توابع همگن

نوشتهٔ :

هاشم مهرآذین

استادیار دانشکده فنی

چکیده

در بررسی زیر ما ابتدا توابع همگن درجه اول و بعد توابع همگن درجه n ام با p متغیر (یعنی توابع از $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}$) را مطالعه خواهیم کرد. بعد از آن خواهیم دید که مجموعه این توابع یک گروه تعویض پذیر نسبت به جمع تشکیل می‌دهد وشکل یک فضای برداری در روی مجموعه $\mathbf{R}$ اعداد حقیقی را دارد. در پایان ما زیر مجموعه‌ای که از چند جمله‌ای‌های همگن p متغیره از درجه n ام ایجاد شده‌اند و پایه (مبنی) این زیرمجموعه‌را مطالعه خواهیم کرد و نشان‌خواهیم داد که بعداین‌پایه یعنی‌تعداد چندجمله‌های زیر مجموعه بالا که از یکدیگر مستقل خطی هستند بوسیله رابطه :

$$K_n(p)=\frac{(p+n-1)!}{n!(p-1)!}$$

بدست می‌آید .

۲ ـ توابع همگن درجه اول : ابتدا حالت ساده‌ای را که تابع ازسه متغیر x و y و z تبعیت می‌کند درنظر بگیریم. گویند که تابع $f(x\,,\,y\,,\,z)$ همگن از درجه اول است اگر داشته باشیم :

$$f(kx\,,ky\,,\,kz)=kf(x\,,\,y\,,\,z)$$

بآسانی مشاهده می‌شود که توابع :

$$f_1(x\,,\,y\,,\,z)=a(x+y+z) \quad \text{و} \quad g_1(x\,,\,y\,,\,z)=bx^\alpha y^\beta z^\gamma$$

با $\alpha+\beta+\gamma=1$ و

$$h_1(x\,,\,y\,,\,z)=cx^\alpha y^\beta z^\gamma(x+y+z)^\delta$$

با $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ که درآنها $\delta\,,\,\gamma\,,\,\beta\,,\,\alpha\,,\,c\,,\,b\,,\,a$ اعداد حقیقی مثبت منفی یا صفرهستند توابع همگن درجه یک‌هستند زیرا مثلا :

$$\begin{aligned}h_1(kx\,,\,ky\,,\,kz)&=c(kx)^\alpha(ky)^\beta(kz)^\gamma(kx+ky+kz)^\delta=zk^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}x^\alpha y^\beta z^\gamma(x+y+z)^\delta\\&=ckx^\alpha y^\beta z^\gamma(x+y+z)^\delta=kh_1(x\,,\,y\,,\,z)\end{aligned}$$

در مورد توابع درجه اول p متغیره توابع h_1 , g_1 , f_1 مربوطه به‌شکل های زیر هستند :

$$f_1(x_1\,,\,x_2\cdots x_p)=a(x_1+x_2-\cdots+x_p)$$

$$g_1(x_1\,,\,x_2\cdots x_p)=bx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_p^{\alpha_p} \quad \text{با} \quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=1$$

$$h_1(x_1\,,\,x_2\cdots x_p)=cx_1^{\alpha_2}\cdots x_p^{\alpha_p}(x_1+\cdots+x_p)^{\beta} \quad \text{با} \quad \alpha_1+\cdots+\alpha_p+\beta=1$$

اگرمجموعه این توابع را $H_1(p)$ بنامیم به‌آسانی مشاهده‌می‌شود که هرترکیب خطی از توابع f_1 , g_1 و h_1 به $H_1(p)$ تعلق دارد و این مطلب را در مورد $H_n(p)$ به دقت بررسی خواهیم کرد.

۳ - توابع همگن درجه n ام : یک تابع $f_n(x_1\,,\,x_2\cdots x_p)$ از p متغیر را همگن از درجه n ام گویند اگر : رابطه :

$$f_n(kx_1\,,\,kx_2\cdots kx_p)=k_nf_n(x_1\,,\,x_2\cdots x_p)$$

$\forall k\,\varepsilon\,\mathbf{R}$ برقرار باشد.

لازم بتذکراست که در اینجا n درجه چندجمله‌ای‌را نشان‌می‌دهد و ربطی با اندیس n یک‌دنباله تابع ندارد.

ابتدا نشان دهیم که $H_n(p)$ یک‌گروه آبلی (تعویض پذیر) برای جمع توابع تشکیل می‌دهد :

در واقع :

اگر $f_n\,\varepsilon\,H_n(p)$, $g_n\,\varepsilon\,H_n(p)$ باشد. ایجاب می کند که $f_n+g_n\,\varepsilon\,H_n(p)$ باشد زیرا :

$$(f_n+g)_n(kx_1\cdots kx_p)=f_n(kx_1\cdots k_p)+g_n(kx_1\cdots kx_p)$$
$$=k^nf_n(x_1\cdots x_p)+k^ng_n(x_1\cdots x_p)=k^n(f_n+g_n)(x_1\cdots x_p)$$

بعلاوه اگر e_n تابعی از درجه n ام باشدبطوریکه به $(x_1\cdots x_p)$ مقدار $e_n(x_1\cdots x_p)=o$ رانسبت بدهد یعنی $e_n\equiv o$ باشد می‌دانیم که e_n هم به $H_n(p)$ تعلق دارد. زیرا :

$$e_n(kx_1\cdots kx_p)=o=k^ne_n(x_1\cdots x_p)$$

باین‌ترتیب براحتی می‌توان چهار خاصیت یک‌گروه آبلی را در مورد عناصر $H_n(p)$ نوشت :

$$(f_n+g_n)+h_n=f_n+(g_n+h_n)=f_n+g_n+h_n \tag{1}$$

$$f_n+e_n=e_n+f_n=f_n \tag{2}$$

$$f_n+(-f_n)=(-f_n)+f_n=e_n\equiv o \tag{3}$$

$$f_n+g_n=g_n+f_n \tag{4}$$

بعلاوه اگر $\mathbf{R}$ هیئت (میدان) اعداد حقیقی باشد ، چهار خاصیت دیگر فضای برداری نیز صادق هستند از جمله :

$$\lambda(f_n+g_n)=\lambda f_n+\lambda g_n \qquad \lambda\varepsilon \mathbf{R} \tag{۱}$$
$$(\lambda+\mu)f_n=\lambda f_n+\mu f_n \qquad \mu\in\mathbf{R}\,. \tag{۲}$$
$$\lambda(\mu f_n)=\lambda\mu f_n \tag{۳}$$
$$f_n+g_n=g_n+f_n \tag{۴}$$

بنابراین $H_n(p)$ یک فضای برداری روی هیئت $\mathbf{R}$ تشکیل می‌دهد.

۴ - زیرمجموعه $E_n(p)$: حالا اگرمجموعه‌ای از توابع f_n را که از چندجمله‌ای‌های n ام تشکیل شده‌اند درنظربگیریم براحتی مشاهده می‌کنیم که $E_n(p)$ خود تشکیل یک فضای برداری می‌دهد که یک زیر فضای $H_n(p)$ است.

۱ - ۴ محاسبه $K_1(p)$, $K_2(p)$

حال نشان دهیم که $E_n(p)$ دارای یک پایه با پایان است و تعداد عناصر این پایه (مبنی) را بازاء مقدارهای مختلف p و n مشخص سازیم :

برای $n=۱$ اگرچند جمله‌ای‌های $P_1(x_1\cdots\cdots x_p)$ متعلق به $E_1(p)$ را درنظر بگیریم تمام آنها بصورت یک ترکیب خطی از $x_1\cdots\cdots x_p$ نوشته می‌شوند یعنی :

$$P_1(x_1\,,\,\cdots\cdots x_p)=a_1x_1+\cdots\cdots+a_px_p$$

که در آن $a_1\ \cdots\cdots\ a_p$ اعداد حقیقی و متعلق به $\mathbf{R}$ هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $x_1\cdots\cdots x_p$ یک پایه برای $E_1(p)$ تشکیل می‌دهند و بعد (تعداد عناصر مبنی) $E_1(p)$ برابر p برابر است. برای تعیین چند جمله‌ای‌های پایه $E_2(p)$ کافی است $(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_p)^2$ را بروش زیر بسط دهیم

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_p)(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_p)=x_1(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_p)+x_2(x_2+\cdots\cdots+x_p)$$
$$+x_3(x_3+\cdots\cdots+x_p)+\cdots+x_{p-1}(x_{p-1}+x_p)+x_p^2+\cdots\cdots$$

مشاهده می‌کنیم که باین ترتیب هریک از ترکیب‌های ۲ به ۲ ممکن x_i و x_j برای $۱\leqslant i\leqslant p$ و $۱\leqslant j\leqslant p$ فقط یک بار به‌حساب آمده‌اند عده $K_2(p)$ این ترکیب‌ها که تشکیل یک پایه برای $E_2(p)$ می‌دهند از شمردن تعداد x_i ها در هریک از پرانتزها بدست می‌آیند و داریم :

$$K_2(p)=p+(p-۱)+\cdots\cdots+۲+۱=\frac{p(p+۱)}{۲}$$

همچنین می‌توانیم تعداد $K_2(p)$ را با توجه به اینکه $K_2(p)=C_p^2+p$ بدست آوریم.

دراینجا C_p^2 تعداد ترکیب‌های p عنصر ۲ به ۲ است و p تعداد جملاتی که بصورت x_i^2 برای $۱\leqslant i\leqslant p$ هستند. دراین صورت پیدا می‌کردیم که :

$$K_2(p)=\frac{p!}{۲!(p-۲)!}+p=\frac{p(p-۱)}{۲}+p=\frac{p(p+۱)}{۲}=\frac{(p+۱)!}{۲!(p-۲)!}$$

۲ - ۴ محاسبه $K_n(p)$: اگر روش بالا را تعمیم دهیم مشاهده می‌کنیم که ازگسترش دادن

عبارت $(x_1+x_2+\cdots+x_p)^n$ بدست می‌آوریم :

$$(x_1+x_2+\cdots+x_p)^n=x_p\cdot x_p^{n-1}+x_{p-1}(x_{p-1}^{n-1}+x_p^{n-1}x_{p-1}^{n-2}x_p+\cdots)$$
$$+x_{p-2}(x_{p-2}^{n-1}+x_{p-2}^{n-2}x_{p-1}+x_{p-2}^{n-2}x_p+\cdots)+\cdots$$

که در آن پرانتز اول از تمام جملات ممکن ترکیب شده از x_{-1} و x_p با توان n تشکیل شده و پرانتز دوم از جمله هائی که از x_{p-2} , x_{p-1} , x_p درست شده‌اند و توان آنها $n-1$ است تشکیل شده‌اند.

می‌دانیم که تعداد این جمله ها درپرانتزاول $K_{n-1}(2)$ در پرانتز دوم $K_{n-1}(3)$ و بالاخره در پرانتز p ام برابربا $K_{n-1}(p)$ است بنابراین :

$$K_n(p)=K_{n-1}(1)+K_{n-2}(2)+\cdots+K_{n-1}(p)=\sum_{k=1}^{p}K_{n-1}(k)$$

برای محاسبه $K_n(p)$ به‌صورت تابعی از n و p مشاهده می‌کنیم که :

$$K_3(p)=\sum_{k-1}^{p}K_2(p)=\sum_{k=1}^{p}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p}k^2+\sum_{k=1}^{p}k\right)$$

اما می‌دانیم که :

$$\sum_{k=1}^{p}k^2=\frac{p(+1)(2p+1)}{6}\quad و \quad\sum_{k=1}^{p}k=\frac{p(p+1)}{2}$$

است بنابراین :

$$K_3(p)=\frac{1}{2}\left[\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+\frac{p(p+1)}{2}\right]=\frac{p(p+1)(p+2)}{6}=\frac{(p+2)!}{3!(p-1)!}$$

اگرمحاسبه را بهمین ترتیب ادامه دهیم پیدا می‌کنیم که :

$$K_4(p)=\frac{(p+3)!}{4!(p-1)!}$$

و از آنجا :

$$K_n(p)=\frac{(p+n-1)!}{n!(p-1)!}$$

بعلاوه ملاحظه می‌کنیم که برای $p=2$ و $p=3$ $K_n(2)$ $K_n(3)$ به صورت‌های ساده زیر درمی‌آیند

$$K_n(2)=n+1\qquad\qquad K_n(3)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Bibliographie

١ – Mathématiques Générales PISOT – Zamansky

٢ – Algébre Moderne LENTIN – RIVAUD.

٣ – L'enseigment des Mathématiques Génererales par les Poblémes
BOULIGAAND – RIVAUD

٤ – L'introduction a l' Algébre et l'analyse modernes : Zamansky

٥ – Cours polycopiés et problémes de mathématiques: par LEFORT, MENY