مدل سرمایه‌گذاری دینامیک تحت اطلاعات و باورهای احتمالی ناهمگن

نوشته :

کارولو کس

استادیار دانشکده فنی

چکیده

ازآنجا که برگشت سرمایه برای امکانات گوناگون سرمایه‌گذاری از پیش باقطعیت معلوم نیست بهترین توزیع سرمایه‌گذاری در هرلحظه بعنوان یک مسئله کنترل استوکاستیک مطرح میشود. دراین مقاله بااستفاده از روشهای جدید در نظریه توابع تصادفی وحساب استوکاستیک مسئله در حالتی بررسی میشود که اطلاعات موجود در دسترس سرمایه‌گذران، مختلف است و نیز تخمین آنها ازقانون احتمالی برای برگشت سرمایه متناظر با امکانات گوناگون سرمایه‌گذاری، متفاوت میباشد. بخصوص ثابت میشود که، چنانچه شرکت کنندگان مختلف در بازار سرمایه‌گذاری در مورد عدم امکان وقایع توافق داشته باشند. میتوان سرمایه هائی واسطه تشکیل داد. بطوریکه هر کس مطابق اطلاعات وتخمین احتمالی خود ترکیبی مناسب ازاین سرمایه ها انتخاب کندوضمناً بهترین مقدار را برای تابع استفاده خود اخذ کند.

۱ـ کلیات

ابتداقرار دادخود را برای کمیتهای مختلف مورد بررسی معرفی میکنیم. فرض براین است که N موقعیت مختلف برای سرمایه‌گذاری موجوداست که هریک توسط تابع برگشت نظیر خود درهر لحظه مشخص میشوند. کمیت قابل کنترل، نسبتهایی است که هرسرمایه‌گذار برای موقعیتهای مختلف در هرلحظه تخصیص میدهد.

بطوریکه داریم:

$dR_{it}=$ نرخ بازگشت سرمایه متناظر با موقعیت شماره i ودرلحظه t

$W_t=$ مقدار سرمایه موجود در لحظه t

$\theta_{it}=$ نسبت سرمایه‌گذاری در موقعیت شماره i ودر زمان t

$U(\cdot)=$ تابع استفاده مورد نظر

بدین ترتیب چنانچه مصرف را در نظر نگیریم مقدار سرمایه در هرلحظه از معادله دیفرانسیل استوکاستیک زیر بدست میآید[۱]

$$dW_t/W_t = \sum_{i=1}^{N} \theta_{it}\, dR_{it} \qquad (1)$$

البته چنانچه برخی از موقعیتهای ذکرشده برای سرمایه‌گذاری شامل خرید سهام باشد چگونگی تعیین تابع برگشت بااستفاده از تابع بهره در مقاله [۲] مشخص شده‌است.

معادله (۱) یک معادله دیفرانسیل استوکاستیک میباشد. اطلاعات شرکت کنندگان مطابق معمول [۱] توسط یک خانواده افزاینده جبر σ[1] که بصورت اختصاری F_t نمایش داده میشود بیان شده‌است بطوریکه جریانهای R_{it} و بالنتیجه W_t در هرلحظه نسبت به F_t قابل اندازه‌گیری میباشد. زیرا مقدار برگشت سرمایه راپس از وقوع همیشه میتـــوان مشاهده نمود. مقدار سرمایه باانتگراسیون از معادله (۱) بدست میآید.

$$W_t = W_o \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \int_o^t \theta_{it}\, dR_{it} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_o^t \theta_{it}\,\theta_{jt}\, d < R_i\,,\, R_j >_t \right) \qquad (2)$$

قسمت دوم داخل پرانتز دارای جمله هائی بشکل $d < R_i \,,\, R_i >_t$ میباشد که وجودش بخاطر تصادفی بودن برگشت سرمایه وجود خطر ناشی از عدم قطعیت میباشد. بزبان غیردقیق ریاضی این جملات چنین تعریف میشوند[۱]

$$d < R_i\,,\, R_j >_t = \mathrm{cov}\,(dR_{it}\,,\, dR_{jt} \mid F_t) \qquad (3)$$

که درآن علامت $\mathrm{cov}(\cdot,\cdot|\cdot)$ کوواریانس مشروط را نمایش میدهد.

۲- مدل‌های تسلط استوساستیک[2]

همانطور که گفته‌شد بازگشت کلی روی ترکیب انتخاب شده ازسرمایه‌گذاری هر شخصی توسط رابطه زیرداده میشود.

$$dR_{pt} = \sum_{i=1}^{N} \theta_{it}\, dR_{it} \qquad (4)$$

که در آن داریم :

$$\sum_{i=1}^{N} \theta_{it} = 1 \qquad (5)$$

درمقاله [۱] تشریح شده‌است که باانتخاب ۱ — N موقعیت سرمایه‌گذاری اول میتوان بجای موقعیت شماره N ترکیبی ازسرمایه‌گذاری مختلف در نظرگرفت بطوریکه اگر آنرا با اندیس صفر نشان دهیم مقدار خطر حاصل که توسط رابطه زیر داده میشود، می‌نیمم باشد:

minimize :

$$d < R_o\,,\, R_o >_t = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \theta^\circ_{it}\, \theta^\circ_{jt}\, d < R_i\,,\, R_j >_t \qquad (6)$$

ثابت میشود که شرط می‌نیمم بودن چنین بیان میشود.

---

۱ — increasing family of σ - algebras

۲ — Stochastic Dominance

$$d < R_i , R_o >_t = d < R_o , R_o >_t \qquad (۷)$$

اکنون اگر نسبتهای جدیدرا بعوض θ_i به λ_i نمایش دهیم برای حالتی که تابع استفاده فقط بستگی بمقدار سرمایه در هر زمان داشته‌باشد بطوریکه این تابع همواره‌صعودی ومقعر باشد ثابت میشود[۱] که‌به‌ازای هرمقدار مشخصی‌برگشت کل ترکیب‌سرمایه‌گذاری طوری انتخاب میشود که مقداردیسک کمینه باشد:

minimize :

$$d < R_p , R_p >_t = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_{it} \lambda_{jt} \, d < R'_i , R'_j >_t + d < R_o , R_o >_t \qquad (۸)$$

Subject to :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{it} \, E\left[dR'_{it} | F_t \right] + E\left[dR_{ot} | F_t \right] = M_t \, dt \qquad (۹)$$

که درآن داریم :

$$dR'_{it} = dR_{it} - dR_{ot} \qquad (۱۰)$$

چنانچه مقدار ریسک را با $S^2_t dt$ نمایش دهیم نقطه اپیتمال درصفحه $S_t - M_t$ یک مسیر هذلولی خواهد داشت(شکل ۱)
اکنون چنانچه بجای اطلاعات F_t اطلاعات $F'_t \supset F_t$ جایگزین شود. بنابرقانون تصاویر مکرر در فضای هیلبرت خواهیم داشت:

$$E\left[E[dR'_{it} | F'_t] - E[dR'_{it} | F_t] \,|\, F_t \right] = 0 \qquad (۱۱)$$

یعنی چنانچه بااستفاده از اطلاعات جدید بهترین استراتژی ترکیب λ'_i از موقعیتهای مختلف سرمایه گذاری باشد خواهیم داشت :

$$E\left[\lambda'_i - \lambda_i | F_t \right] = 0 \qquad (۱۲)$$

یعنی نسبتهای اضافی برای کسی که فاقد این اطلاعات باشد قابل تخمین نیست.

۳ـ مدلهای مصرف

اکنون‌اگر فرض کنیم که در هرلحظه‌نسبت c_t ازسرمایه شخص مصرف میشود معادله(۱)باین‌صورت بازنوشته میشود.

$$dW_t / W_t = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{it} \, dR'_{it} + dR_{ot} - c_t \, dt \qquad (۱۳)$$

البته منطقی‌آنست که دراینحالت‌فرض کنیم‌تابع‌استفاده بستگی بمصرف شخص‌دارد. بااستفاده ازمدل تشریح شده درمقاله‌های ([۱] و[۳] فرض میکنیم‌که اطلاعات F_t توسط یک بردار حالت‌مارکوف که به X_t نموده میشود بوجود بیاید. دراینصورت ثابت میشودکه نسبتهای λ_{it} ازمعادله‌زیر بدست میآید .

$$\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{jt}\, d < R'_i\,,\, R'_j >_t = A_{rt}\, E\left[dR'_{it} | X_t \right] + \sum_{k=1}^{m} A_{kt}\, d < R'_i\,,\, X_k >_t \qquad (14)$$

که‌درآن X_k مولفه k ام بردار و X و A_{rt} و A_{kt} بستگی بتابع استفاده دارند.

ازآنجا که بهازای $i = 1, 2, \cdots, N-1$ معادلات(۱٤) یک دستگاه معادلات خطی جبری را مشخص‌میکنند که‌درآن مقادیر λ_{jt} مجهول میباشند. بااستفاده از اصل اجتماع اثرها[1] میتوان‌گفت که پاسخ‌مجموع $m+1$ مولفه متناظر با $m+1$جمله سمت‌راست‌میباشد بطوریکه mیعدبردار X_t میباشد. جمله اول متناظر باحالتی‌است که‌در بخش قبل در نظر گرفتیم‌و کم‌خطرترین سرمایه‌گذاری‌برای هرامید ریاضی‌برگشت‌شخصی‌را بدست‌میدهد. m جمله‌دیگر سرمایه‌گذار را در برابر تغییرات نامطلوب در موفقیتهای سرمایه‌گذاری‌آینده بیمه‌میکند بطوریکه برگشت را برای حالاتی که‌امید ریاضی نرخ برگشت آینده سرمایه کاهش‌مییابدیاافزون میسازد. میتوان‌گفت که‌درعوض Nموقعیت موجود میتوان $m+1$«سهام»مختلط‌به‌وجود آورد که علی‌رغم‌توابع مختلف‌استفاده تمام شرکت کنندگان‌بتوانندباانتخاب‌ترکیب مناسب(توابع A_{rt}, $(A_{kt},\ k = 1,\ldots,m$ از این «سهام» مختلط بیشترین مقدار را برای تابع استفاده خود ایجاد کنند.

٤ـ اثر اعتقادات غیر همگن

از آنجا که‌جمل $d < R'_i, R'_j >_t$ و $d < R'_i\,,\, X_k >_t$ قابل مشاهده میباشند m «سهم» مختلط بیمه‌دربرابر تغییرات نامطلوب امکانات آتی مستقل از اعتقادات شرکت کنندگان‌در مورد قانون احتمالی X_t و یا اطلاعات اضافی‌ایشان میباشد. اماهمانطورکه در بخش دوم ملاحظه شد جمله اول بستگی باین اعتقادات دارد. دراین بخش‌اثر یک تعبیر کاملا پیوسته درقانون احتمالی X_t را مطالعه میکنیم بطوریکه X_t خاصیت مارکوف بودن خودرا حفظ کند. چنانچه Λ مشتق رادن نیکودیم احتمال دوم نسبت به احتمال اول باشد وداشته باشیم.

$$\Lambda_t = E_1\,[\Lambda | F_t] = E_1\left[\frac{dP_2}{dP_1} | F_t \right] = \exp\left(M_t - \frac{1}{2} < M\,,\, M >_t \right) \qquad (10)$$

آنگاه برای جمل‌اول رابطه (۱٤) میتوان نوشت:

$$E_2\left[dR'_{it} | F_t \right] = E_1\left[dR'_{it} | F_t \right] + d < R'\,,\, M >_t \qquad (16)$$

اگر M تابع بردار حالت باشد بااستفاده از رابطه‌زیر

$$d < R'_i\,,\, M >_t = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial M}{\partial X_k}\, d < R'_i\,,\, X_k >_t \qquad (17)$$

میتوان رابطه (۱٤) را چنین نوشت:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{jt}\, d < R'_i, R'_j >_t = A_{rt}\, E\left[dR'_{it} | F_t \right] + \sum_{k=1}^{m} \left(A_{kt} + A_{rt} \frac{\partial M}{\partial X_k} \right) d < R'_i\,,\, X_k >_t \qquad (18)$$

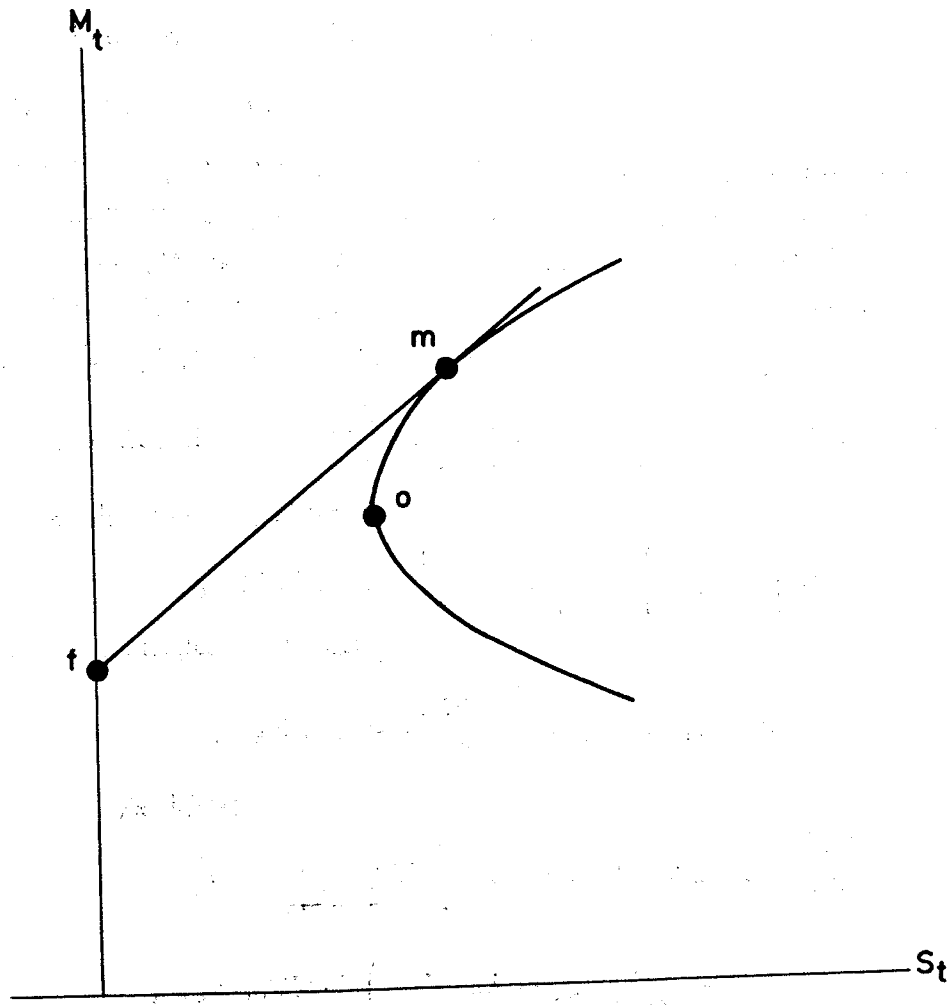
$$j = 1, 2, \cdots, N-1$$

1 — Superposition

یعنی در ترکیب داخلی ۱ + m «سهم» ذکرشده هیچگونه تغییری داده نمیشود وفقط نسبتهائیکه هرشرکت کننده ازاین سهام انتخاب میکند مطابق بااعتقادات جدید اصلاح میشود.

۵ـ نتیجه گیری

ازآنجاکه هیچگاه شرایط ایدال یکسان بودن اطلاعات واعتقادات مردم در واقعیت جنبه تحقق نمیگیرد. نتایجی که تاکنون در زمینه سرمایه‌گذاری در شرایط ایده‌ال عرضه میشد قابل قبول نبود دراین مقاله این نظریه در شرایطی که اطلاعات واعتقادات گوناگون موجود میباشد بررسی شد و نتایج حاصل برای این شرایط تعمیم داده شده. شرط پیوستگی کامل بیان میکند که شرط لازم و کافی برای اینکه $P_1(A) = 0$ باشد اینست که $P_2(A) = 0$ باشد. یعنی توافق در مورد وقایع غیر ممکن. ملاحظه میشود که این شرط چندان سنگین نیست واغلب تحقق مییابد. اما نتیجه‌اش که دراین مقاله بدست آمده بسیار وسیع است و بیان میکند که ترکیب داخلی سهامی که سرمایه‌گذارها انتخاب میکنند عوض نمیشود. بعلاوه نسبتی که درسهم اصلی انتخاب میشود (A_{rt}) بازبستگی باین تغییر اطلاعات ندارد واعتقادات مختلف تنها در انتخاب نسبتهای سهام بیمه مؤثر میباشند. بدین ترتیب این امکان ایجاد میشود که حتی در شرایطی که افراد اعتقادات گوناگون دارند یک سازمان مستقل بتواند به نمایندگی از طرف شرکت کنندگان مختلف سرمایه‌گذاری کند.



شکل ۱

چنانچه امکان سرمایه‌گزاری بدون خطر (f) موجود باشد مکان سرمایه‌گذاری مؤثر (هذلولی om) تبدیل به خط fm میگردد (نقطه o به نقطه f تبدیل میگردد).

۶- منابع

1- **CARO LUCAS;**

«Application of the theory of stochastic control to financial and economic systems», memorandom NOERL-M597.

15 August 1976, electronics research laboratory, U. C. Berkeley.

2- CARO LUCAS, E. WONG: «the fundamentalist's view of price fluctuation-an application of Martingale Theory», prosented at the stochastic systems symposim, University of kentucky Lexinyton kentucky, July 1975.

3- R. C. Merton: «An intertemporal capital asset pricing model». econometrica, 41 (1973) 868-887.