

# در باره بهینه سازی سازه‌ها و ارائه یک روش نو

محمد رضایی پزند (استادیار) و محمد رضا سالاری (دانشجوی کارشناسی ارشد)

دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی «مشهد»

## ۱- چکیده:

دو هدف اصلی در این نوشته دنبال خواهد شد. نخست در حد امکان و به اختصار برخی از ویژگیهای روشهای بهینه سازی سازه‌ها ارائه می‌شود. هرچند مطالب درج شده کلی است برای تحلیل و طراحی بهینه سازه‌های رشته‌ای و پیوسته کار برد دارد، در بیشتر موارد، بحث متمایل به بهینه‌سازی شکل سازه‌ها است. هدف دوم، ارائه یک روش نو برای تحلیل حساسیت طرح مسئله کشسان دوبعدی است. در این راستا، روابط مورد نیاز به دست می‌آید و به همراه یک مثال عددی به نظر خوانندگان می‌رسد. با این تجربه عددی، کار برد روش روشن خواهد شد.

## ۲- پیش‌گفتار

روش نو در این نوشته تا حد امکان به ریشه‌یابی اصول به کار رفته و تلاشهای پراچ پژوهشگران پیشین پرداخت. از این رهگذر، نکات مفیدی آموخته خواهد شد که در تحولات بعدی مؤثرند.

در این نوشته نخست به اختصار از تلاشهای نخستین پژوهشگرانی که در زمینه بهینه سازی سازه‌ها کار کرده‌اند سخن به میان خواهد آمد. به دنبال این کار، برخی از پژوهشهای مهم انجام شده - که از دهه ۱۹۶۰ آغاز شده‌اند و تاکنون به طور پیوسته و پرشتاب در جریان‌اند - به نظر خوانندگان خواهد رسید. به دلیل گستردگی مطلب، کوشش شده است که بحث تا حدودی پیرامون بهینه سازی شکل سازه باشد. در این راستا، چگونگی برگزیدن متغیرهای طراحی و فنون محاسباتی لازم به اختصار تشریح می‌شود. به ویژگیهای فنون - شامل نقاط قوت و ضعف - نیز اشاره خواهد شد. باید دانست که روشهای مورد بحث در بهینه سازی سازه‌های رشته‌ای و پیوسته

بطور کلی می‌توان چنین پنداشت که اگر از امکانات قابل دسترس به بهترین صورت استفاده به عمل آید و چیزهای مورد نظر، تحلیل، طراحی و ساخته شوند، آنگاه یک کار مفید مهندسی انجام پذیرفته است. به عنوان نمونه، وظیفه مهندسین سازه تحلیل و طراحی دستگاههای مقاوم در مقابل بارهای ایستا و پویا می‌باشد. بطور معمول، برای یک دستگاه نیرو و نیز یک مشخصات مواد ثابت، چندین سازه متفاوت وجود دارد. آن سازه‌ای که کلیه اهداف مورد نظر را برآورد و هزینه کمتری داشته باشد، یک سازه بهینه خواهد بود. برای بهینه‌سازی سازه‌ها باید با یک الگوی ریاضی، کار را آغاز کرد و با یک فن محاسباتی، تحلیل و طراحی را ادامه داد و آن را به انجام رسانید.

در سالهای اخیر روشهای بهینه سازی سازه‌ها با تحولات فراوانی همراه بوده است. نظر به این که روشهای کارای جدید براساس تجربیات پرارزش پیشین استوار است، شایسته خواهد بود که پیش از ارائه

کاربرد دارند. در ادامه این نوشته از تحلیل حساسیت و اهمیت آن سخن به میان می‌آید. به روشهای تحلیل حساسیت مرسوم کنونی پرداخته خواهد شد و در باره برخی از ویژگیهای آنها اعلام نظر خواهد گردید.

هرچند بیشتر مواردی که به نظر خوانندگان می‌رسد برای هر نوع سازه‌ای کاربرد دارد، با وجود این، روابط پیشنهادی برای تحلیل مسئله مستوی مفید خواهند بود. به سخن دیگر، روش ارائه شده در این نوشته برای تحلیل حساسیت طرح شکل (Shape Design Sensitivity Analysis) مسئله دو بعدی با رفتار کشسان خطی کاربرد دارد. ابزار تحلیل، روش اجزای محدود است و از جزء هم عامل (Isoparametric Element) هشت گرهی استفاده خواهد شد. بر پایه روش پیشنهادی، می‌توان به سادگی ماتریس کرنش و نیز مشتق ماتریس سختی را نسبت به متغیرهای طراحی شکل حساب کرد و آنها را در تحلیل حساسیت مسایل دو بعدی به کار بست. در پایان، کاربرد روابط ارائه شده بایک مثال نمونه نشان داده خواهد شد.

### ۳- روشهای اولیه بهینه‌سازی

اندیشه کاستن وزن سازه بدون تأثیر نامطلوب بر رفتار آن، از دیرباز در ذهن طراحان جای گرفته است، هرچند، تدوین نظریه‌ای بنیادی در این زمینه به پژوهشهای انجام گرفته از سوی مایکل (Michell) در اوایل قرن جاری میلادی باز می‌گردد. وی با معلوم و ثابت دانستن موقعیت نقاط اثر بار و تکیه‌گاهها در فضای دو بعدی، روشی تحلیلی برای طرح بهینه پیکره (Layout) خرابایی که تنها یک حالت بارگذاری دارند و محدودیت تنش در آنها مورد نظر قرار گرفته باشد پایه‌گذاری کرد. سازه مایکل از نظر ایستایی معین و تنها برای حالت بارگذاری مورد نظر پایدار بود. این سازه به دلیل داشتن تعداد نامحدودی عضو، به ندرت در طرحهای مهندسی کاربرد دارد و تنها به عنوان راهنمایی در طرح بهینه پیکره خرابها می‌تواند به کار رود [1].

اگر چه استفاده از روشهای بهینه‌سازی برای کمینگی وزن بسیاری از سازه‌ها دارای اهمیت بود، پیشرفتهای اولیه در این زمینه را باید نتیجه رقابت موجود در طرح سازه هواپیما دانست. در آغاز، طرح سازه هواپیما تنها به مسایل آنرودینامیکی و پایداری آن وابسته بود. ولی شناخت روش جدیدی برای ساخت آلیاژ آلومینیم و نیز فشار جنگ جهانی دوم وضعیت را به گونه‌ای دیگر تغییر داد. به این ترتیب طرح بهینه اجزای سازه‌ای مانند ستونها و صفحات تقویت شده زیر بارهای فشاری برای کمینگی وزن سازه هواپیما مورد توجه قرار گرفت و نیاز به جلوگیری از کمانش در این نوع سازه‌ها نخستین محدودیتها را در طرح آنها وارد ساخت. تلاشهای اولیه در زمینه کمینگی وزن این گونه سازه‌های فشاری را کاکس (Cox) و اسمیت (Smith) در سال ۱۹۴۳ و زاهورسکی (Zahorski) در ۱۹۴۴ انجام داده‌اند [2]. این تلاشها سرانجام روش طرح بهینه براساس حالت شکست همزمان (Simultaneous Failure mode) را پایه‌گذاری کرد. در این روش طرح سازه به گونه‌ای انجام می‌گیرد که در هنگام انهدام، چندین حالت شکست از پیش انتخاب شده به‌طور همزمان به حد بحرانی برسند. به این ترتیب با انتخاب تعداد حالت‌های شکست همزمان برابر با تعداد متغیرهای طراحی مستقل، مسئله بهینه‌سازی از یک مسئله کمینگی وزن با محدودیت‌های نامساوی به یک دستگاه معادله‌های ناخطی تبدیل می‌شود. روشن است که پاسخ به دست آمده از این روش در یکی از نقاط راس فضای طراحی قرار خواهد داشت.

باید دانست که پیش از ظهور روشهای نوین بهینه‌سازی، دامنه کاربرد روشهای برنامه‌ریزی ریاضی در طرح بهینه سازه‌ها تنها به کمینه‌سازی وزن خرابها و قابهای مستوی بر پایه روش طراحی انهدام خمیری محدود می‌شد. بر این اساس، بسیاری از مسایل طرح بهینه سازه‌ها با تبدیل به مسایل برنامه‌ریزی خطی به سادگی قابل حل بودند. نخستین کار بردهای برنامه‌ریزی خطی در کمینه‌سازی وزن قابهای مسطح براساس روش طرح خمیری

محدود، رایانه و بهینه‌سازی در دهه ۱۹۶۰، تواناییهای قابل ملاحظه و اطمینان بخشی را برای طرح بهینه دستگاههای سازه‌ای فراهم آورد. پیدایش روشهای نوین بهینه‌سازی را باید دستاورد پژوهشهای انجام گرفته از سوی اشمیت (Schmit) در ابتدای این دهه دانست. وی با بهره‌گیری از تواناییهای مزبور نشان داد که مسئله کمینگی وزن سازه‌های نامعین کشسان را می‌توان به یک مسئله برنامه‌ریزی ناخطی در فضای متغیرهای طراحی تبدیل کرد [3]. تلاش اشمیت برای بهینگی سطح مقطع اعضای یک خرپای سه عضوی با محدودیتهای تنش و دو حالت بارگذاری مختلف، نتایج خلاف تصویری را به همراه داشت. بر پایه این نتایج، در طرح بهینه یک سازه نامعین با محدودیتهای رفتاری تنش، لازم نیست که تنش در هر یک از اعضاء سازه، دست کم در یک حالت بارگذاری به حد مجاز برسد و چه بسا در برخی از اعضاء، تنش بسیار کمتر از مقدار مجاز باشد. به این ترتیب نمی‌توان انتظار داشت که طرح بهینه چنین سازه‌ای به طور حتم در یکی از نقاط راس فضای طراحی قرار گیرد. این نتیجه خلاف تصور، ایراد نهفته در اساس روش حالت شکست همزمان را - که روش رایج طرح اجزای سازه‌ای هواپیما در آن زمان بود - آشکار ساخت.

باید دانست که در آغاز پیدایش روشهای نوین بهینه‌سازی، روشی که به طور مستقیم متغیرهای طراحی هندسی را به همراه مشخصات مقطع عرضی در فرآیند بهینه‌سازی وارد کند در اختیار طراحان قرار نداشت. از این رو، انتخاب یک طرح هندسی برتر تنها از طریق مقایسه طرحهایی با شکلهای متفاوت امکان داشت.

با روشن شدن اهمیت شکل سازه در رسیدن به طرحهایی با وزن کمتر، تلاش پژوهشگران برای وارد کردن هندسه سازه در فرآیند بهینه‌سازی به صورت گسترده‌تری ادامه یافت. در این راستا، با ارائه روش سازه زمینه‌از سوی دورن (Dorn)، گومری (Gomory) و گرینبرگ (Greenberg)، جنبه‌های غیر کاربردی سازه مایکل برای طرح بهینه پیکره سازه‌های خرپایی از میان برداشته شد [4]. سازه زمینه در

از سوی هایمن (Heyman - ۱۹۵۱)، فولکس (۱۹۵۴) - (Foulkes)، پراگر (Prager - ۱۹۵۶) و لایوسلی (۱۹۵۶) - (Livesly) گزارش شده است. شایان توجه است که قرار گرفتن جواب بهینه این گونه مسایل برنامه‌ریزی خطی در یکی از نقاط راس فضای طراحی، اطمینان دوباره‌ای برای استفاده‌کنندگان از روش حالت شکست همزمان به همراه داشته است [3].

از میان تلاشهای اولیه در زمینه بهینه‌سازی، پژوهشهای پیرسون (Pearson) - به دلیل پایه‌گذاری سه نظریه کلیدی که بعدها نقش ارزنده‌ای در پیشرفت روشهای جدید بهینه‌سازی داشته‌اند - شایسته است مورد توجه بیشتری قرار گیرند. پیرسون با کار در زمینه روش طراحی انهدام خمیری، کمینگی وزن سازه‌های خرپایی و قابی را برای چندین حالت بارگذاری به انجام رسانید. نظریه‌های کلیدی وی را می‌توان در سه مورد زیر خلاصه کرد: (۱) انجام همزمان دو فرآیند تحلیل سازه و بهینه‌سازی به جای انجام متوالی آن. (۲) تبدیل مسئله کمینگی با محدودیتهای نامساوی به یک یا چند مسئله کمینگی بدون محدودیت. (۳) کاهش ابعاد فضای طراحی با انتخاب درست متغیرها. پیرسون در تحقیق خود، روش گامهای اتفاقی (Random Steps) را است که تنها بر پایه ارزیابی توابع برای رسیدن به وزن کمینه استوار است - به کار برده است. جاذبه روش وی در این است که به طور همزمان در پی یافتن یک طرح بهینه و مکانیزم انهدام بحرانی است [1].

این بود چکیده‌ای از روشهای اولیه بهینه‌سازی که در سالهای پیش از دهه ۱۹۶۰ در اختیار طراحان قرار داشته است. این روشها هرچند امروزه به شکل اولیه خود کاربردی ندارند اصول روشهای نوین بهینه‌سازی بر پایه آنها استوار است. اینک به ارائه چکیده‌ای از تحولات روشهای جدید بهینه‌سازی با تاکید بر طرح بهینه شکل سازه‌ها پرداخته می‌شود.

#### ۴- روشهای نوین بهینه‌سازی

رشد و گسترش همزمان سه دانش نوپای اجزای

ادامه می‌دهند.

یکی از مراحل وقت‌گیر و پرهزینه فرآیند بهینه‌سازی، حل معادله‌های حاکم بر رفتار سازه است که انجام آن برای بررسی هر نقطه طرح الزامی است. در جهت افزایش کارایی این مرحله از فرآیند بهینه‌سازی، تلاشهایی از سوی پژوهشگران مختلف انجام گرفته است که از این میان می‌توان به تلاشهای فرشوی و اشیمیت، ساکا (Saka)، نیشینو (Nishino) و داگال (Duggal) اشاره کرد. فرشوی و اشیمیت نخست با صرف نظر کردن از شرایط سازگاری، نیروهای عضوی قیود نامعینی و سطح مقطع عرضی تمامی اعضا را به عنوان متغیر طراحی در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به کار برده‌اند [8]. با حل این مسئله به روش سادگان (Simplex) سطح مقطع اعضا و نیروهای قیود نامعینی محاسبه شده‌اند. سپس شرایط سازگاری کرنشها با تبدیل به شکل تقریبی خطی، به صورت محدودیت‌هایی در یک مسئله برنامه‌ریزی دیگر به کار گرفته شده است. با تکرار فرآیند بهینه‌سازی در دو مسئله اخیر، به تدریج از میزان ناسازگاری کرنشها کاسته شده است و سرانجام یک طرح بهینه سازگار به دست آمده است. باید دانست که در این روش امکان برداشتن اعضای غیر ضروری از پیکره سازه وجود دارد و سرعت همگرایی آن به انتخاب قیود نامعینی بستگی دارد.

گام بلندتری بسوی در آمیختن فرآیندهای تحلیل سازه و بهینه‌سازی را ساکا برداشته است. وی با در نظر گرفتن معادله‌های سختی کل به صورت محدودیت‌های تساوی، روش پربازدهی را برای بهینه‌سازی سطح مقطع اعضا و شکل هندسی سازه‌های خرپایی با چندین حالت بارگذاری ارائه کرد [9]. در این روش افزون بر سطح مقطع اعضا و مختصات گره‌های خرپا، تغییر مکانهای گرهی آن نیز به عنوان متغیر طراحی مستقل برگزیده می‌شوند. به این ترتیب نیروهای محوری و تغییرشکل‌های خرپا بدون نیاز به تحلیل آن و به طور مستقیم از فرآیند بهینه‌سازی به دست می‌آیند. در طرح به دست آمده به روش ساکا ممکن است

برگیرنده یک شبکه مستطیلی از نقاط گرهی است که هر یک از این گرهها به وسیله یک یا چند عضو به سایر گره‌های شبکه متصل می‌شود. شرایط تکیه‌گاهی و بارهای وارد بر سازه‌زمینه از پیش تعریف شده و در فرآیند بهینه‌سازی، ثابت باقی می‌مانند [5]. با بررسیهای انجام گرفته از سوی این پژوهشگران در زمینه تأثیر فاصله نقاط گرهی شبکه سازه‌زمینه بر وزن و پیکره بهینه‌سازه، راه دیگری برای بهینه‌سازی شکل سازه‌ها گشوده شد که در آن مختصات گره‌های سازه همانند مشخصات مقطع عرضی اعضای آن به عنوان متغیر طراحی به کار گرفته می‌شدند.

باید دانست که طرح بهینه‌سازی سازه‌ها به دلیل برخی از دشواریهای آن در مقایسه با ابعاد مقطع عرضی کمتر مورد توجه قرار گرفته و بیشتر تلاشها در دوده نخست پس از پیدایش روشهای نوین بهینه‌سازی به طرح بهینه ابعاد مقطع عرضی اختصاص داشته است. دشواریهای اصلی موجود در بهینه‌سازی هندسی سازه‌ها را می‌توان در سه مورد خلاصه کرد [6]: (۱) رفتار عددی متفاوت متغیرهای هندسی و ابعاد مقطع عرضی. (۲) پیچیده شدن ویژگیهای تابع هدف و محدودیت‌های رفتاری با در نظر گرفتن متغیرهای هندسی. (۳) تعداد زیاد متغیرهای طراحی. برپایه نخستین مورد از مشکلات اخیر می‌توان دریافت که روند تغییرات مختصات گرهی و ابعاد مقطع عرضی در فرآیند بهینه‌سازی یکسان نیست و در آمیختن این دو نوع متغیر می‌تواند همگرایی جوابها را دشوار کند. برای از میان برداشتن این مشکل، واندرپلاتز (Vanderplaats) و موزز (Moses) به کارگیری دو فضای طراحی جداگانه ولی وابسته را برای متغیرهای طراحی هندسی و ابعاد مقطع عرضی پیشنهاد کرده‌اند [7]. در این روش، نخست شکل هندسی سازه را ثابت نگاه می‌دارند و ابعاد مقطع عرضی اعضا را بهینه می‌کنند. سپس مختصات نقاط گرهی سازه را به موقیعت بهینه انتقال می‌دهند. این فرآیند را به صورت پی‌درپی تا بهینه شدن ابعاد مقطع عرضی و مشخصات گرهی در دو فضای طراحی جداگانه

### ۵- نمایش شکل سازه‌های پیوسته

روش اختیار شده برای نمایش شکل هندسی سازه از اهمیت ویژه‌ای در رسیدن به طرح بهینه برخوردار است و چنانچه متغیرهای طراحی هدایت کننده شکل سازه با دقت اختیار نشوند، نمی‌توان از بهینه بودن طرح به دست آمده اطمینان داشت [12].

در نخستین تلاشهای انجام گرفته برای بهینه سازی شکل سازه‌های پیوسته که از سوی زینکویچ (Zienkiewicz) و کمبل (Campbell) گزارش شده است، مختصات نقاط گرهی شبکه اجزای محدود به عنوان متغیر طراحی به کار رفته‌اند [13]. این انتخاب گرچه بسیار ساده و با روش اجزای محدود سازگار است، به دلیل ایجاد تناظر یک به یک میان متغیرهای طراحی و گره‌های مرزی شبکه اجزای محدود، به تعداد زیادی متغیر طراحی برای نمایش شکل ناحیه مرزی سازه‌های بزرگ نیاز دارد. روشن است که این امر حل مسئله بهینه‌سازی رامشکل و پرهزینه می‌کند. همچنین، حرکت مستقل گره‌های مرزی - که ویژگی این روش در بیان تغییرات شکل سازه است - در عمل دشواریهایی را به همراه دارد. از یک سو، برقراری پیوستگی شیب ناحیه مرزی در محل این گره‌ها ممکن نیست و فرآیند بهینه‌سازی در بیشتر موارد به طرح‌های غیر عملی می‌انجامد. از سوی دیگر، حفظ یک شبکه اجزای محدود مناسب در طی فرآیند بهینه‌سازی که دقت محاسبات تحلیل سازه را تضمین کند، به سادگی مقدور نیست. نمونه روشنی از این مشکلات در طرح بهینه سوراخ تعبیه شده در یک صفحه تحت کشش از سوی برایبانت (Braibant) و فلیوری (Fleury) - که نتیجه غیر عملی نیز داده - ارائه شده است [14].

باید دانست که دشواریهای اخیر همچنین در برخی از موارد طراحی ابعاد مقطع عرضی - مانند توزیع بهینه ضخامت یک صفحه مستطیلی زیر بار قائم که پراساد (Prasad) و هافتکا (Haftka) گزارش کرده‌اند [15] - نمایان شده است. از این رو در هر دو مورد طرح بهینه ابعاد مقطع

سطح مقطع برخی از اعضا تا میزان صفر کاهش یابد. در این صورت با برداشتن اعضای مزبور و گره‌های وابسته به آنها پیکره خرابا بهینه خواهد شد.

سرانجام نشینووداگال با به کارگیری مختصات نقاط گرهی سازه در هر یک از حالت‌های تعادل پس از بارکنش به عنوان متغیر طراحی مستقل، شکل هندسی خرابا و پیکره آن را برای چند حالت بارگذاری مختلف بهینه کردند [10]. به این ترتیب پیوستگی تغییر مکان‌های گرهی به طور خودکار برآورده شده و شرایط سازگاری از میان محدودیتها برداشته می‌شود. این امر در مقایسه با روش ساکا به مقدار زیادی از غیرخطی بودن محدودیتها می‌کاهد.

تا اینجا چکیده‌ای از پیشینه دانش بهینه‌سازی و پژوهش‌های وابسته به آن در زمینه سازه‌های رشته‌ای ارائه شد. هر چند پژوهش‌های انجام گرفته در این زمینه بسیار گسترده‌تر از موارد یاد شده است ولی برای کوتاه کردن سخن از پرداختن به سایر پژوهش‌ها خودداری می‌شود. شاخه دیگری از مسایل طراحی مهندسی - که دامنه کاربرد روش‌های بهینه‌سازی به آن گسترش یافته - طرح بهینه سازه‌های پیوسته است. باید توجه داشت که طرح بهینه سازه‌های پیوسته به روش‌های عددی، به دو لحاظ از طرح بهینه سازه‌های رشته‌ای متمایز است [11]. نخست این که در سازه‌های پیوسته تفاوت آشکاری میان متغیرهای طراحی ابعاد اعضا و متغیرهای طراحی هندسی وجود ندارد و اساس طراحی در سازه‌های پیوسته بهینه کردن شکل آن است. دومین وجه تمایز سازه‌های پیوسته این است که در بیشتر موارد به دلیل تغییرات شکل سازه، اصلاح شبکه اجزای محدود در طی فرآیند بهینه‌سازی، ضروری است. بدیهی است که تفاوت‌های مزبور مسایل ویژه‌ای را در زمینه طرح بهینه شکل سازه‌های پیوسته به همراه خواهد داشت که در ادامه این نوشته به شرح برخی از آنها پرداخته می‌شود.

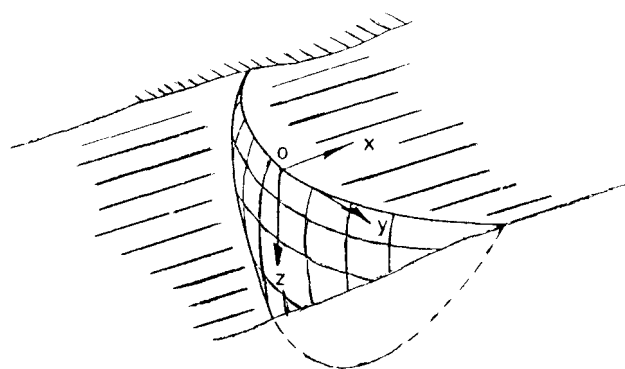
از چند جمله‌ایهای مرتبه بالا برای نمایش شکل‌های مرزی پیچیده، ممکن است نوسانهایی در شکل بهینه به همراه داشته باشد [16]. از این رو برخی از بهینه‌سازان، توابع اسپلاین [Spline] را - که از قطعات به هم پیوسته چند جمله‌ایهای مرتبه پایین تشکیل می‌شود - برای نمایش شکل ناحیه مرزی سازه به کار برده‌اند [19-20-21].

راه دیگر جلوگیری از ناپیوستگی شیبه‌های ناحیه مرزی سازه و کاهش تعداد متغیرهای طراحی، استفاده از روش جزء طراحی (Design Element) است که از سوی امام (Imam) پیشنهاد شده است [22]. در این روش - که امروزه کاربرد گسترده‌ای در طرح بهینه شکل سازه‌های پیوسته دارد - تمام سازه یا بخشهایی از آن به صورت ناحیه‌ها یا اجزایی منفرد، مشابه آنچه در شکل (۲) نشان داده شده است، در نظر گرفته می‌شود. هریک از این ناحیه‌ها که به اجزای طراحی موسوم‌اند، از تعدادی جزء محدود تشکیل می‌شود و مختصات نقاط گرهی اجزای محدود با استفاده از نگاشت هم‌عامل (Isoparametric Mapping) بر حسب مختصات نقاط گرهی جزء طراحی قابل محاسبه است. به این ترتیب ایجاد و حفظ یک شبکه اجزای محدود مناسب در طی فرآیند بهینه‌سازی به سادگی امکان پذیر است. شایان توجه است که در این روش می‌توان از توابع درونیاب هم‌عامل (Isoparametric Interpolation Functions) برای نمایش شکل مرزی اجزای طراحی - که همان مرزهای سازه است - استفاده کرد [23]. هدایت تغییرات این شکل با انتخاب تعدادی از گره‌های کلیدی جزء طراحی که مختصات آنها متغیرهای طراحی مسئله خواهند بود، انجام می‌گیرد. باید افزود که شکل مرزی جزء طراحی به وسیله توابع اسپلاین نیز نشان داده شده است. [14,24,25,26]

عرضی و شکل سازه لازم است که از ایجاد تناظر یک به یک میان متغیرهای طراحی و شبکه اجزای محدود پرهیز کرد و اطمینان یافت که تعداد و شکل اجزای محدود برای ارزیابی دقیق رفتار سازه کافی است [16].

نظریه دشواریهایی که روش حرکت مستقل نقاط گرهی به همراه داشت، به کارگیری روش‌های دیگری برای نمایش شکل ناحیه مرزی سازه، توجه پژوهشگران را جلب کرد. از این میان می‌توان به استفاده از چند جمله‌ایها و انتخاب ضرایب آنها به عنوان متغیر طراحی اشاره کرد. نمونه‌ای از این انتخاب در شکل (۱) نشان داده شده است. در این شکل، دو چند جمله‌ای متفاوت - که نسبت به یک مبدأ در تاج سد سنجیده می‌شوند - برای نمایش شکل میان صفحه و تغییرات ضخامت سد قوسی در امتداد میان صفحه به کار رفته است [17].

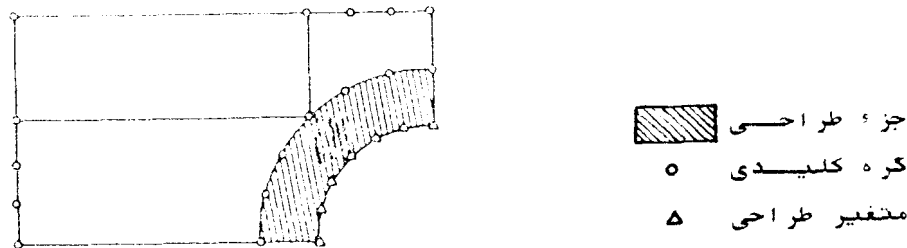
این نوع انتخاب شکل سازه هر چند به متغیرهای طراحی کمتری نیاز دارد، ولی یادآور می‌شود که چون در این مورد خاص شکل کلی سازه از پیش شناخته شده است، انتخاب مناسب تابع شکل، نقش ویژه‌ای در رسیدن به یک طرح بهینه برتر خواهد داشت [18]. افزون بر آن استفاده



$$X_{mid} = a_1 y^2 + a_2 y^2 z - a_3 z + a_4 z^2$$

$$t = a_5 + a_6 y^2 z + a_7 z$$

شکل (۱) - نمایش شکل سد قوسی به کمک چند جمله‌ای



شکل (۲) - نمایش شکل سازه با استفاده از جزء طراحی

شمار می‌آید. مشتقات کمیت‌های رفتاری سازه نسبت به متغیرهای طراحی که مشتقات یا ضرایب حساسیت نامیده می‌شوند، اطلاعات با ارزشی در حل مسایل بهینه سازی به دست می‌دهند. این اطلاعات به دو گونه در طرح بهینه سازه‌ها به کار می‌روند. یکی استفاده مستقیم آنها در روشهای برنامه‌ریزی ریاضی مبتنی بر مشتقات حساسیت برای یافتن یک جهت جستجوی مناسب است [29,30]. استفاده دیگر این اطلاعات در تبدیل مسئله بهینه سازی اولیه با شکل ضمنی به یک مسئله تقریبی با شکل صریح به کمک دنباله تیلور است که امروزه از سوی عده زیادی از بهینه سازان به کار گرفته می‌شود [31,32,33,34].

ساده‌ترین راه برای محاسبه ضرایب حساسیت کمیت‌های رفتاری سازه، استفاده از روش تفاوت‌های محدود است [35]. برای این منظور، یک نمو کوچک مناسب به هر یک از متغیرهای طراحی به صورت مستقل می‌دهند و کمیت رفتاری مورد نظر را در هر یک از حالتها پیش از ایجاد نمو پس از آن ارزیابی می‌کنند. به این ترتیب مشتق این کمیت به روش تفاوت‌های پسر و یا پیشرو قابل محاسبه است. باید دانست که در این روش، انتخاب یک نمو مناسب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از یک سو انتخاب یک نمو بزرگ به دلیل ماهیت ناخطی توابع حاکم بر مسئله، خطای سرشکن کردن (Truncation Error) را بالا می‌برد و از سوی دیگر کاهش بیش از اندازه این نمو، خطای ناشی از گرد کردن محاسبات (Round-off error) را افزایش می‌دهد. چنانچه نتوان نمو مناسبی یافت که از

در پایان باید اشاره کرد که به نظر بنت (Benett) و باتکین (Botkin)، روش جزء طراحی، سه ایراد دارد [27]. نخست این که ایجاد الگوی اجزای طراحی - که می‌توان آن را نوعی شبکه اجزای محدود پنداشت - به زمان زیادی نیازمند است. افزون بر آن هر تغییر محدود در شکل کلی طرح (مانند افزایش تعداد سوراخهای تعبیه شده در یک صفحه)، نیاز به برپا سازی دوباره تمام شبکه اجزای طراحی دارد. سرانجام، شیوه ایجاد شبکه اجزای محدود در این روش که بر پایه نگاشت استوار است، خود به خود امکان اصلاح موضعی آن را به دست نمی‌دهد. از این رو روش پیشرفته‌تری برای ایجاد و اصلاح این شبکه باید در نظر گرفته شود. به این ترتیب آنها استفاده از داده‌های هندسی (نمایش قسمتهای مختلف مرزی سازه به کمک خطوط یا منحنیهای متفاوت) را به جای داده‌های اجزای محدود برای تعریف مسئله پیشنهاد کرده و نشان داده‌اند که با این روش امکان تغییرات گسترده‌تری در شکل سازه وجود دارد. بنت و باتکین کاربرد این روش را افزون بر سازه‌های دو بعدی برای صفحات تا شده سه بعدی نیز گسترش داده‌اند [28].

## ۶- تحلیل حساسیت طرح

بررسی تغییرات کمیت‌های رفتاری سازه (تغییر مکانهای گرهی - تنشهای داخلی و ...) نسبت به تغییرات متغیرهای طراحی، تحلیل حساسیت طرح نام دارد و از ارکان اصلی بسیاری از روشهای پربازده بهینه سازی به

عددی تفاوت‌های محدود، می‌توان روش تحلیلی را برای محاسبه این مشتقات به کار برد. این امر با مشتق‌گیری مستقیم از معادله تعادل حاکم بر رفتار سازه نسبت به متغیرهای طراحی مورد نظر امکان پذیر است. برای نمونه، محاسبه ضرایب حساسیت تغییر مکانهای گرهی یک سازه کشسان - در حالتی که زیر بارهای ایستا قرار داشته باشد - در نظر گرفته می‌شود. مشتق‌گیری ضمنی از معادله تعادل اجزای محدود این سازه نسبت به متغیر طراحی  $X_k$ ، به دستگاه معادله‌هایی می‌انجامد که با حل آن مشتقات تغییر مکانهای گرهی سازه نسبت به متغیر طراحی مزبور به دست می‌آید. چنانچه ماتریس سختی سازه با  $[K]$ ، تغییر مکانهای گرهی آن با  $\{q\}$  و بارهای وارده با  $\{P\}$  نشان داده شود، رابطه ماتریسی این دستگاه معادله‌ها چنین خواهد شد.

$$[K] \left\{ \frac{\partial q}{\partial X_k} \right\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial X_k} \right\} - \left[ \frac{\partial K}{\partial X_k} \right] \{q\} \quad (۳)$$

محاسبه عبارت سمت راست رابطه بالا که بردار بار کاذب (Pseudo - Load) نام دارد از ویژگیهای اصلی تحلیل حساسیت به روش مشتق‌گیری مستقیم است و توجه عده زیادی از پژوهشگران را به خود جلب کرده است [36]. چنانچه این بار بر سازه وارد شود، میدان تغییر مکان به دست آمده از آن برابر  $\left\{ \frac{\partial q}{\partial X_k} \right\}$  خواهد بود. محاسبه بردار بار کاذب نیاز مند در اختیار داشتن مشتق ماتریس سختی و مشتق بارهای وارد بر سازه است و به دست آوردن آن - به ویژه در مورد سازه‌های پیوسته که رابطه پیچیده‌ای میان رفتار سازه و شکل آن وجود دارد - به سادگی ممکن نیست.

تاکنون روابط متعددی برای محاسبه مشتق ماتریس سختی و بارهای وارد بر سازه از سوی پژوهشگران مختلف ارائه شده است. برای این منظور روش‌های مختلفی را نسبت به مختصات گره‌های کلیدی جزء طراحی در مسائل کشسان دوبعدی محاسبه کرده‌اند [14]. همچنین

دقت کافی برخوردار باشد، بهتر است روش تفاوت‌های مرکزی به کار رود [36].

مسئله افزایش خطای ناشی از گرد کردن محاسبات به ویژه در مواردی پیش می‌آید که معادله‌های حاکم بر رفتار سازه با استفاده از روشهای تکراری حل شوند. برای نمونه حالتی در نظر گرفته می‌شود که تغییر مکانهای گرهی سازه با حل معادله زیر به دست آیند:

$$F(q, X) = 0 \quad (۱)$$

چنانچه فرآیند تکراری محاسبه تغییر مکان شکل اولیه سازه پس از رسیدن به دقت مورد نظر به مقدار  $\bar{q}(X_0)$  همگرا شود، روشن است که بهترین نقطه شروع برای فرآیند تکراری محاسبه تغییر مکان شکل تغییر یافته سازه همان  $\bar{q}(X_0)$  خواهد بود. هر چند انتخاب مزبور به این دلیل که فرآیند تکراری به طور هم زمان در پی یافتن اثر تغییر  $X$  و نیز خطای مانده در محاسبه  $\bar{q}(X_0)$  است، ممکن است خطای ناشی از گرد کردن را در محاسبات وارد کند. برای این میان برداشتن این مشکل، هافتکا پیشنهاد کرده است که در ارزیابی مقدار تغییر مکان شکل تغییر یافته سازه به جای استفاده از معادله (۱)، معادله زیر به کار رود [37].

$$F(q, X_0 + \delta X) - F(\bar{q}(X_0), X_0) = 0 \quad (۲)$$

البته، محاسبه مشتقات حساسیت به روش تفاوت‌های محدود، به دلیل سادگی آن پسندیده و مطلوب است. هر چند با توجه به این که روش مزبور برای  $m$  متغیر طراحی، نیازمند  $m+1$  تحلیل سازه در هر چرخه از فرآیند بهینه سازی است، به کارگیری آن در طرح سازه‌های بزرگ مقرون به صرفه نخواهد بود. از این رو تحلیل حساسیت طرح دستگاههای بزرگ سازه‌ای نیازمند روشهایی با کارایی بیشتر است.

در برابر محاسبه مشتقات حساسیت به روش



متغیرهای طراحی ابعاد مقطع عرضی از دقت کافی برخوردار است، پژوهشهای جدید هنوز درستی آن را در مواردی که متغیرهایی هندسی در مسئله بهینه‌سازی وارد شوند، تأیید نکرده‌اند [42].

باید دانست که تحلیل حساسیت طرح شکل سازه‌های پیوسته به روش مشتق‌گیری مستقیم افزون بر دشواری تهیه برنامه رایانه‌ای، دو ایراد دیگر به همراه دارد. نخست اینکه حتی تغییر کوچکی در شکل سازه می‌تواند باعث تغییر تمام شبکه اجزای محدود شود. در این صورت محاسبه مشتق ماتریس سختی - که برای کلیه اجرای تغییر شکل یافته الزامی است - بر هزینه خواهد شد. ایراد دیگر این است که تغییرات شکل سازه، تغییر شکل اجزای محدود و جابه جایی نقاط گرهی آنها را در شبکه این اجزا موجب می‌شود. از این رو مشتقات به دست آمده با این روش یک مؤلفه اضافی ناشی از تغییر دقت تحلیل سازه را به همراه خواهد داشت. باید افزود که تجارب محاسباتی مشکل عمده‌ای را در اثر این مؤلفه اضافی تاکنون نشان نداده‌اند [16].

سرانجام به عنوان آخرین روش تحلیل حساسیت طرح بسایند از روش حساب تغییرات (Variational Approach) نام برد که شرح آن در این نوشته مورد نظر نیست و تنها با اشاره‌ای گذرا به آن پرداخته می‌شود. در این روش، سازه را پیش از تقسیم به اجزای محدود، به صورت یک محیط پیوسته در نظر می‌گیرند و مشتق مادی (Material Derivative) معادله‌های حاکم بر رفتار آن را محاسبه می‌کنند. آنگاه تقسیم سازه به اجزای محدود انجام می‌شود و مقادیر عددی مشتقات حساسیت به دست می‌آید. به این ترتیب از ورود خطاهای اضافی ناشی از تغییر شبکه اجزای محدود در محاسبات حساسیت جلوگیری می‌شود. بر پایه این روش روابط جامعی از سوی چوی (Choi) و همکارانش برای محاسبه مشتقات حساسیت محدودیت‌های تغییر مکان و تنش ارائه شده است [43,44].

اسپینگ (Esping) مشتقات تحلیلی ماتریسهای به کار رفته در روابط اجزای محدود هم عامل رانست به متغیرهای طراحی مختلف - سطح مقطع عرضی (جزء خرابایی)، ضخامت (جزء غشایی)، زاویه نا ایزوتروپی (جزء غشایی و جزء سه بعدی عمومی) و مختصات نقاط گرهی (کلیه اجزای هم عامل) - ارائه کرده است [38]. روابط تحلیلی جامعی نیز از سوی وانگ (Wang) و همکارانش برای محاسبه مشتقات ماتریس سختی و بارهای وارد بر اجزای محدود هم عامل در مسایل کشسان سه بعدی ارائه شده است [23]. محاسبه این مشتقات بر پایه روش جزء طراحی برای نمایش شکل سازه انجام گرفته است. بر همین پایه چو (Cheu)، روابط تحلیلی مشابهی برای سازه‌های با تقارن محوری به دست آورده است [39]. سرانجام برابانت بر پایه قضیه کار مجازی معادله‌هایی بنا کرده است که به وسیله مشتقات تغییر مکانهای گرهی سازه نسبت به متغیرهای طراحی شکل برآورده می‌شود و مشتقات ماتریس سختی و بارهای وارد بر سازه از این روابط می‌توانند به دست آیند [40].

باید دانست که محاسبه مشتقات حساسیت به روش تحلیلی هر چند از کارایی و دقت بالایی برخوردار است، به کارگیری آن با نرم افزارهای موجود تحلیل سازه برای استفاده در طرح بهینه سازه‌ها دشواریهایی به همراه دارد. زیرا محاسبه بردار بارکاذب با استفاده از این نرم افزارها نیازمند دسترسی به متن برنامه منبع (Source Code) و آگاهی از چگونگی کارکرد آن است. روشن است که این برنامه‌های منبع کمتر در دسترس اند و بسیار پیچیده می‌باشند. از این رو بهینه سازان روش نیمه تحلیلی را که سادگی کار برد روش تفاوت‌های محدود و کارایی محاسباتی روش تحلیلی را با یکدیگر درآمیخته است به کار برده‌اند [41]. در این روش، نخست بردار بار کاذب به روش تفاوت‌های محدود محاسبه می‌شود. سپس ضرایب حساسیت تغییر مکانهای گرهی با استفاده از رابطه (۳) به دست می‌آید. باید افزود که هر چند روش نیمه تحلیلی برای

گونه رایج در روش اجزای محدود برای محاسبه ماتریس سختی کل سازه، با سوار کردن مشتقات ماتریسهای سختی تک تک اجزای آن به دست آورد [23]. از این رو، روش محاسبه مشتق ماتریس سختی اجزای محدود سازه تأثیر زیادی در کارایی محاسبات تحلیل حساسیت طرح دارد. با در نظر گرفتن این نکته، در ادامه این بخش روابط ساده‌ای برای محاسبه مشتق ماتریس سختی یک جزء محدود هم عامل کلی که در مسایل کشسانی دوبعدی کاربرد دارد و از کارایی بالایی برخوردار است ارائه می‌شود.

پیش از زبرداختن به محاسبه مشتق ماتریس سختی جزء محدود  $n$  گرهی، شایسته است که در باره شیوه کار این نوشته برای نمایش شکل در ناحیه مرزی سازه و متغیر طراحی وابسته به آن سخن به میان آید. در این راستا روابطی که از این پس ارائه خواهد شد بر پایه روش جزء طراحی و انتخاب مختصات گرههای کلیدی این جزء به عنوان متغیر طراحی استوار است. برای این منظور، یک جزء طراحی  $m$  گرهی با مختصات محلی  $r$  و  $s$  و یکی از اجزای محدود وابسته به آن با مختصات محلی  $\xi$  و  $\eta$  همانند شکل زیر در نظر گرفته شده است:

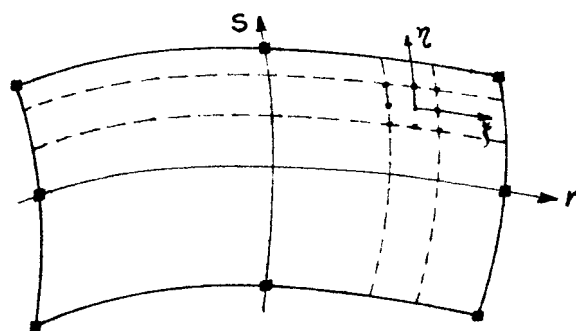
همان گونه که پیش از این بیان شد، محاسبه بردار بارکاذب یکی از گامهای محاسباتی تحلیل حساسیت به روش مشتق‌گیری مستقیم است. محاسبه بردار مزبور نیازمند در اختیار داشتن مشتق ماتریس سختی و بردار بارهای وارد بر جزء محدود است. اینک در ادامه نوشته، روش ساده‌ای برای محاسبه مشتق ماتریس سختی اجزای محدود هم عامل دوبعدی ارائه می‌شود.

#### ۷- مشتق ماتریس سختی

رابطه اصلی محاسبه مشتق تغییر مکانهای گرهی سازه به روش مستقیم، در شرایطی که بردار بارهای وارد بر سازه در فرآیند بهینه سازی بدون تغییر باقی بماند - و در این نوشته نیز چنین فرض شده است - به شکل ساده زیر کاهش می‌یابد.

$$[K] \left\{ \frac{\partial q}{\partial X_k} \right\} = - \left[ \frac{\partial K}{\partial X_k} \right] \{q\} \quad (4)$$

روشن است که محاسبه عبارت سمت راست رابطه اخیر، نیازمند در اختیار داشتن مشتق ماتریس سختی سازه نسبت به متغیر طراحی  $X_k$  می‌باشد. این مشتق را می‌توان به



- نقاط گرهی جزء طراحی
- نقاط گرهی جزء محدود

شکل (۳) - جزء طراحی و جزء محدود وابسته به آن

باید اشاره کرد که در این نوشته، نماد  $\hat{\ }^{\wedge}$  برای نمایش کمیت‌های مربوط به شکل جدید جزء محدود به کار رفته است. با در اختیار داشتن مختصات نقاط گرهی جزء محدود جدید برحسب تغییرات  $\delta X_k$  و  $\delta Y_k$ ، اجزای تشکیل دهنده ماتریس سختی این جزء نیز برحسب تغییرات مزبور قابل محاسبه‌اند. در این راستا نخست به محاسبه ماتریس جاکوبی جزء محدود جدید پرداخته می‌شود. هرگاه توابع شکل جزء محدود با  $N_i$  و مشتقات آنها در مختصات منحنی با  $N_{i,\xi}$  و  $N_{i,\eta}$  نشان داده شوند، روابط این قسمت چنین خواهد بود:

چنانچه نماد  $f_i$  برای نمایش تابع شکل جزء طراحی به کار گرفته شود، بستگی میان مختصات نقاط گرهی هر یک از اجزای محدود و مختصات گره‌های کلیدی جزء طراحی با استفاده از رابطه زیر مشخص خواهد شد:

$$X = \sum_{i=1}^m f_i(r,s) X_i \quad (5)$$

$$Y = \sum_{i=1}^m f_i(r,s) Y_i$$

اینک اگر مختصات  $X_k$  و  $Y_k$  از  $k$  امین گره جزء طراحی به عنوان تنه‌متغیرهای طراحی برگزیده شوند، با تغییر مقادیر این متغیرها به اندازه  $\delta X_k$  و  $\delta Y_k$ ، مختصات نقاط گرهی شکل تغییر یافته جزء محدود چنین به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \hat{X} &= X + f_k(r,s) \delta X_k \\ \hat{Y} &= Y + f_k(r,s) \delta Y_k \end{aligned} \quad (6)$$

$$[\hat{J}] = \begin{vmatrix} N_{1,\xi} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{i,\xi} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{n,\xi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_{1,\eta} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{i,\eta} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{n,\eta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{X}_1 & \hat{Y}_1 \\ \cdot & \cdot \\ \hat{X}_i & \hat{Y}_i \\ \cdot & \cdot \\ \hat{X}_n & \hat{Y}_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} N_{1,\xi} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{i,\xi} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{n,\xi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_{1,\eta} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{i,\eta} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{n,\eta} \end{vmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ \cdot & \cdot \\ X_i & Y_i \\ \cdot & \cdot \\ X_n & Y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_k(r_1, s_1) \\ \cdot \\ f_k(r_i, s_i) \\ f_k(r_n, s_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta X_k \\ \delta Y_k \end{vmatrix}^T \right\}$$

(۷)

تغییرات خطی دارد. از این رو، اگر ماتریس جاکوبی جزء محدود اولیه با  $[J]$  و مشتقات آن نسبت به متغیرهای طراحی  $X_k$  و  $Y_k$ ، به ترتیب با  $[J]_x$  و  $[J]_y$  نشان داده شوند، می‌توان روابط زیر را ارائه کرد:

باید دانست که عوامل  $N_{i,\xi}$  و  $N_{i,\eta}$  تنها توابعی از مختصات محلی نقاط گوس‌اند. بنابراین، چون تعداد نقاط گوس جزء محدود در فرآیند بهینه سازی تغییر نمی‌کند، موقعیت و مختصات محلی این نقاط ثابت باقی می‌ماند. همان گونه که رابطه اخیر نشان می‌دهد، ماتریس جاکوبی  $[\hat{J}]$  نسبت به هر یک از مختصات گرهی  $X_k$  و  $Y_k$

$X_k$  به کار گرفته شده و نشان دهنده دترمینان ماتریس  $[J]_x$  نیست. با توجه به رابطه (۱۲) می توان به وجود رابطه‌ای میان مشتقات دترمینان جاکوبی نسبت به مؤلفه‌های مختصات یک کره کلیدی پی برد. برای این منظور دستگاه معادله‌هایی به شکل زیر تعریف می‌شود:

(۱۳)

$$\begin{bmatrix} X_{i,\xi} & Y_{i,\xi} \\ X_{i,\eta} & Y_{i,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{i,\xi} \\ H_{i,\eta} \end{Bmatrix}$$

چنانکه دیده می‌شود، ماتریس ضرایب دستگاه بالا همان ماتریس جاکوبی  $[J]$  است و مقادیر ثابت دستگاه نیز پیش از این در رابطه (۱۰) ارائه شده است. می توان به سادگی دریافت که پاسخهای دستگاه معادله‌های بالا به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$h_1 = \frac{|J|_x}{|J|} \quad h_2 = \frac{|J|_y}{|J|} \quad (۱۴)$$

با توجه به اینکه وارون ماتریس جاکوبی جزء محدود اولیه  $([J]^{-1})$  برای انجام دادن تبدیلات میان مختصات محلی و کلی ضرورت دارد، می توان آن را برای حل دستگاه معادله‌های بالا نیز به کار برد. به این ترتیب با داشتن مقادیر  $h_1, h_2$ ، مشتقات دترمینان جاکوبی نسبت به مؤلفه‌های مختصات کره کلیدی به کمک روابط (۱۴) محاسبه خواهند شد.

عامل مورد نیاز دیگر در محاسبه ماتریس سختی جزء محدود، ماتریس کرنش  $[B]$  است که درایه‌های آن از مشتقات توابع شکل جزء محدود نسبت به مؤلفه‌های مختصات کلی تشکیل شده‌اند. رابطه این ماتریس برای یک جزء محدود عمومی که در مسایل کشسان دو بعدی کاربرد دارد به شکل زیر است:

$$[\hat{J}] = [J] + [J]_x \delta X_k + [J]_y \delta Y_k \quad (۸)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} X_{i,\xi} & Y_{i,\xi} \\ X_{i,\eta} & Y_{i,\eta} \end{bmatrix}$$

$$[J]_x = \begin{bmatrix} H_{i,\xi} & 0 \\ H_{i,\eta} & 0 \end{bmatrix} \quad (۹)$$

$$[J]_y = \begin{bmatrix} 0 & H_{i,\xi} \\ 0 & H_{i,\eta} \end{bmatrix}$$

$$H_{i,\xi} = \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} f_k(r_i, s_i) \quad (۱۰)$$

$$H_{i,\eta} = \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} f_k(r_i, s_i)$$

اینک بادر دست داشتن رابطه ماتریس جاکوبی جزء محدود تغییر شکل یافته، دترمینان این ماتریس - که از عوامل تشکیل دهنده ماتریس سختی جزء محدود است - به سادگی قابل محاسبه است. می توان نشان داد که این دترمینان نیز همانند ماتریس جاکوبی نسبت به متغیرهای طراحی  $X_k$  و  $Y_k$  از تغییرات خطی برخوردار است. هرگاه دترمینان ماتریس جاکوبی جزء محدود اولیه با  $|J|$  و مشتقات آن نسبت به متغیرهای طراحی  $X_k$  و  $Y_k$  به ترتیب با  $|J|_x$  و  $|J|_y$  نشان داده شوند، روابط زیر برقرار خواهند

$$|\hat{J}| = |J| + |J|_x \delta X_k + |J|_y \delta Y_k \quad (۱۱)$$

$$|J|_x = \begin{vmatrix} H_{i,\xi} & Y_{i,\xi} \\ H_{i,\eta} & Y_{i,\eta} \end{vmatrix} \quad |J|_y = \begin{vmatrix} X_{i,\xi} & H_{i,\xi} \\ X_{i,\eta} & H_{i,\eta} \end{vmatrix} \quad (۱۲)$$

باید دانست که در این روابط، نماد  $|J|_x$  برای نمایش مشتق دترمینان جاکوبی  $|J|$  نسبت به متغیر طراحی

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \quad (۱۶)$$

در رابطه اخیر مشتقات  $N_{i,\xi}$  و  $N_{i,\eta}$ ، در مختصات محلی جزء محدود محاسبه شده‌اند و مستقل از متغیرهای طراحی اند. از این رو محاسبه مشتقات  $N_{i,x}$  و  $N_{i,y}$  برای جزء محدود تغییر شکل یافته، تنها نیازمند به دست آوردن رابطه ماتریس  $[J]^{-1}$  برای این جزء محدود است. می‌توان نشان داد که روابط زیر برای محاسبه این ماتریس در مختصات تغییر یافته جزء محدود برقرارند:

$$[\hat{J}]^{-1} = \frac{[J]^a}{|J|} \quad (۱۷)$$

$$[\hat{J}]^a = [J]^a + [J]_{x,k}^a \delta X_k + [J]_{y,k}^a \delta Y_k \quad (۱۸)$$

$$[J]^a = \begin{bmatrix} Y_{,\eta} & -Y_{,\xi} \\ -X_{,\eta} & X_{,\xi} \end{bmatrix}$$

$$[J]_{x,k}^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -H_{,\eta} & H_{,\xi} \end{bmatrix} \quad [J]_{y,k}^a = \begin{bmatrix} H_{,\eta} & -H_{,\xi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

مختصات گره‌های کلیدی بادشواریهایی همراه خواهد بود. برای از میان برداشتن این دشواریها ماتریس افزوده  $[\hat{B}]^a$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[\hat{B}]^a = [\hat{B}_1 \dots \hat{B}_i \dots \hat{B}_n]^a$$

$$[\hat{B}_i]^a = \begin{bmatrix} \hat{N}_{i,x} & 0 \\ 0 & \hat{N}_{i,y} \\ \hat{N}_{i,y} & \hat{N}_{i,x} \end{bmatrix}^a \quad (۲۰)$$

$$[B] = [B_1 \dots B_i \dots B_n]$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

باید دانست که عوامل  $N_{i,y}$  و  $N_{i,x}$  در رابطه اخیر، مشتقات توابع شکل جزء محدود نسبت به مؤلفه‌های مختصات کلی را نشان می‌دهند. محاسبه این مشتقات بر پایه نگاشت میان محورهای کلی و محلی و بابه‌کارگیری مشتقات توابع شکل مختصات محلی انجام می‌گیرد. این نگاشت نیز به کمک وارون ماتریس جاکوبی انجام می‌شود و رابطه آن به شکل زیر است:

در روابط اخیر ماتریسهای  $[J]_{y,k}^a, [J]_{x,k}^a, [J]^a$ ، به ترتیب ماتریس افزوده جاکوبی جزء محدود اولیه و مشتقات آن رانسیب به متغیرهای طراحی  $X_k$  و  $Y_k$  نمایش می‌دهند. چنانکه دیده می‌شود، ماتریس افزوده جاکوبی نیز نسبت به متغیرهای طراحی موردنظر از تغییرات خطی برخوردار است. با وجود این، وارون ماتریس جاکوبی به دلیل نمایان شدن دترمینان این ماتریس در مخرج کسر رابطه (۱۷)، تغییرات ناخطی دارد. این ویژگی به نوبه خود در مشتقات  $N_{i,y}$  و  $N_{i,x}$  ماتریس  $[B]$  - که درایه‌های آن از این مشتقات تشکیل شده‌اند - پدیدار می‌شود. از این رو محاسبه مشتق ماتریس سختی جزء محدود نسبت به

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \hat{N}_{i,x} \\ \hat{N}_{i,y} \end{array} \right\}^a &= [\hat{J}]^a \left\{ \begin{array}{c} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{array} \right\} \\ &= \left[ [J]^a + [J]_x^a \delta X_k + [J]_y^a \delta Y_k \right] \left\{ \begin{array}{c} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

مختصات  $X_k$  و  $Y_k$  به ترتیب با  $[B]^a_x$  و  $[B]^a_y$  نشان داده شوند، می توان روابط زیر را برای ماتریس  $[\hat{B}]^a$  و مشتقات آن را ارائه کرد:

از روابط اخیر می توان دریافت که درایه های ماتریس  $[\hat{B}]^a$  نیز نسبت به  $X_k$  و  $Y_k$  تغییرات خطی دارند. از این رو، چنانچه مشتقات این ماتریس نسبت به

$$[\hat{B}]^a = [B]^a + [B]^a_x \delta X_k + [B]^a_y \delta Y_k \quad (22)$$

$$[B]^a_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_y \\ T_y & 0 \end{vmatrix} \quad [B]^a_y = \begin{vmatrix} T_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & T_x \end{vmatrix} \quad (23)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{,\eta} & -H_{,\xi} \\ -H_{,\eta} & H_{,\xi} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{array} \right\} \quad (24)$$

ضرب دترمینان ماتریس جاکوبی  $[\hat{J}]$  در ماتریس کرنش  $[\hat{B}]$  به دست آمده است. بنابراین ماتریس  $[\hat{B}]$  را می توان به شکل زیر بیان کرد:

اینک به بیان نقش ماتریس افزوده  $[\hat{B}]^a$  در محاسبه مشتق ماتریس سختی جزء محدود می پردازیم. با توجه به تعریف ماتریس  $[\hat{B}]^a$  می توان دریافت که این ماتریس از

$$[\hat{B}] = \frac{[\hat{B}]^a}{|\hat{J}|} = \frac{[B]^a + [B]^a_x \delta X_k + [B]^a_y \delta Y_k}{|J| + [J]_x \delta X_k + [J]_y \delta Y_k} \quad (25)$$

ماتریس سختی جزء محدود نسبت به آن محاسبه می شود. باید دانست که محاسبه مشتق ماتریس سختی نسبت به سایر مختصات گرهی جزء طراحی نیز به همین روال است برای پرهیز از طولانی شدن روابط از ارائه آن خودداری می شود. روابط لازم برای محاسبه ماتریس جزء محدود بر حسب مختصه  $X_k$  به قرار زیر است:

رابطه ساده بالا این ویژگی با ارزش رانمایان می سازد که می توان ماتریس  $[\hat{B}]$  را -که نسبت به مختصات  $X_k$  و  $Y_k$ ، تغییرات ناخطی دارد- به عوامل خطی تفکیک کرد. اینک برپایه این ویژگی به محاسبه مشتق ماتریس سختی جزء محدود نسبت به متغیر طراحی مورد نظر می پردازیم. برای این منظور مختصه  $X_k$  از گره کلیدی  $K$ ام جزء طراحی به عنوان متغیر طراحی انتخاب می شود و مشتق

$$\begin{aligned}
[K]_e &= t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\hat{B}]^T [D] [\hat{B}] |J| d\xi d\eta \\
&= t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{([\hat{B}]^a)^T [D] [\hat{B}]^a}{|J|} d\xi d\eta \\
&= t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{[G] \delta X_k^2 + ([E] + [E]^T) \delta X_k + [F]}{|J| + |J|_x \delta X_k} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

$$[E] = ([B]_x^a)^T [D] [B]^a$$

$$[F] = ([B]^a)^T [D] [B]^a$$

$$[G] = ([B]_x^a)^T [D] [B]_x^a \tag{۲۷}$$

محدود اولیه به دست خواهد آمد. اینک بر پایه تعریف عمومی مشتق به محاسبه مشتق مرتبه اول ماتریس سختی جزء محدود می‌پردازیم:

رابطه (۲۶) نشان دهنده ماتریس سختی جزء محدود تغییر شکل یافته است و اگر مقدار  $\delta X_k$  در این رابطه برابر صفر اختیار شود، ماتریس سختی جزء

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial X_k} \right]_e = \lim_{\delta X_k \rightarrow 0} \frac{[\hat{K}]_e - [K]_e}{\delta X_k}$$

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial X_k} \right]_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{([E] + [E]^T)}{|J|} - [F] \frac{|J|_x}{|J|^2} \right\} d\xi d\eta \tag{۲۸}$$

صورتی که چگونگی تقسیم بندی شبکه اجزای محدود تغییر نیابد - ثابت خواهد بود، بنابراین محاسبه درایه‌های مزبور تنها در نخستین چرخه مورد نیاز است و با انبارسازی آنها در حافظه را یا نه، می‌توان در چرخه‌های بعد از آنها استفاده کرد.

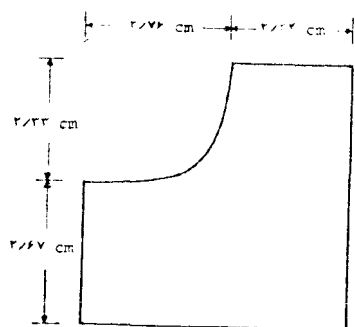
رابطه (۲۸) مشتق مرتبه اول ماتریس سختی جزء محدود را نسبت به متغیر طراحی  $X_k$  به دست می‌دهد و اجزای تشکیل دهنده آن پیش از این به صورت تحلیلی ارائه شده‌اند. باید دانست که چون اجزای تشکیل دهنده ماتریس سختی به صورت خطی نسبت به متغیر طراحی  $X_k$  داده شده‌اند، محاسبه مشتق دقیق این اجزاء بدون استفاده از روابط تحلیلی و به روش تفاوت‌های محدود امکان پذیر است. این امر را می‌توان به سادگی و تنها با فراخوانی چند زیرروال (Subroutine) از برنامه تحلیل به انجام رسانید. نکته با ارزش دیگری که باید به آن اشاره کرد این است که چون همه درایه‌های ماتریس  $[B]_x^a$  در مختصات محلی محاسبه می‌شوند، مقدار آنها در فرآیند بهینه سازی - در

#### ۸- مثال عددی

پیش از ارائه مثال عددی یادآور می‌شود که با به کارگیری روش ارائه شده در بخش گذشته، تعدادی از نمونه‌های عددی رایج در بهینه سازی شکل سازه‌ها حل شده و درستی آن واریسی شده است. ولی به دلیل طولانی شدن نوشته پرداختن به همه آنها امکان پذیر نیست. به

صورت گرفته که مختصه X گره i، مختصات X و Y گره z و مختصه Y گره k از جزء طراحی را در بر می گیرند. همچنین معیار تسلیم فون میسر به عنوان محدودیت رفتاری مسئله اختیار شده است. با توجه به تقارن صفحه، تنها یک چهارم آن در نظر گرفته و تحلیل شده است.

باید افزود که فرآیند بهینه سازی شکل صفحه پس از ۱۲ چرخه به جواب بهینه همگرا شده و با کاهش حجمی برابر ۱۲/۵ درصد حجم اولیه صفحه همراه است. طرح بهینه به دست آمده برای سوراخ در شکل (۵) نشان داده شده است. همچنین شکل (۶) روند کاهش حجم صفحه را از مقدار اولیه ۶/۵۶ سانتی متر مکعب به مقدار کمینه ۵/۷۴ سانتی متر مکعب نشان می دهد. چنانکه دیده می شود بیشترین کاهش حجم صفحه در پنج چرخه نخست فرآیند بهینه سازی به دست آمده است. یادآور می شود که چون تنها یک چهارم صفحه در نظر گرفته شده است، اعداد ارائه شده در شکل (۶) نیز به این بخش از صفحه مربوط اند.

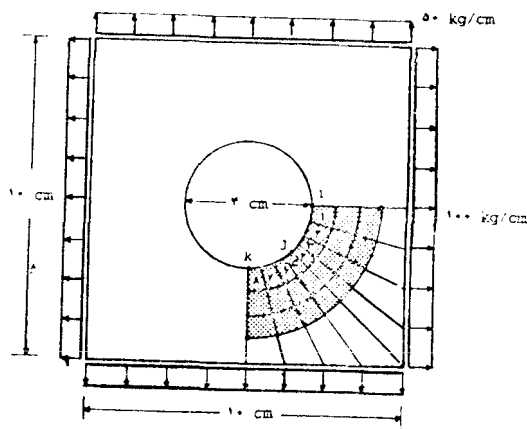


شکل (۵) - شکل بهینه سوراخ

که مشاهده می شود محدودیت های تنش وابسته به اجزای محدود ۱، ۶ و ۷ در طرح بهینه فعال اند.

عنوان نمونه مسئله تیرکه برای بیان و فلیوری، پراسادو و هافتکا و دینگ حل کرده اند از نمونه های واریسی کننده بوده است. روش کنونی، حجم کمینه تیر را ۵۹/۰۹ سانتی متر مکعب در برابر مقادیر عددی ۶۳/۶۱ [14]، ۵۸/۰۴ [15] و ۵۹/۴۸ [26] و مقدار تحلیلی ۵۹/۶۹ [15] سانتی متر مکعب به دست می دهد.

اینک برای نشان دادن کاربرد روش مورد نظر تنها به ارائه یک نمونه عددی بسنده می کنیم. برای این منظور طرح بهینه شکل مرزی سوراخ موجود در یک صفحه مستوی با بار کششی در دو جهت راد در نظر می گیریم. طرح اولیه صفحه و بارهای وارد بر آن در شکل (۴) نشان داده شده اند. ضخامت صفحه ثابت و برابر با ۰/۳ سانتی متر اختیار شده است. جنس مصالح صفحه از فولاد با ضریب کشسانی ۲۱۰۰۰۰۰ کیلوگرم بر سانتی متر مربع، ضریب پواسن ۰/۳ و تنش تسلیم ۲۴۰ کیلوگرم بر سانتی متر مربع است. هدایت شکل سوراخ با استفاده از ۴ متغیر طراحی



شکل (۴) - صفحه سوراخ دار با بار کششی

سرانجام چگونگی توزیع تنش در طول لبه سوراخ به صورت نسبت تنش موجود به تنش مجاز برای طرح اولیه و نهایی آن در جدول (۱) نشان داده شده است. همان گونه

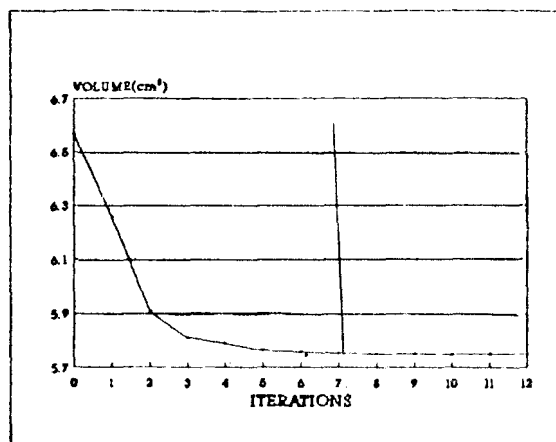


جدول (۱) - توزیع تنش در طول لبه سوراخ

جزء محدود	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
طرح اولیه	۰/۳۴	۰/۲۳	۰/۱۱	۰/۰۲	۰/۰۵	۰/۲۳	۰/۴۲	۰/۵۴
طرح بهینه	۱/۰۰	۰/۶۵	۰/۲۸	۰/۰۲	۰/۳۳	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۴۴

فزونی است. از سوی دیگر وسیله محاسباتی سریع، ارزان، دقیق و قابل دسترسی همچون رایانه راه رسیدن به سازه بهینه را در این زمان همواره کرده است. باید افزود که روش اجزای محدود یک فن محاسباتی سازگار با روشهای کنونی بهینه سازی سازه هاست. با توجه با این نکات برخی از ویژگیهای روشهای بهینه سازی - به ویژه آنهایی که در رابطه با بهینه سازی هندسی سازه‌ها کار برد دارند - در اینجا ارائه شد.

نکته دیگری که در این نوشته مختصر از آن سخن به میان آمد تحلیل حساسیت سازه دوبعدی بود. در این راستا، یک سازه مستوی که رفتار کشسان دارد و بارهای وارد بر آن ثابت است، مورد بحث قرار گرفت. روش ساده‌ای برای محاسبه مشتق ماتریس کرنش و نیز ماتریس سختی برای یک جزء هم عامل هشت‌گره‌ای - که در تحلیل باروش اجزای محدود کاربرد فراوانی دارد - ارائه شد. افزون بر آن یک مثال عددی نیز به نظر خوانندگان رسید.



شکل (۶) - روند کاهش حجم صفحه

## ۹- نتایج

گوشه‌هایی از روشهای بهینه سازی سازه‌ها به نظر خوانندگان رسید و از برخی تحولات این شاخه از علوم سخن به میان آمد. با توجه به کمبود مواد و افزایش روزافزون هزینه‌ها، گرایش به بهینه‌سازی سازه‌ها رو به

## ۱۰-منابع

- 1- Schmit, L. A., «Structural Synthesis - Its Genesis and Developments.» *AIAA Journal*, Vol 19, No . 10, 1981 . PP. 1249-1263.
- 2- Moriss, A. J., FOUNDATIONS OF STRUCTURAL OPTIMIZATION : A UNIFIED APPROACH, Wiley, New York N. Y., 1982.
- 3- Schmit, L. A., Structural Optimization - Some Key Ideas and Insights in NEW DIRECTIONS IN OPTIMUM STRUCTURAL DESIGN (Edited by Atrek, E., Gallagher , R. H., Ragsdell, K. M., Zienkiewicz, O.C.) Wiley, New York , 1984, PP. 1-45.
- 4- Topping, B. H. V., «Shape Optimization of Skeletal Structures : A Review.» *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 109, No. 8, 1983. PP. 1933 - 1951.
- 5- Kirsch. U., OPTIMUM STRUCTURAL DESIGN : CONCEPTS , METHODS AND APPLICATIONS, Mc Graw - Hill, New York , N. Y., 1981.
- 6- Zhou, M., Xia, R., «An Efficient Method of Truss Design For Optimum Geometry,» *Computers & Structures*, Vol. 35 , No. 2, 1990, PP. 115-119.
- 7- Vanderplaats, G. N., Moses, F., «Automated Design of Trusses for Optimum Geometry, *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol 98, No ST3, 1972, PP. 671 - 690.
- 8- Farshi, B., Schmit , L. A. , «Minimum Weight Design of Stress Limited Trusses,» *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 100, No. ST1, 1974, PP. 97 - 107.
- 9- Saka, M. P., «Shape Optimization of Trusses.» *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 106, No ST5, 1980, PP. 1155 - 1173.
- 10- Nishino, F., Duggal, R., «Shape Optimum Design of trusses Under Multiple Loading,» *International Journal of Solias and Structures*, 26, No. 1, 1990, PP. 17 - 27.
- 11- Vanderplaats, G. N., «Numerical Methods for Shape Optimization : An Assessment of the State of the Art.» in NEW DIRECTIONS IN OPTIMUM STRUCTURAL DESIGN (Edited by Atrek, E., Gallagher, R. H., Ragsdell, K. M., Zienkiewicz, O. C.) , Wiley, New York, 1984, PP. 89 - 103.
- 12- Ding, Y., Shape Optimization of Structures: A Literature Survey. *Computers & Structures*, Vol. 24 , No . 6, 1986, PP. 985 - 1004.
- 13- Zienkiewicz, O. C., Campbell, J. S., «Shape Optimization and Sequential Linear Programming,» in OPTIMUM STRUCTURAL DESIGN (Edited by

- Gallagher, R. H., Zienkiewicz, O. C.), Wiley, New York, 1973, PP. 109 - 126.
- 14- Braibant. V., Fleury, C., Shape Optimal Design Using B - Splines», *Computer Methods in Applied mechanics and Engineering*, Vol. 44, No. 3, 1984, PP. 247 - 267.
- 15- Prasad. B., Haftka, R. T., «Optimal Structural Design with Plate Finite Elements,» *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 105, No. ST11, 1979, pp. 2367 - 2382.
- 16- Haftka, R. T., Grandhi, R. V., «Structural Shape Optimization - A Survey.» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, 1986 , PP. 91 - 106.
- 17- Ricketts. R. E., Zienkiewicz, O. C., «Shape Optimization of Continuum Structures,» in NEW DIRECTIONS IN OPTIMUM STRUCTURAL DESIGN (Edited by Atrek, E., Gallagher, R. H., Ragsdell, K. M., Zienkiewicz, O. C. ), Wiley New York, 1984, 139 - 166.
- 18- Botkin, M. E., «Shape Optimization of Plate and Shell Structures, *AIAA Journal* Vol . 20, No. 2, 1982, PP. 268 - 273.
- 19- Luchi, M. L., Poggialini, A., Persiani, F., «An Interactive Optimization Procedure Applied to The Design of Gas Turbine Discs,» *Computers & Structures*, Vol. 11, 1980, PP. 629 - 637.
- 20- Weck , M., Steinke , P., «An Efficient Technique in Shape Optimization,» *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 11, No . 4, 1983 - 84, PP. 433 - 449.
- 21- Yang, R. - J., Choi, K. K., «Accuracy of Finite Element Based Shape Design Sensitivity Analysis,» *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 13, No . 2, 1985, PP. 223-239.
- 22- Imam , M. H., «Three - Dimensional Shape Optimization,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , Vol . 18 . 1982 , PP . 661-673.
- 23- Wang , S. - Y., Sun , Y., Gallagher, R. H., «Sensitivity Analysis in Shape Optimization of Continuum Structures,» *Computers & Structures* Vol. 20, No. 5. 1985, PP. 855 - 867.
- 24- Braibant, V., Fleury, C., «Shape Optimal Design: A Performing C. A. D. Oriented Formulation,» *AIAA/ASME/ASCE/AHS 25TH Structural Dynamics and Materials Conference, AIAA - 84 - 0857*, Palm Springs, CA, 1984.
- 25- Braibant, V., Fleury. C., «An Approximation - Concepts Approach to Shape Optimal Design,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol . 53. No. 2 , 1985, PP. 119 - 148.
- 26- Ding, Y., «Shape Optimization of Two - Dimensional Elastic Structures with Optimal Thicknesses for Fixed Parts,» *Computers & Structures*, Vol. 27, No. 6. 1987, PP. 729 - 743.
- 27- Bennett, J. A. Botkin, M. E., «Structural Shape Optimization with Geometric Description and Adaptive Mesh

- Refinement,» *AIAA Journal* , Vol. 23, No. 3. 1985, PP. 458 - 464
- 28- Botkin, M. E., Bennett, J. A., «Shape Optimization of Three - Dimensional Folded - Plate Structures,» *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 11, 1985, PP. 1804-1810
- 29- Haug. E. J., Arora, J. S., **APPLIED OPTIMAL DESIGN : MECHANICAL AND STRUCTURAL SYSTEMS**, Wiley, New York , 1979.
- 30- Belegundu, A. D., Arora. J. S., «A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. Part I: Theory ,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 21, 1985, PP. 1583 - 1599.
- 31- Salajegheh. E., Vanderplaats , G. N., «An Efficient Approximation Method for Structural Synthesis with Reference to Space Structures,» *Space Structures*, Vol. 2. 1986 - 87, PP. 165 - 175.
- 32- Vanderplaats, G. N., Salajegheh, E., «New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis,» *AIAA Journal*, Vol. 27. No. 3, 1989, PP. 352 - 358.
- 33- Kodiyalam, S., Vanderplaats, G. N., «Shape Optimization of Three Dimensional Continuum Structures via Force Approximation Techniques,» *AIAA Journal*, Vol, 27. No, 9, 1989, PP. 1256 - 1263.
- 34- Hansen, S. R., Vanderplaats, G. N., «Approximation Method for Configuration Optimization of Trusses,» *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 1, 1990, PP. 161 - 168.
- 35- Tseng, C. H., Kao , K. Y., «Performance of A Hybrid Sensitivity Analysis in Structural Design Problems,» *Computers & Structures*, Vol, 33. No. 5. 1989, PP. 1125 - 1131.
- 36- Haftka, R. T., Adelman, H. M., «Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis,» *Structural Optimization*, 1, 1989, PP. 137 - 151.
- 37- Haftka, R. T., «Sensitivity Calculations for Iteratively Solved Problems,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21. 1985, PP. 1535 - 1546.
- 38- Esping, B. J. D., «Analytical Derivatives of Structural Matrices for an Eight Node Isoparametric Membrane Element with Respect to A Set of Design Variables,» *Computers & Structures*, Vol. 21, No. 3. 1985, PP. 387-394.
- 39- Cheu, T. C., «Sensitivity Analysis and Shape Optimization of Axisymmetric Structures,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, PP. 95 - 108.
- 40- Braibant. V., «Shape Sensitivity by Finite Elements,» *Journal of Structural Mechanics*, Vol.14, No. 2, 1986, PP. 209 - 228.
- 41- Wang, L., Cheng, G., «Shape Optimization of A Revolutionary Body and A Quasi - Analytic Method of Sensitivity Analysis,» *Computers & Structures*, Vol.30 , No. 4, 1988, PP. 1013-1016.
- 42- Cheng , G., Gu, Y., Zhou, Y., «Accuracy of Semi- Analytic Sensitivity Analysis,» *Finite*

## ۱۱ - نشانه‌ها

- [B] ماتریس کرنش جزء محدود
- [J] ماتریس جاکوبی جزء محدود
- [J] دترمینان ماتریس جاکوبی جزء محدود
- [K] ماتریس سختی کل سازه
- [K]<sub>e</sub> ماتریس سختی جزء محدود
- {P} بردار بارهای معادل گرهی
- {q} بردار تغییر مکانهای گرهی سازه
- {X} بردار متغیرهای طراحی
- $f_i$  تابع شکل جزء طراحی
- $N_i$  تابع شکل جزء محدود
- $s$  و  $r$  مختصات محلی جزء طراحی
- $t$  ضخامت جزء محدود
- $X_i$  و  $Y_i$  مختصات گرهی جزء طراحی
- $X$  و  $Y$  مختصات گرهی جزء محدود
- $\delta X_k$  و  $\delta Y_k$  تغییرات مختصات گره  $k$  ام از جزء طراحی
- $\eta$  و  $\xi$  مختصات محلی جزء محدود
- $J^a$  ماتریس افزوده ( $J^a = |J| \cdot 0$ )
- کمیت‌های وابسته به جزء محدود تغییر شکل یافته
- 43- Choi, K. K., Haug, E. J., «Shape Design Sensitivity Analysis of Elastic Structures,» *Journal of Structural Mechanics*, Vol.11, No. 2, 1983, PP.231 - 269.
- 44- Choi, K.K., «Shape Design Sensitivity of Displacement and Stress Constraints,» *Journal of Structural Mechanics*,» Vol. 13, No. 1, 1985, PP. 27 - 41.

*Elements in Analysis and Design*. Vol. 6, 1989, PP. 113-128.

**On the Structural Optimization and**

**Presenting a New Method**

**M. REZAIEE - PAJAND**

**M. R. SALARI**

**FERDOWSI UNIVERSITY OF MASHHAD, IRAN**

**Abstract**

Two main goals are being Pursued in this paper. First, a Brief Summary of the Structural Optimization methods is presented. Although most of these methods are general and are Used in analysis and design of Skeletal as well as Continuous Structures, discussion is more often directed towards the shape optimization. The Second

Second goal of this paper is to present a new method for Sensitivity analysis of two dimensional elastic problems. In this direction, required equations are derived and presented along with a numerical example. This numerical exprience Shows clearly the applicability of the method.