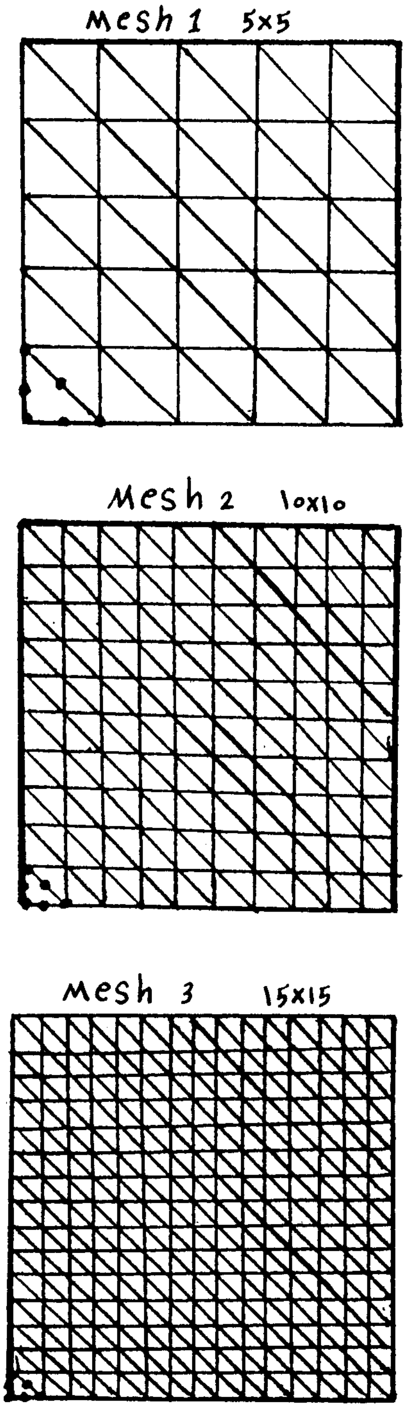
صفحهٔ ساندویچی با تکیه گاههای ساده: هندسه و مواد تشکیل‌دهندهٔ صفحه ساندویچی در شکل (۶) نشان داده شده است.

پرکننده پلاستیک PVC	صفحات روکش فولادی
$E_1 = 1.9\times 10^2\ N/mm^2$	$E_f = 207\times 10^3\ N/mm^2$
$\nu_c = 0.3$	$\nu_f = 0.3$
$G = 69\ N/mm^2$	$\rho_f = 8.7\times 10^3\ kg/m^3$
$\rho_c = 1.7\times 10^2\ kg/m^3$	

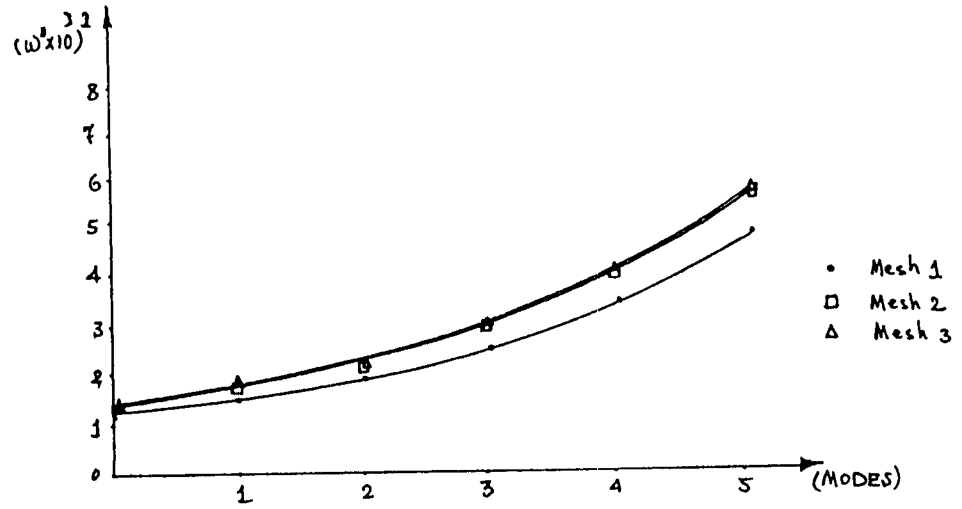


شکل (۶) صفحهٔ ساندویچی با تکیه گاه ساده

در حل این مثال اثر ریز کردن اجزاء در بسامدهای طبیعی و نتیجتاً اندازهٔ بهینهٔ اجزاء در مسئله ویژه مقداری مدنظر می‌باشد. به این منظور سه اندازهٔ مختلف برای اجزاء به صورتیکه در شکل (۷) نشان داده شده انتخاب گردیده، و پس از به دست آوردن بسامدهای طبیعی، بسامدهای طبیعی برای ۵ مود اول را در شکل (۸) ترسیم نموده‌ایم. همانطوریکه مشاهده می‌شود جزءبندی (۲) و جزءبندی (۳) جوابهائی خیلی نزدیک به هم دارند، در حالیکه جزءبندی (۱) جوابهائی نسبتاً دور از دیگر جزءبندی‌ها را می‌دهد. در شکل (۹) مودهای نرمال ساندویچی برای چهار مود اول نشان داده شده است.



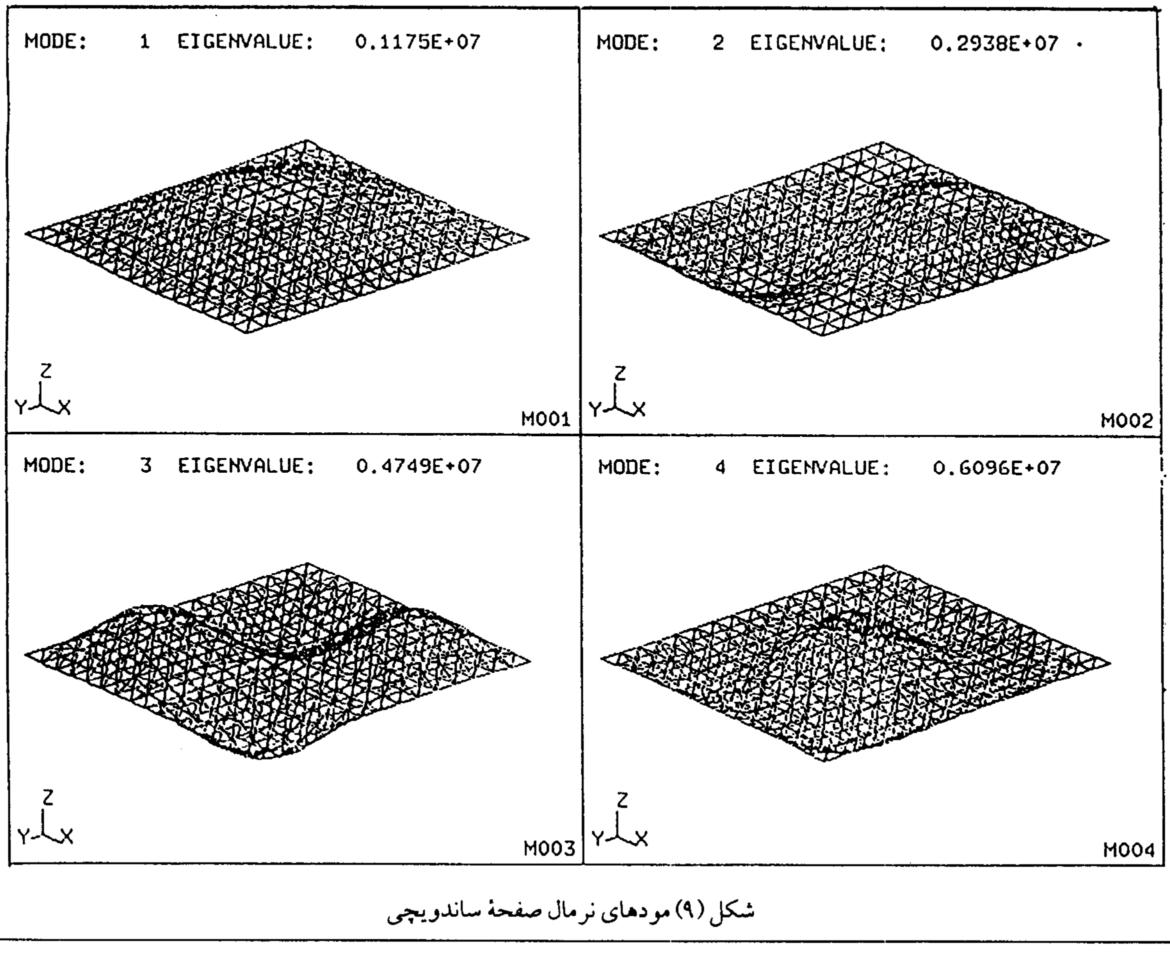
شکل (۷) جزءبندیهای متفاوت برای صفحهٔ نشان داده شده در شکل (۶)



شکل (۸) بسامدهای طبیعی برای ۵ مود اوّل

در پایان، به منظور مقایسه بسامدهای طبیعی پوسته‌های ساندویچی و پوسته‌های ساده، یک پوستهٔ ساده با طول و عرض مساوی با پوستهٔ ساندویچی استفاده شده در این مثال وزن مساوی (ضخامت پوستهٔ ساده به گونه‌ای انتخاب‌شده که وزن مساوی را ایجاد نماید) در نظر گرفته شده است.

نوع مادهٔ صفحهٔ ساده همانند صفحات روکش ساندویچی می‌باشد. بسامدهای طبیعی برای چهار مود اول در جدول (۳) آمده است.



شکل (۹) مودهای نرمال صفحهٔ ساندویچی

جدول ۳ـ مقایسه بسامدهای طبیعی صفحهٔ ساندویچی صفحهٔ فولادی با وزن یکسان

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
صفحه فولادی	$.4088\times10^4$	$.2774\times10^5$	$.1661\times10^6$	$.2853\times10^6$	$.4306\times10^6$
صفحه ساندویچی	$.1175\times10^7$	$.2938\times10^7$	$.4749\times10^7$	$.6096\times10^7$	$.8184\times10^7$

نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن تحلیل مودال تیرها و صفحات ساندویچی نتایج زیر نیز حاصل گردید.

۱ـ در مسئله (۱) اثر جرم متمرکز خارجی در انتهای تیر یکسر گیردار بررسی گردید و نشان داده شد که با توجه به افزایش جرم سیستم بسامدهای طبیعی سیستم به شدت افت پیدا می‌کنند.

۲ـ در مسئله (۲) شرایط تکیه گاهی در بسامدهای طبیعی تیر مورد مطالعه قرار گرفت، نشان داده شد که با محکم‌تر شدن تکیه گاهها سختی سیستم افزایش پیدا نموده و در نتیجه بسامدهای طبیعی سیستم افزایش پیدا کرده است.

۳ـ در مسئله (۳) با جزءبندی‌های مختلف برای صفحه، ضمن نشان دادن همگرائی روش، مشخص شد که اندازهٔ جزء در فرکانس طبیعی سیستم مؤثر و در جزءبندی سیستمهای پیوسته باید جزءبندی به گونه‌ای باشد که ضمن کاهش هزینه دقت لازم در تحلیل را داشته باشد. این یک اصل در روش اجزای محدود بوده و تحلیل این مثال روند مورد انتظار را تأئید می‌نماید.

۴ـ به منظور نشان دادن درستی تحلیل و ایجاد انگیزه در استفاده از سازهای ساندویچی، بسامدهای طبیعی دو پوسته با وزن یکسان یکی پوسته ساده و دیگری پوسته ساندویچی با یکدیگر مقایسه شد، و مشاهده گردید که بسامدهای اول در صفحهٔ ساندویچی خیلی بالاتر از صفحهٔ ساده می‌باشد. بنابراین راندمان دینامیکی در صفحهٔ ساندویچی خیلی خوب بوده و استفاده از آن در مواقعی که وزن سازه پارامتر تعیین کننده باشد و تحلیل دینامیکی صورت می‌پذیرد توصیه می‌شود.

تشکر و قدردانی

این مقاله بخشی از یک طرح تحقیقاتی در دانشگاه تهران گروه مهندسی مکانیک می‌باشد که با امکانات معاونت محترم پژوهشی دانشگاه تهران انجام پذیرفته است. لذا بدینوسیله از حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه و کلیه کسانیکه به نحوی در انجام این طرح همکاری نموده‌اند صمیمانه تشکر می‌گردد.

فهرست منابع:

۱ـ محمود موسوی ـ فرهاد جاویدراد، تحلیل ایستایی سازه‌های ساندویچی به روش اجزاء محدود. نشریه دانشکده فنی شماره ۵۱ مهر ماه ۱۳۷۰ صفحات ۸۰ـ۶۷.

۲ـ فرهاد جاویدراد ـ پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک دانشکده فنی دانشگاه تهران، سال ۱۳۶۹ تحت عنوان "آنالیز استاتیکی و دینامیکی سازه‌های ساندویچی".

۳ـ محمود موسوی ـ فرهاد جاویدراد، آنالیز دینامیکی سازه‌های ساندویچی به روش اجزاء محدود، جلد اول مجموعهٔ مقالات کنفرانس سالانهٔ دیگهای بخار و مخازن تحت فشار شرکت آذرآب. شهریور ۱۳۷۱ صفحات ۲۵۱ـ۲۴۳.

۴ـ محمود موسوی ـ فرهاد جاویدراد ـ علی شمسیان ـ گزارش طرح تحقیقاتی، تحت عنوان "تحلیل پایداری، آنالیز مودال و بهینه‌سازی سازه‌های ساندویچی با قید تنش، دانشکده فنی دانشگاه تهران، اردیبهشت ۱۳۷۲

5- Bathe, K.J, Finite element procedure in Engineering analysis, printic hall, Inc. (1992).

6- Zienkiewicz. O.C, The Finite Element Method in Engineering science, Mc Graw - Hill comp. (1971).