دو مسئله ساده در مکانیک غیر خطی

تهیه کننده :

اردشیر جهانشاهی

دانشکده فنی

قرون هجدهم و نوزدهم شاهد توسعه همه جانبه تئوری‌های خطی در مکانیک بود. شاید بتوان رابطه‌ای مابین این توسعه تئوریک و سطح و نوع فعالیت صنعتی در قرون مذکور یافت. در یک تئوری خطی مکانیک رابطه علت (نیروها و تغییرات درجه حرارت و غیره) ومعلول (حرکات و تغییر شکل ها) با معادلات خطی بیان میگردد .

در قرن حاضر بعلت کاربرد مواد جدید در صنعت (فلزی و غیر فلزی) که رفتار غیر خطی حتی در تغییر شکل های بسیار کوچک دارد و همچنین بعلت استفاده از این مواد (ویا مواد خطی مانند فولاد و غیره) تحت شرایطی که کوچک بودن تغییر شکل ها را تضمین نمیکند (سرعت‌های زیاد تغییرات شدید در درجه حرارت - کوچک بودن ابعاد و سبک وزنی عناصر وغیره) توسعه تئوری‌های غیر خطی در مکانیک بیش‌از پیش ضروری بنظر رسیده و پژوهش و تجسس دراین زمینه در اروپا و آمریکا شدت یافت . امروزه فعالیت تحقیقاتی با انرژی فراوان ادامه دارد .

رفتار یک دستگاه مکانیکی تحت عمل عوامل مستقل از زمان ممکن است بیکی از علل زیرین غیر خطی گردد :

الف ـ ماده دستگاه از قوائین خطی نظیر قانون هوك اطاعت ننماید (مثلا لاستیک‌ها حتی در تغییر شکل های کوچک از قانون هوك اطاعت نمیکنند) . دستگاهی که از ماده‌غیر خطی‌ساخته شده است گفته میشود بطور فیزیکی غیر خطی میباشد .

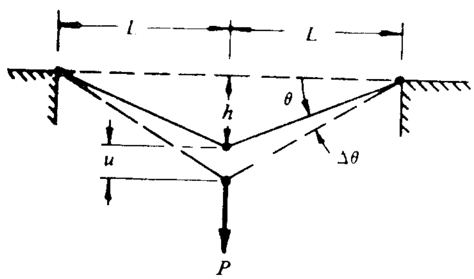
ب ـ دستگاه ممکن است از ماده‌ی خطی ساخته شود ولی بعلت شرایط سرویس دچار تغییرشکلهای فراوان گردد . دستگاهی که در سرویس عادی دچار تغییر شکل فراوان میگردد گفته میشود که بطور هندسی غیر خطی میباشد .

ج ـ دستگاه ممکن است از ماده غیر خطی ساخته شده و دچار تغییرشکل های فراوان گردد . درچنین صورتی دستگاه بطور فیزیکی و هندسی غیر خطی میباشد .

ذیلاً دو مسئلهٔ بسیار ساده و قدیمی که در آنها رفتار دستگاه بطور هندسی غیر خطی میباشد بررسی میگردد .

مسئله اول ـ کشش دستگاه دو میله‌ای

دو میله یکسان از ماده‌ئیکه از قانون هوك اطاعت میکنند ساخته شده و مطابق شکل ۱ بیکدیگر وبدو دیوار صلب لولا گردیده است فاصله دودیوار ($2L$) ، و طول هریک از میله ها l ، مساحت سطح مقطع هریک از آنها A ، و ضریب ارتجاعی ماده میله ها درکشش E میباشد . نیروی متمرکز عمودی P در محل اتصال دومیله وارد شده و تحت عمل این نیرو محل اتصال دچار تغییر مکان عمودی u گردیده است . رابطهٔ مابین u و P را بدست آورید .



شکل ۱

بدین‌منظور قدم‌های سه گانه تحلیل در مکانیک بکار برده میشود .

شرایط تعادل :

شرایط تعادل بشرط تعادل عمودی ، که با روابط

$$P = 2T \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{h+u}{\sqrt{L^2+(h+u)^2}}$$

بیان میگردد ، خلاصه میشود . بنابراین

$$T = \frac{P}{2}\,\frac{[L^2+(h+u)^2]^{\frac{1}{2}}}{h+u} \qquad \text{(a)}$$

توافق هندسی :

افزایش درطول هریک از میله ها δ برابر است با

$$\delta = \sqrt{L^2+(h+u)^2} - \sqrt{L^2+h^2}$$

ویا استفاده از رابطهٔ

$$l = \sqrt{L^2+h^2}$$

بدست میآید

$$\delta = l\left[\left(1+\frac{2hu}{l^2}+\frac{u^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right] \qquad \text{(b)}$$

رابطه نیرو ـ تغییر شکل

رفتار میله درکشش ارتجاعی و خطی میباشد. بنابراین :

$$\delta = \frac{Tl}{AE} \qquad \text{(c)}$$

ترکیب (a) و (b) و (c) رابطه‌مطلوب ، یعنی‌رابطه نیرو ـ تغییرمکان رابدست میدهد .

$$P = 2AE\left(\frac{h}{l}+\frac{u}{l}\right)\Big[1+\frac{2hu}{l^2}+\frac{u^2}{l^2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big] \qquad \text{(d)}$$

حل فوق برای کلیه مقادیر پارامترهای مختلف ، بشرط برقراری رابطه (c) معتبر است . برای حفظ اعتبار (c) پارامتر (u/l) بایستی خیلی کوچکتر از واحد باشد. کسر (u/h) نقش‌اساسی‌در رفتار دستگاه بازی‌میکند. بعلت عدم‌توجه باهمیت‌مقدار این کسر نتایج کاملاً غلط برای یک حاص مسئله مورد بررسی دربعضی کتب ثبت گردیده است[1].

برای کلیه مقادیر $(u/l)<(\sqrt{2}-1)l$ نامعادله

$$\left(\frac{2hu}{l^2}+\frac{u^2}{l^2}\right)=\left[\frac{2h}{\sqrt{L^2+h^2}}\left(\frac{u}{l}\right)+\left(\frac{u}{l}\right)^2\right]<1 \qquad \text{(e)}$$

برقرار است. ملاحظه میشود که تقریباً درکلیه موارد برقراری نامعادله بالا برای حفظ اعتبار رابطه (c) ودر نتیجه‌برای‌تضمین برقراری رابطه (d) ضروری میباشد. کاربردنامعادله (e) حل (d) را بصورت منبسط زیرین درمیآورد :

$$P = 2AE\left[\frac{h^2}{l^2}\,\frac{u}{l}+\frac{3h}{2l}\left(1-\frac{h}{l}\right)\frac{u^2}{l^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3h^2}{l^2}-\frac{5}{2}\,\frac{h^4}{l^4}\right)\frac{u^3}{l^3}+(\cdots)\,\frac{u^4}{l^4}+\cdots\right] \qquad \text{(f)}$$

ملاحظه میشود که فقط برای مقادیر

$$\left(\frac{u}{h}\right)\ll 1$$

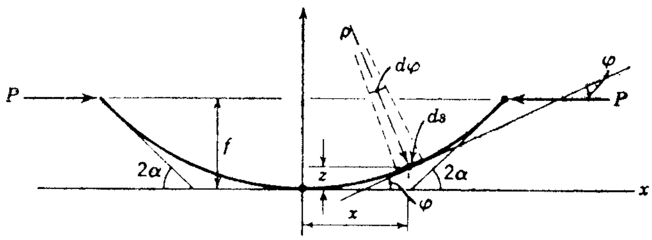
رفتار دستگاه میتواند اساساً خطی تلقی گردد. رفتار دستگاه درمقادیرکوچک h اساساً غیر خطی بوده و درحد وقتی $h=0$ میباشد رابطه نیرو ـ تغییرمکان بقرار ذیل است :

1- G. W. Housner and T. Vreeland, Jr. "the Analysis of Stress and Deformation", P.55 Macmillan Company, 1966.

$$P = AE\left(\frac{u}{l}\right)^{2} + O\left(\frac{u^{4}}{l^{4}}\right)$$

مسئله دوم ـ میله ارتجاعی تحت فشار محوری

در تحلیل پدیدهٔ کمانهٔ ستون‌ها باریک معمولاً از جمله تقریبی انحنا ، یعنی du^{2}/dx^{2} ، که از فرض کوچک بودن شیب محور ستون نتیجه میشود ، استفاده میگردد . برطبق این تحلیل مقدماتی ظرفیت باربری یک ستون ارتجاعی با بار بحرانی اویلرتعیین میگردد . اگر از کوچک بودن شیب محور ستون صرفنظر شده وجمله دقیق انحناء در تحلیل رفتار ستون های باریک بکار رود ملاحظه خواهدشد که بار اویلردقیقاً حدبالائی ظرفیت باربری ستون ارتجاعی را تعیین نمینماید .



شکل ۲

یک میله باریک ارتجاعی یکنواخت که صلابت خمشی آن EI میباشد تحت عمل دونیروی فشاری P مطابق شکل ۲ قرارگرفته است. متغییر در امتداد محور خمیده میله اندازه‌گیری شده و Φ زاویه‌ایست که مماس بر محور میله با محور x ها میسازد .

لنگر خمشی درنقطه‌ای از محور میله بفاصله y از محور x ها از رابطه :

$$M = P(f - y)$$

محاسبه میشود که در آن f فاصله خط اثر نیروهای P از محور x ها میباشد . اگر از رابطه لنگر ـ انحناء استفاده شود نتیجهٔ زیر بدست میآید :

$$EI\frac{d\Phi}{ds} = P(f - y)$$

مشتق گیری از این معادله نسبت به s باتوجه به‌رابطه

$$(ds)\sin\Phi = dy$$

بدست میدهد :

$$EI\frac{d^{2}\Phi}{ds^{2}} = -P\frac{dy}{ds} = -P\sin\varphi$$

ویا :

$$\frac{d^{2}\Phi}{ds^{2}} + \lambda^{2}\sin\Phi = 0$$

که‌در آن

$$\lambda^{2} = \frac{P}{EI}$$

میباشد .

رابطه بالامعادله دیفرانسیل اساسی کمانه تحت‌عمل نیروهای‌فشاری محوری‌میباشد. دراین‌معادله شیب محور میله کوچک فرض نشده است. برای حل این معادله بترتیب زیرین اقدام میشود :

$$\frac{d\Phi}{ds}=u$$

با تغییر متغیر بصورت

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2}=\frac{du}{ds}=\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}=u\frac{du}{ds}=-\lambda^2 \sin\Phi$$

بدست‌میآید

$$u^2=2\lambda^2\cos\Phi+c$$

ثابت انتگراسیون c بایستی از شرایط مرزی محاسبه‌شود . چون لنگر خمشی در $\Phi=2\alpha$ صفر میباشدبنابراین انحناء یعنی u در $\Phi=2\alpha$ بایستی صفر باشد. بدین‌ترتیب ثابت c محاسبه میشود .

$$u^2=\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2=2\lambda^2(\cos\varphi-\cos 2\alpha)$$

که معادل است با

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2=4\lambda^2\left(\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\Phi}{2}\right)$$

بنابراین

$$\frac{ds}{d\Phi}=\frac{1}{2\lambda}\left[\sin^2\alpha-\sin\frac{\Phi}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

اگر زاویه θ که دامنه تغییرات آن $o<\theta<T/2$ میباشد با رابطه

$$\sin\frac{\Phi}{2}=\sin\alpha\sin\theta$$

تعریف شود معادله دیفرانسیل بشکل زیرین در میآید :

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\theta}}$$

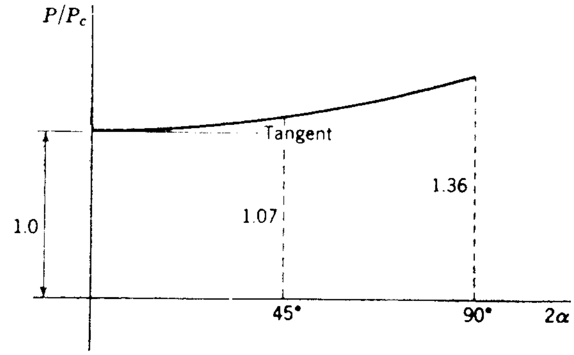
حال جملهٔ

$$(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

را بسط داده و نسبت به θ مابین حدود $\theta=o$ و $\theta=\pi/2$ (این حدود برحسب Φ ، $\Phi=o$ و $\Phi=2\alpha$ و برحسب S ، $S=o$ و $S=L$ میباشد .) انتگرال گیری شده و بدین ترتیب λ محاسبه میشود .

$$\lambda=\sqrt{P/EI}=\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\alpha+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\alpha+\cdots\right]$$

عضو اول سری فوق تقریب تئوری «شیب کوچک» ($\alpha=0$) میباشد که منجر به بار بحرانی اویلر، یعنی $P_c=\pi^2EI/L^2$ میشود. درحالیکه، اعضای دیگر سری مقدار تقریبی مذکور را اصلاح مینماید. بایستی متذکر گردید که این سری برای کلیهٔ مقادیر $0<\alpha<\pi/2$ معتبر است. مثلا برای $2\alpha=45^\circ$، $\sin\alpha=0.38$ بوده و $P=1.04(\pi^2EI/L^2)$ میباشد که فقط کمی از بار اویلر بیشتر است. بدین ترتیب بار اویلر حد فوقانی ظرفیت باربری ستون بار یک نبوده، بلکه، نیروی محوری بعداز رسیدن به‌مقدار $P=P_c$ بآراسی با افزایش زاویهٔ α افزایش مییابد. این نتیجه از نظر پراتیک حائز اهمیت میباشد. چون بدین ترتیب تا زمانی که تسلیم آغاز نگردیده میله قادر بتحمل بار محوری که کمی بیشتر از بار اویلر است میباشد. علاوه براین میله بعداز باربری بحالت مستقیم اولیه رجعت میکند. منحنی تغییرات P/P_c بعنوان تابعی از α در شکل ۳ تصویر گردیده است.



شکل ۳