آنالیز تنش‌های حرارتی در ورقه‌های چند لایه‌ای مدور

ترجمه از مجله Machine Design

از :

مهندس عبدالعباس ایرانی

چکیده :

درطراحی سپرهای‌حرارتی(Heat shields) - سدهای تشعشعی (Radiation barriers) و سیستم‌های محافظتی درمقابل شهاب‌های آسمانی (Meteoroid - Protection systems) برای وسایل نقلیه فضایی استفاده از ورقه‌های چند لایه‌ای معمول شده که درآنها لایه‌های محافظتی بعنوان قسمتی‌از ساختمان‌اصلی که نیروهای‌وارده راتحمل میکندبه‌حساب میآید. برای‌این نوع قطعات،خیزها(Deflections) تنش‌های شعاعی - تنش‌های هوب (Hoop) تنش‌های چسبندگی بین لایه‌ها (Bondstresses) باید محاسبه‌گردند. مخصوصاً تنش‌های‌چسبندگی بین لایه‌ها دارای‌اهمیت هستند زیرا جدایی بین لایه‌ها باعث خرابی سیستم میشود. دراین مقاله معادلات ودیاگرامهای لازم جهت محاسبه و تجزیه وتحلیل تنش‌های‌فوق وخیزها دریک ورقه چند لایه‌ای مدورکه تحت‌اثر حرارت متغیر در دو جهت شعاعی وعمقی قرار می‌گیرد ارائه میشود، این متد برای ورقه‌های چند لایه‌ای قابل استفاده است.

علائم اختصاری (NOMENCLATURE)

شماره	علامت	واحد	توضیح
1	A_p	—	ضریب تابع خیز
2	a_p	—	ضریب تابع چند جمله‌ای
3	B_p و F_p	—	ضرایب توابع مربوط‌به‌مولفه MEMBRANE تنش‌های هوپ و شعاعی
4	b	in.	شعاع ورقه مدور
5	C_p	—	ضریب مولفه خمشی تنش شعاعی
6	G_p	—	ضریب مولفه خمشی تنش هوپ
7	D	lb − in.	سختی خمشی (IE)
8	E	psi	مدول الاستیسیته

شماره	علامت	واحد	توضیح
9	h	.in	ضخامت ورقه
10	K	lb/in	سختی‌دوبعدی‌ورقه In-Plane Plate
11	N	psi	مولفه عمودی تنش چسبندگی Rigidity
12	n	—	تعداد لایه‌های ورقه
13	r	in.	محور شعاعی
14	S	psi	مؤلفه برشی تنش چسبندگی
15	T	F	درجه حرارت در هرنقطه از ورقه
16	$T_o(Z)$	F	تابع تغییرات درجه حرارت در عمق ورقه
17	W	in.	مقدار خیز ورقه
18	Z′	in.	محور عمودی نشان‌دهنده ضخامت که بعداز آن بالای ورقه است
19	α	in./in. — F	ضریب انبساط خطی
20	ν	—	نسبت پواسون (ضریب پواسون)
21	σ_r	psi	تنش در جهت شعاع (تنش شعاعی)
22	σθ	psi	تنش هوپ Hoop stress

معادلات عمومی

دراین متد نسبت پواسون (ν) برای تمام لایه‌ها مقدار ثابتی در نظر گرفته میشود، مدول‌الا - ستیسیته (E) وضریب انبساط خطی (α) ممکن است برای لایه‌های مختلف دارای مقادیر مختلفی‌باشد. اگر مقاطع صفحه‌ای ورقه را بعداز خمش بصورت همان صفحه (دوبعدی) درنظر بگیریم تغییر شکلهای‌ورقه فقط بستگی به‌خمش وضریب سختی دوبعدی ورقه (سختی‌درصفحه)دارد معادله‌آن بصورت زیراست .

$$D=\frac{1}{3(1-\nu^2)}\sum_{i=1}^{n}E_i(Z_i^3-Z_{i-1}^3) \qquad (1)$$

دراین معادله مقدار K برابراست با:

$$K=\sum_{i=1}^{n}E_i(Z_i-Z_{i-1}) \qquad (2)$$

ومقدار Z از رابطهٔ زیر بدست میآید :

$$Z=Z'-Z''$$

Z′ روی شکل مشخص شده و Z″ برابراست با:

$$Z''=\frac{\sum_{i=1}^{n}E_i[(Z'i)^2-(Z'_{i-1})^2]}{2\sum_{i=1}^{n}E_i(Z'_i-Z'_{i-1})} \qquad (3)$$

در فرمول‌های بالا i شماره لایه است که‌از بالای‌ورقه (لایه‌اول $i=1$) شروع میشود و واضح است که $Z'_0=0$ ، n تعداد لایه‌ها میباشد .

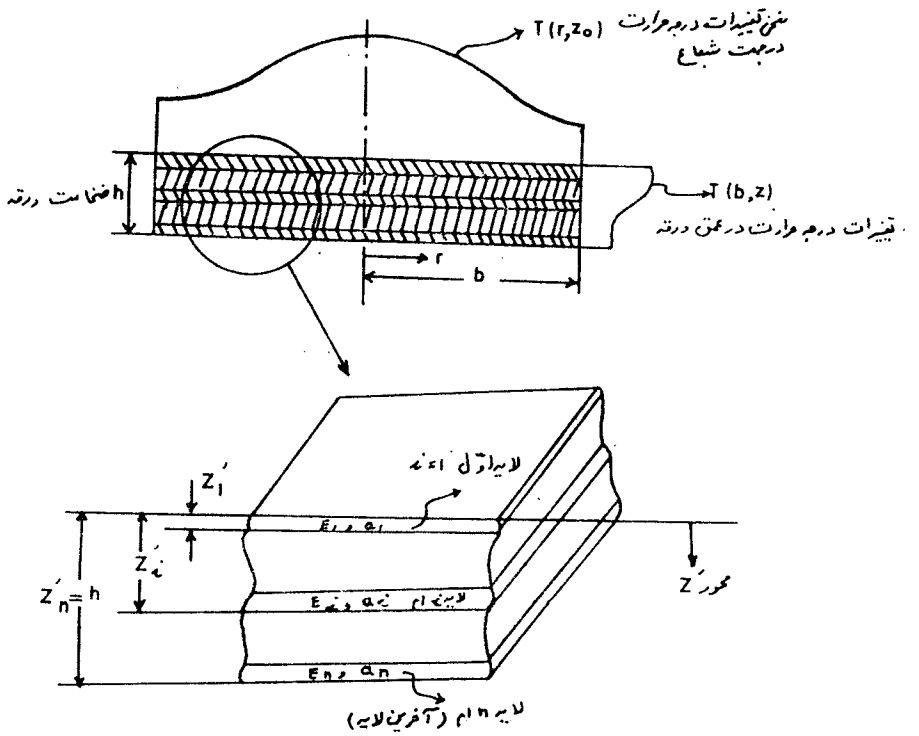
تقارن در توزیع درجه حرارت شعاعی مطابق شکل ۱—a (منحنی تغییرات شعاعی درجه‌حرارت نسبت به محوری که از مرکز می گذرد تقارن دارد)را میتوان با معادله زیر نشان داد .معادله زیر تغییرات شعاعی و عمقی را نشان میدهد .

$$T(r,Z)=T_0(Z)\sum_{p=0}^{q} a_p\left(\frac{r}{b}\right)^p$$

ویا :

$$T(r,Z)=T_0(Z)\left[a_0+a_1\left(\frac{r}{b}\right)+a_2\left(\frac{r}{b}\right)^2+\cdots a_q\left(\frac{r}{b}\right)^q\right] \qquad (4)$$

درمعادله (4)$T_0(z)$ تغییرات درجه حرارت را درعمق ورقه نشان میدهد ومقدار $a_p\left(\frac{r}{b}\right)^p$ که یک عبارت چند[1] جمله‌ای‌است بخاطر تغییرات شعاعی درجه حرارت میباشد. ضریب a_p ازفرم معادله‌تغییرات درجه حرارت‌که برای هرورقه مشخص است بدست میآید یعنی بامقایسه معادله‌کلی (4) با معادله‌ها که داده میشود مقادیر مجهول نظیر ضریب a_p را بدست میآوریم. مقدار q نمای تابع چنه جمله‌ای[1] درجه حرارت میباشد و باز هم از مقایسه معادله کلی (4) بامعادله‌ای‌که برای ورقه مورد مطالعه داریم



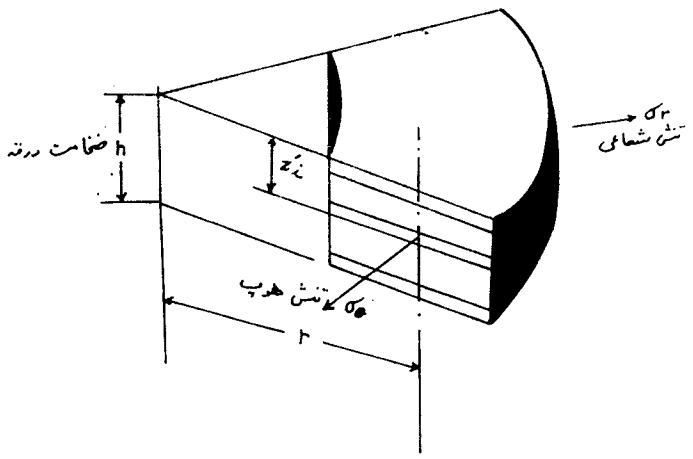
شکل ۱- برش یک‌ورقه چندلایه‌ای مدورکه منحنی تغییرات درجه حرارت در جهت شعاعی و عمقی نشان داده شده.

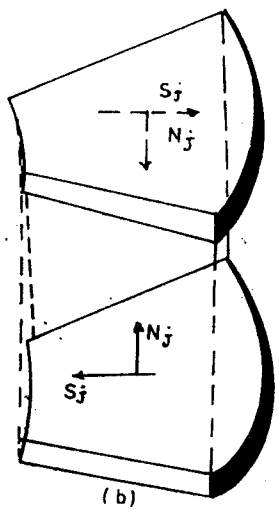
---

۱ — Polynomial

تابع چند جمله‌ای

بدست میآید. معادلات ومنحنی‌های طراحی که دراینجاآورده میشوند برای تجزیه وتحلیل تنش هاوخیزها در چهار حالت مختلف است. این چهار شرایط بصورت زیر هستند.





شن ۲- (a) تنش‌های شعاعی و تنش‌های هوپ در یک‌ورقه.
(b) مؤلفه‌های برشی و نرمال تنش چسبندگی بین دولایه j ام و ۱+j ام

۱- لبه خارجی درمقابل دوران ثابت ودر مقابل انبساط شعاعی آزاد است.

a - دراین حالت مقدار خیز نرمال W در اثر در جه‌حرارت بفرم $T_o(z)\left[a_p\left(\frac{r}{b}\right)^p\right]$ بصورت زیر است.

$$W=-\frac{b^2K_1a_p}{D}A_p \qquad (5)$$

$$K_1=\int_{Zo}^{Zn}E\alpha To(Z)ZdZ \qquad (6)$$

b - مقدار تنش شعاعی (Radial stress) دراینحالت از فرمول زیر بدست میآید.

$$\sigma_r = E_i a_p \left[\frac{K_2}{K} B_p + \frac{K_1}{D(1-\nu)^2} C_p Z - \frac{\alpha_i}{1-\nu} To \left(\frac{r}{b} \right)^p \right] \qquad (7)$$

c - مقدار تنش هوپ (Hoop stress) .مقدار این تنش از فرمول زیر محاسبه میگردد .

$$\sigma\theta = E_i a_p \left[\frac{K_2}{K} F_p + \frac{K_1 G_p}{D(1-\nu^2)} Z - \frac{\alpha_i}{1-\nu} T_o \left(\frac{r}{b} \right)^p \right] \qquad (8)$$

مقدار K_2 در معادلات (7)و(8) برابراست با:

$$K_2 = \int_{Z_o}^{Zn} E\alpha T_o(Z) dZ \qquad (9)$$

توابع عددی A_p ، B_p ، C_p ، F_p و G_p درشکلهای 3 – 4 – 5 – 6 – 7 مشخص شده‌اند،واین توابع باداشتن مقادیر $\left(\frac{r}{b} \right)$ و P با استفاده ازدیاگرام بدست میآیند .

d - مقدار تنش چسبندگی بین لایه‌ها (Bond stress) از فرمولهای زیر قابل محاسبه است.

$$S_j = \frac{P r^{p-2}}{b_p(1-\nu)} a_p \left[-\frac{K_2}{K} \sum_{i=1}^{j} E_i (Z_i - Z_{i-1}) - \frac{K_1}{2D(1-\nu^2)} \sum_{i-1}^{j} E_i (Z_i^2 - Z_{i-1}^2) + \int_{Z_o}^{Zj} E\alpha T_o(Z) dZ \right] \qquad (10)$$

مؤلفه برشی تنش چسبندگی

$$Nj = \frac{p^2 r^{p-2}}{b_p(1-\nu)} a_p \left\{ \frac{K^2}{K} \left[Zj \sum_{i=1}^{j} E_i (Z_i - Z_{i-1}) - \sum_{i=1}^{j} \frac{E_i}{2} Z_i^2 - Z_{i-1}^2 \right] + \frac{K_1}{(1-\nu^2)D} \left[\frac{Zj}{2} \sum_{i=1}^{j} E_i (Z_i^2 - Z_{i-1}^2) - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{j} E_i^3 (-Z_{i-1}^3) \right] + \int_{Z_o}^{Zj} (Z - Z_j) E\alpha T_o(Z)\, dZ \right\} \qquad (11)$$

مؤلفهٔ نرمال تنش چسبندگی بین دولایه J ام و J+1 ام

۲-لبه خارجی در مقابل دوران وانبساط شعاعی آزاد است .

اگر لبه خارجی در مقابل دوران آزاد باشد با اضافه نمودن مقادیر زیر به معادلات 5 و 7 و 8 تنش ها وخیز در اینحالت بدست میآیند .

$$W_2 = W + W'$$

در فرمول اخیر W_1 خیز برای حالت (۲) و W خیز برای حالت(۱) یعنی همان فرمول (5)وW' از معادله (12) بدست میآید.

$$W' = \frac{b^2 a p K_1}{D(1-\nu^2)} \left[\frac{(1\quad r^2)/b^2}{p+2}\right] \qquad (12)$$

وبرای تنش شعاعی میتوان نوشت

$$\sigma_{r2} = \sigma_r + \sigma_r'$$

که σ_{r2} تعداد تنش درحالت (۲) است ، σ_r تعداد تنش درحالت (۱) و σ' از معادله (13) بدست میآید .

$$\sigma_r' = \sigma_\theta' = E_i a_p \left[\frac{K_1}{D(1-\nu^2)} \times \frac{2}{(1-\nu^2)(p+2)}\right] Z \qquad (13)$$

برای تنش هوپ هم رابطه زیر را داریم :

$$\sigma_{\theta 2} = \sigma_\theta + \sigma'_\theta$$

۳ـلبه خارجی درمقابل دوران وانبساط شعاعی ثابت شده .

دراینحالت خیزها از همان معادلهٔ (5) بدست میآید .ولی برای تعیین مقادیر تنش های شعاعی وهوپ باید بهآن مقادیر در روا بط(7)و(8) مقداررابطه (14) را اضافه نمود یعنی:

σ_{r3} تنش شعاعی در حالت ۳ $\quad \sigma_{r3} = \sigma_r + \sigma_r''$

$\sigma_{\theta 3}$ تنش هوپ در حالت ۳ $\quad \sigma_{\theta 3} = \sigma_\theta + \sigma_\theta''$

σ_r و σ_θ مقدار این تنش ها برای حالت (۱) میباشند σ_r'' و σ_θ'' از فرمول زیر بدست میآیند .

$$\sigma_r' = \sigma_\theta'' = -E_i a_p \frac{K_2}{K}\left[\frac{2}{(1-\nu)(p+2)}\right] \qquad (14)$$

٤ـ لبه خارجی در مقابل دوران آزاد ولی انبساط شعاعی ندارد .دراین حالت برای تعیین خیزها باید دو معادله (5) و (12) را جمع نمود و تنش شعاعی با اضافه نمودن σ_r' و σ_r'' به معادله (7) بدست میآید .تنش هوپ بااضافه نمودن σ_θ' و σ_θ'' بهمعادله (8)بدست میآید .

$$\sigma_{r4} = \sigma_r + \sigma_r' + \sigma_r''$$

$$\sigma_{\theta 4} = \sigma_\theta + \sigma_\theta' + \sigma_\theta''$$

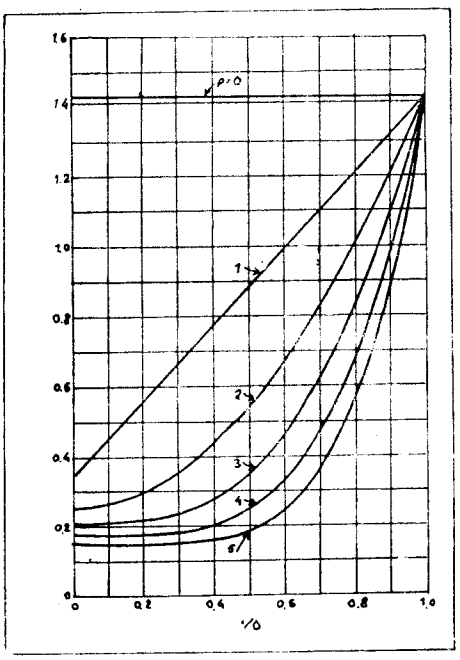
دراین دو رابطه σ_r همان معادله (7) و σ_θ رابطه (8) است .

درزیر یک مثال طراحی حل میشود ،دراین مثال یک ورقه مدور تحت تأثیر در جه‌حرارت متغیردردوجهت شعاعی وعمقی قرار می گیرد تنش های بوجود آمده دراثر این حرارت بررسی وتجزیه وتحلیل میشود .

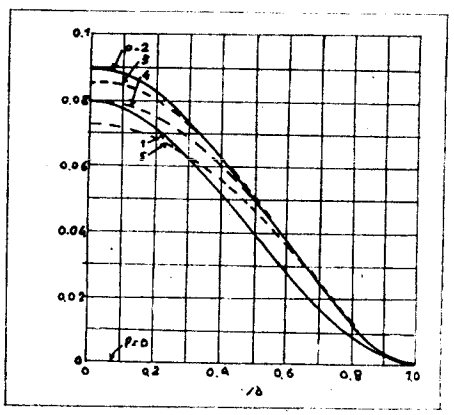
مثال طراحی · یک ورقه دولایه از فولاد و تیتانیم تحت تأثیر حرارت متغیر در دو جهت شعاعی و عمقی قرار میگیرد معءدله تغییرات درجه حرات برای ورقه بصورت زیر است، تغییرات درجه حرارت در سطح تیتانیم بفرم سهمی (Parabola) که درجه حرارت در مرکز ورقه 800 و در لبه آن 300 میباشد . تغییرات درجه حرارت درعمق ورقه بصورت خطی است مطابق شکل ۸—a . معادله تغییرات‌درجه‌حرارت:

$$T=(1-4Z')\left[800-500\left(\frac{r}{b}\right)^2\right] \qquad (15)$$

لبهٔ خارجی در مقابل دوران ثابت ولی آزادی انبساط شعاعی دارد (حالت ۱)

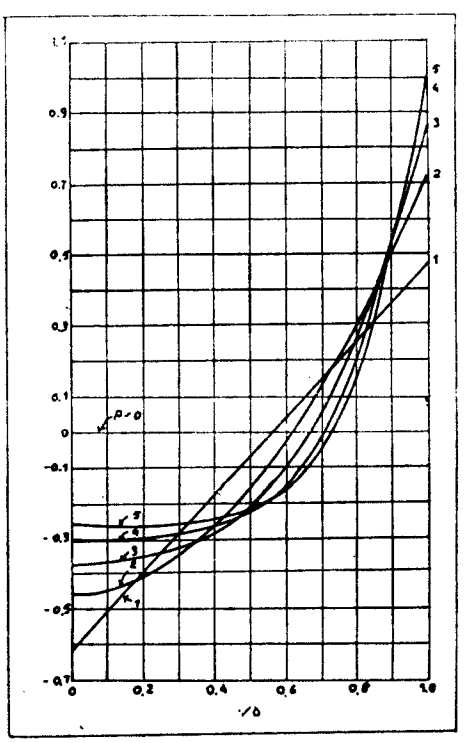


شن ٤

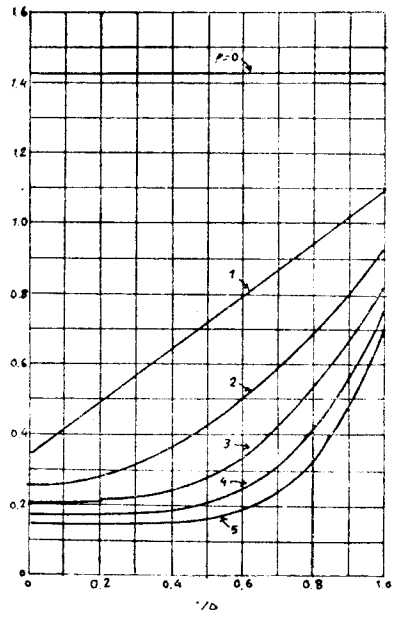


شن ۳

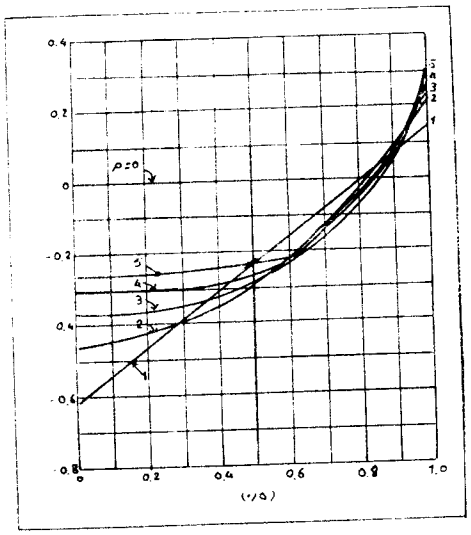
۳- دیاگرام برای بدست‌آوردن مقادیر A_p و B_p و C_p مربوط به معادلات خیز و تنش‌ها



شن ٥



شن - ٦



شن - ٧

٢ دیاگرام برای تعیین مقادیر F_p و G_p مربوط به مؤلفه‌های تنش HOOP

	Steel فولاد	Titanum تیتانیم
ضخامت	o.io in	ضخامت 0.05in.
(ضریب) نسبت پواسون	$v_2=0.3$	(ضریب) نسبت پواسون $v_1=0.3$
شعاع ورقه	$b_2=10.00$in.	شعاع ورقه $b_1=10.00$in.
	$E_2=30\times10^6$psi	مدول‌الاستیسیته $E_1=15\times10^{-6}$ psi

ضریب انبساطی‌خطی $\alpha_2=6\times10^{-6}$ in./in. $-F$ $\alpha_1=4.5\times10^6$ in./in. $-F$

با داشتن معلومات فوق مقادیر زیر را برای مرکز ورقه بدست آورید

۱- خیز DEFLECTION

۲- تنش‌های شعاعی RADIAL STRESSES

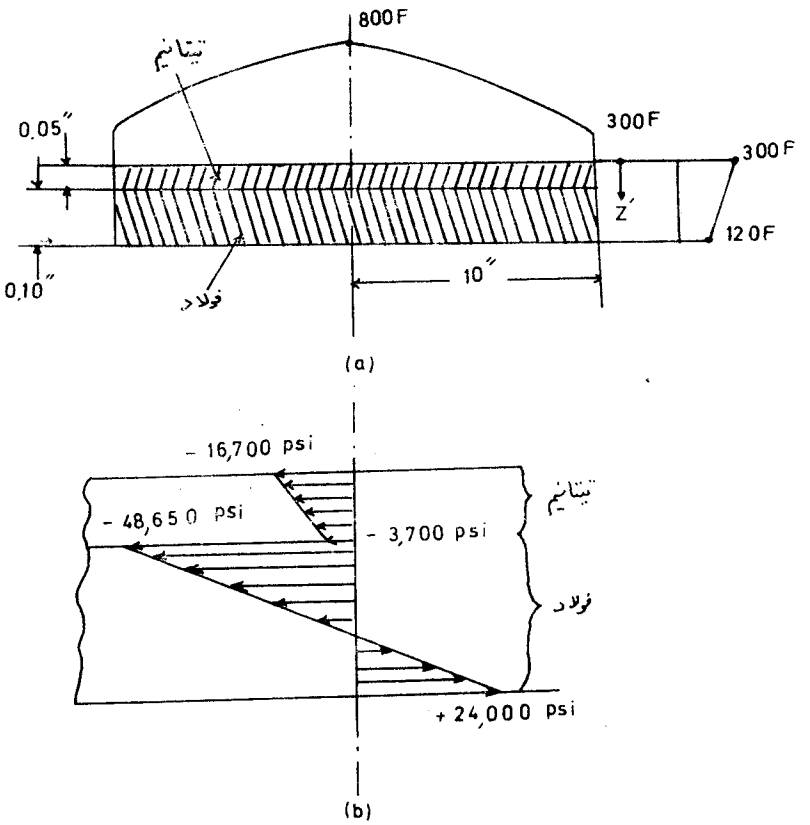
۳- تنشن‌های هوپ HOOP STRESSES

حل : ابتدا مقادیر زیر برای ورقه بدست میآوریم. این مقادیر راخواص مقطع گویند. مطابق شکل داریم:

$$Z'_1=0.05,\ Z_2'=0.15 \text{ و } Z_o'=0$$

با داشتن این دو مقدار E_1 و E_2 و مقدار Z'' بدست میاید.

$$Z''=\frac{E_1[(Z_i)^2-0]+E_2[(Z'_2)^2-(Z'_i)^2]}{2[E_1(Z_1'-0)+E_2(Z_2'-Z_1')]}=0.085 \text{ in.}$$



ش۸ - (a) مقطع ورقه مدورکه لایه‌بالایی آن از تیتانیم ولایه زیر فولاد است با اندازه‌ها و همچنین منحنی‌های تغییرات درجه حرارت در جهت شعاعی و عمقی نشان داده شده .
(b) - دیاگرام تنش‌های شعاعی دردولایه مطابق شکل تغییرات این تنش‌ها خطی است

سپس K و D را بدست میآوریم .

$$Z=Z'-Z''$$

$$Z_o=Z_o'-Z_o'' \Longrightarrow Z_o=0-0.085=-0.085 \text{ in.}$$

$$Z_1=Z_1'-Z_1'' \Longrightarrow Z_1=0.05-0.085=-0.035 \text{ in.}$$

$$Z_1=Z_2'-Z_2'' \Longrightarrow Z_2=0.15-.085=0.06S \text{ in}$$

باقرار دادن مقادیر Z_o و Z_1 و Z_2 و E_1 و E_2

باداشتن مقادیر Z_o و Z_1 و Z_2 واستفاده از روابط (۱) و(۲) مقادیر D و K بدست میآیند .

$$D=\frac{1}{3(1-\nu^2)}[E_1(Z_1^3-Z_o^3)+E_2(Z_2^3-Z_2^3)]=6630 \text{ ib}-\text{in}$$

$$K=E_1(Z_1-Z_o)+(E_2-E_1)=3.75\times 10^6 \text{ ib/in.}$$

سپس باید پارامترهای درجه حرارت بدست آیند .بامقایسه معادله درجه حرارت بامعادله کلی درجه‌حرارت یعنی معادله(4) خواهیم داشت .

$$T_o(Z)=1-4Z'$$

$$Z=Z'-Z'' \Longrightarrow Z'=Z+Z'' \Longrightarrow Z'=Z+0.085$$

$$T_o(Z)=1-4(Z+0.085)$$

$$T_o(Z)=0.66-4Z$$ معادله درجه حرارت نسبت به متغیر Z

واز معادلات 6 و 9 مقادیر K_1 و K_2 را بدست میآوریم.

$$K_1=E_1\alpha_1\int_{Z_o}^{Z_1}T_o(Z)ZdZ+E_2\alpha_2\int_{Z_1}^{Z_2}T_o(Z)ZdZ=67.5\int_{-0.085}^{-0.045}(0.66-4Z)ZdZ$$

$$+180\int_{-0.035}^{0.065}(0.66-4Z)ZdZ=-0.0833\,lb$$

$$K_2=E_1\alpha_1\int_{Z_o}^{Z_1}T_o(Z)dZ+E_2\alpha_2\int_{Z_1}^{Z_2}T_o(Z)dZ$$

$$K_2=67.5\int_{-0.085}^{-0.035}(0.66-4Z)dZ+180\int_{-0.035}^{0.065}(0.66-4Z)dZ=13.84\ ib/in.$$

بامقایسه معادله تغییرات درجه حرارت برای ورقه مورد بحث بامعادله (٤) پارامترهای زیر بدست میآیند .

$$P=0 \text{ و } P=2$$

$$a_o=800 \text{ و } a_2=-500$$

برای تعیین مقادیرعددی توابع A_p . $F_pC_pB_p$ و G_p که درفرمولهای خیز وتنش وجود دارند باداشتن $\left(\frac{r}{b}\right)$ و P بااستفاده از دیاگرامهای 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — بصورت زیر عمل می کنیم .

مقدار $r=0$ است زیرامرکز ورقه مورد مطالعه قرار گرفته

$$\frac{r}{b}=0 \text{ و } P=0$$

از دیاگرام5 $c_p=0$ ازدیاگرام 4 $B_p=1.43$ ازدیاگرام 3 $F_p=0$

ازدیاگرام 7 $G_p=-0.465$ ازدیاگرام 6 $F_p=0.250$

$$\frac{r}{b}=0 \text{ و } P=2$$

$$A_p=0.0895\ B_p=0.250\ c_p=-0.465\ F_p=0.250\ G_p=-0.465$$

۱-تعیین خیز درمرکز ورقه . از فرمول حالت (۱) استفاده میشود.

$$W=-\frac{b^2K_1a_p}{D}A_p$$

دومقدار بدست آمده از معادله بالا بازاء $P=0$ و $P=2$ راباهم جمع می کنیم.

$$W=-\frac{(b)^2K_1a_o}{D}A_o-\frac{b^2K_1a_2}{D}A_2$$

$$W=-\frac{b^2K_1}{D}(a_oA_o+a_2A_2)=\frac{(10)^2(-0.0833)}{6630}[800(0)-500(0.0895)]$$

$$W=-0.056 \text{ in.}$$

مقدار خیز در مرکز ورقه

جهت خیز بطرف بالاست

۲ـمحاسبه تنش های شعاعی

مقدار تنش شعاعی در لایه بالایی $i=1$ از معادله (7) بدست میآید .

$$\sigma_r=E_1a_o\left[\frac{K_2}{K}B_o+\frac{K_1}{D(1-\nu^2)}C_oZ-\frac{\alpha_1T_o(Z)^1}{1-\nu}\right]+E_1\alpha_2\left[\frac{K_2}{K}B_2+\frac{K_1}{D(1-\nu^2)}C_2Z-\frac{\alpha_1T_o(Z)(0)}{1-\nu}\right]$$

$$\sigma_r=15\times10^6(800)\left[\frac{13.84}{3.78\times10^6}(1.43)+\frac{(-0.0833)(0)Z}{6630(0.91)}\right.$$

$$+15\times10^6(-500)\left[\frac{13.84}{3.75\times10^6}(0.250)+\frac{(-0.0833)(-0.465)Z}{6630}\right.$$

$$\left.-\frac{4.5\times10^{-6}(0.66-4Z)(0)}{0.7}\right.$$

$$\sigma_r=(5{,}375+259{,}750Z) \text{ psi}$$

معادله تغییرات خطی تنش شعاعی در لایه‌بالایی $i=1$

مقدار تنش شعاعی در لایه پائین $i=2$ را بدست میآوریم

$$\sigma_r=E_2a_o\left[\frac{K_2}{K}B_o+\frac{K_1G_oZ}{D(1-\nu^2)}-\frac{\alpha_2T_o(Z)}{1-\nu}\times1\right]+E_2\alpha_2\left[\frac{K_2}{K}B_2+\frac{K_1C_2Z}{D(1-\nu^2)}-\frac{\alpha_2}{1-\nu}T_o(Z)(0)\right]$$

$$=30\times10^6(800)\left[\frac{13.84(1.43)}{3.75\times10^6}+\frac{(-0.0833)(0)Z}{6630(0.91}\right.$$

$$\left.-\frac{6\times10^{-6}(0.66-4Z)}{0.7}\right]+30\times10^6(-500)\left[\frac{13.48(0.250)}{3.75\times10^6}+\right.$$

$$\frac{(-0.0833)(-0.465)}{6630(0.91}-\frac{6\times10^{-6}(0.66-4Z)(0)}{0.7}=(-23250+726700Z) \text{ psi}$$

معادله تغییرات خطی تنش شعاعی در لایه پائین

۳ـمحاسبه تنش های هوپ Hoop stresses

بااستفاده از معادله (8) مقدار تنش های هوپ بدست میآید.

چون این روابط برقرار هستند

$$\frac{r}{b}=0 \quad p=0,2 \quad F_a=B_p \text{ و } C_p=G_p$$

باقرار دادن مقادیر معلوم درمعادله (8) مقادیر تنش هوپ باتنش شعاعی یکی میشود.

دیاگرام شعاعی درشکل ۸ — b نشان میدهد که تغییرات تنش شعاعی در هر دولایه بصورت خطی است واین خطی بودن تنش بخاطر خطی بودن تغییرات درجه حرارت در عمق ورقه میباشد.

منابع REFERENCE

1- Machinedesign March 28 1963