اثر نیروهای محوری وبرشی دراجزاء یک ساختمان

نوشتهٔ :

علی‌اصغر حائری

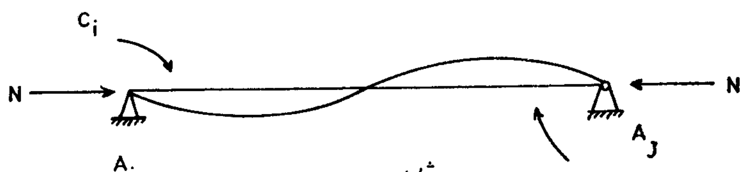
دکتر مهندس درمکانیک جامدات ، استادیار پلی‌تکنیک تهران

چکیده : درمقاله قبلی ،که درنشریه اسفند ماه ۱۳۵۱ دانشکده فنی بچاپ رسیده است . معادلات انترنسک (ذاتی) را با در نظر گرفتن اثر نیروهای محوری و برشی نشان دادیم ، در این مقاله اثر نیروهای مذکور را بر روی تغییر طول و نیروی محوری اجزاء یک ساختمان بررسی‌نموده ، همچنین اثر آنها بر روی بار بحرانی اولر اجزاء یک ساختمان ، حد مورد قبول قضیه تقابل ماکسول وترتیب بارگزاری مورد مطالعه قرار میگیرد .

۵* ـ مقطع ظاهری یک میله مستقیم با مقطع ثابت

میله $A_i A_j$ با مقطع حقیقی S از یک ساختمان را درنظر میگیریم ، این میله تحت تأثیر نیروی فشاری N ، و لنگرهای C_i و C_j وارد بردوانتهای آن قرار گرفته است . تغییر طول این میله $\triangle l$ و برابر است با :

$$\triangle l = \triangle l_n + \triangle l_f \qquad *(۱ - ۳۴)$$



شکل (۷)

$\triangle l_n$: عبارت از تغییر طول حاصل از نیروی محوری N بوده و مقدار آن برابر است با :

$$\triangle l_n = \frac{Nl}{ES}$$

* ترتیب شماره‌گزاری تیتر مطالب وفرمولها دردنباله مقاله چاپ شده درنشریه شماره ۲۵ صورت گرفته‌است.

Δl_f عبارت از تغییر طول حاصل از خمش میله $A_i A_j$ ، و مقدار آن برابر است با :

$$\Delta l_f = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

حال دوحالت زیر را با صرفنظر کردن از اثر نیروی برشی مورد بررسی قرار میدهیم .

۱ ـ ۵ : نیروی محوری N فشاری است

معادله دیفرانسیل منحنی تغییر شکل ارتجاعی میله $A_i A_j$ درفرمول (۱ ــ ۱) داده شده است .

پس از حل این معادله دیفرانسیل چنین بدست میآید :

$$y = a \sin\omega x + b\cos\omega x - \frac{1}{N} \left[C_i \left(1 - \frac{x}{l}\right) - C_j \frac{x}{l} \right] \qquad (1-36)$$

و از آنجا :

$$\frac{dy}{dx} = a\omega\cos\omega x - b\omega\sin\omega x + \frac{1}{Nl} (C_i + C_j) \qquad (1-37)$$

و مقادیر a و b از شرایط حدی زیر تعیین میگردند .

$$y(o) = y(l) = o$$

و ازآنجا :

$$a = -\frac{1}{N} \left(\frac{C_i \cos\omega l}{\sin\omega l} + \frac{C_j}{\sin\omega l} \right) \qquad \text{و} \qquad b = \frac{C_i}{N}$$

بنابراین معادله (۳۷ ــ ۱) بصورت زیر نوشته میشود .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_i}{Nl\sin\omega l} (\sin\omega l - \omega l\cos\omega l\cos\omega x - \omega l\sin\omega l\sin\omega x) + \frac{C_j}{Nl\sin\omega l} (\sin\omega l - \omega l\cos\omega x) \qquad (1-38)$$

پس از قراردادن اینمقدار $\frac{dy}{dx}$ ، درمعادله (۳۵ ــ ۱) و حل انتگرال فوق ، Δl_f محاسبه میگرد یعنی :

$$\Delta l_f = \frac{C_j^2}{N^2 l} \left\{ \frac{1}{4}\left(\frac{C_i}{C_j}\right)^2 \left[\left(\frac{\omega l}{\sin\omega l}\right)^2 - 2 + \frac{\omega l}{tg\omega l}\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\omega l}{\sin\omega l}\right)^2 - 2 + \frac{\omega l}{tg\omega l}\right] + \frac{1}{2} \frac{C_i}{C_j} \left[\frac{\omega l}{tg\omega l} \cdot \frac{\omega l}{\sin\omega l} - 2 + \frac{\omega l}{\sin\omega l} \right] \right\} \qquad (1-39)$$

با انتخاب اینکه :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\omega l}{\sin\omega l}\right)^{2} - 2 + \frac{\omega l}{tg\,\omega l}\right] &= P_C \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\omega l}{\sin\omega l}\cdot\frac{\omega l}{tg\,\omega l} - 2 + \frac{\omega l}{\sin\omega l}\right] &= Q_C \end{aligned}\right\} \qquad (۱-۴۰)$$

چنین بدست می‌آید :

$$\frac{\Delta l_f}{l} = \frac{C^2{}_j}{k^2\, n^2}\left[\left(\frac{C_i}{C_j}\right)^{2} P_C + P_C + \frac{C_i}{C_j}\, Q_C\right] \qquad (۱-۴۱)$$

که درآن $k = \frac{EI}{l}$ میباشد .

با قرار دادن :

$$\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{C_i}{C_j}\right)^{2} P_C + P_C + \frac{C_i}{C_j}\, Q_C\right] = R_C \qquad (۱-۴۲)$$

رابطه (۱ - ۴۱) بصورت زیر خلاصه میشود :

$$\frac{\Delta l_f}{l} = \frac{C^2{}_j}{k^2}\, R_C \qquad (۱-۴۳)$$

تغییرات R_C برحسب ωl برای مقادیر : $-5 < \frac{C_i}{C_j} < 5$ در دیاگرام (۱ − ۵) داده شده است .

نظر باینکه درمحاسبات ساختمانها با استفاده از روش تغییر شکل یا معادلات ذاتی ، محاسبه دوران گره‌ها ، یعنی θ_i و θ_j قبل از تعیین لنگرها صورت میگیرند ، بنابراین ، نسبت $\frac{\Delta l_f}{l}$ برحسب دوران گره‌ها بصورت زیر تعیین میگردد . معادلات ذاتی برای میله $A_i A_j$ در روابط (۸—۱) و (۹— ۱) نشان داده شده است . با ترکیب این دو رابطه با رابطه (۴۱ — ۱) چنین حاصل میشود :

$$\frac{\Delta l_f}{l} = \theta^2{}_j \cdot R'_C \qquad (۱-۴۴)$$

که درآن :

$$\begin{aligned} R'_C = \frac{1}{n^2}\Bigg[&\left\{(\alpha^2+\beta^2)\left[1+\left(\frac{\theta_i}{\theta_j}\right)^{2}\right] + 4\alpha\beta\left(\frac{\theta_i}{\theta_j}\right) P_C\right\} + \\ &+\left\{(\alpha^2+\beta^2)\,\frac{\theta_i}{\theta_j} + \alpha\beta\left[1+\left(\frac{\theta_i}{\theta_j}\right)^{2}\right]\right\} Q_C\Bigg] \end{aligned} \qquad (۱-۴۵)$$

تغییرات R'_C برحسب ωl در دیاگرام (۲ — ۵) برای مقادیر $-1 < \frac{\theta_i}{\theta_j} < 1$ رسم شده است .

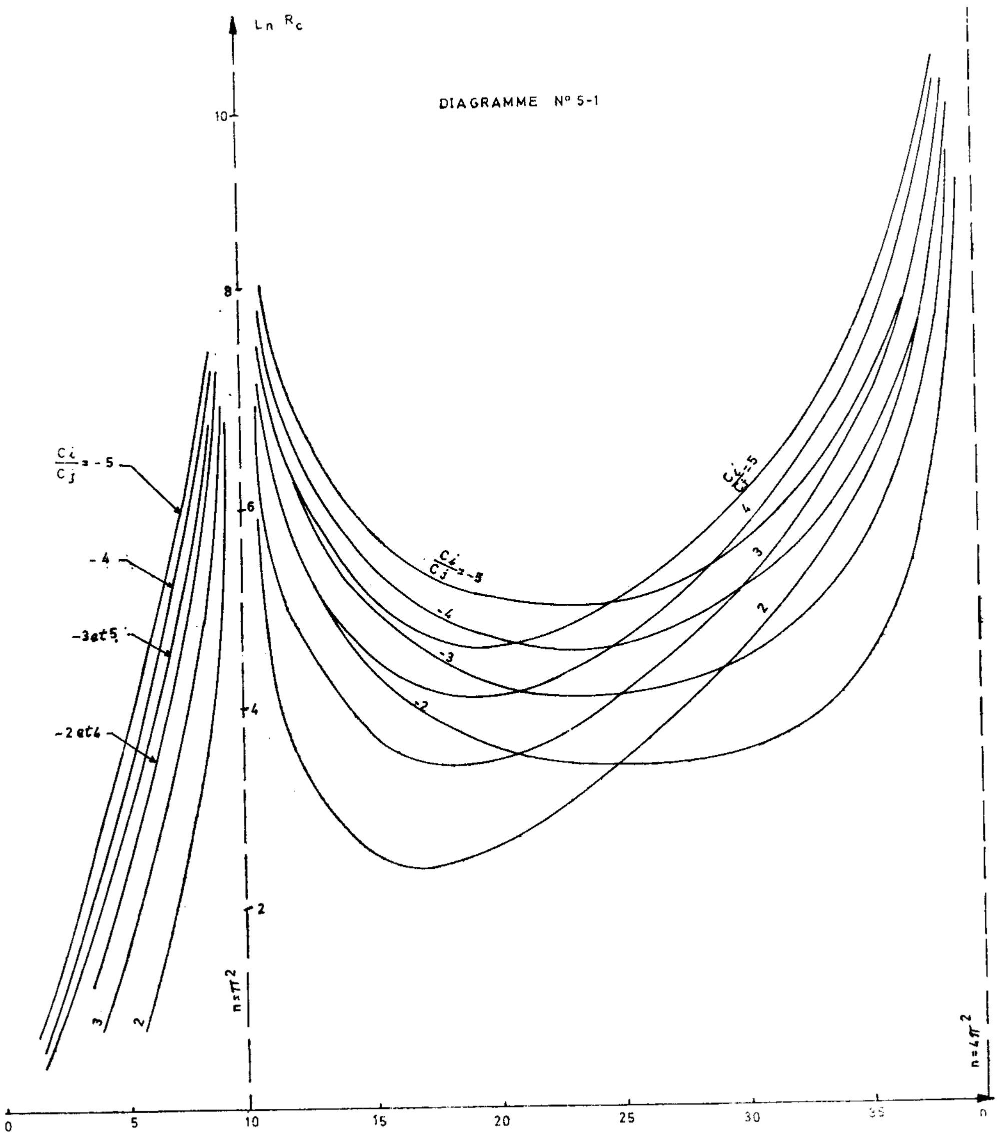
۲ ـ ۵ : نیروی محوری N کششی است

با محاسباتی مشابه حالت فشاری ، برای کشش چنین حاصل میشود :

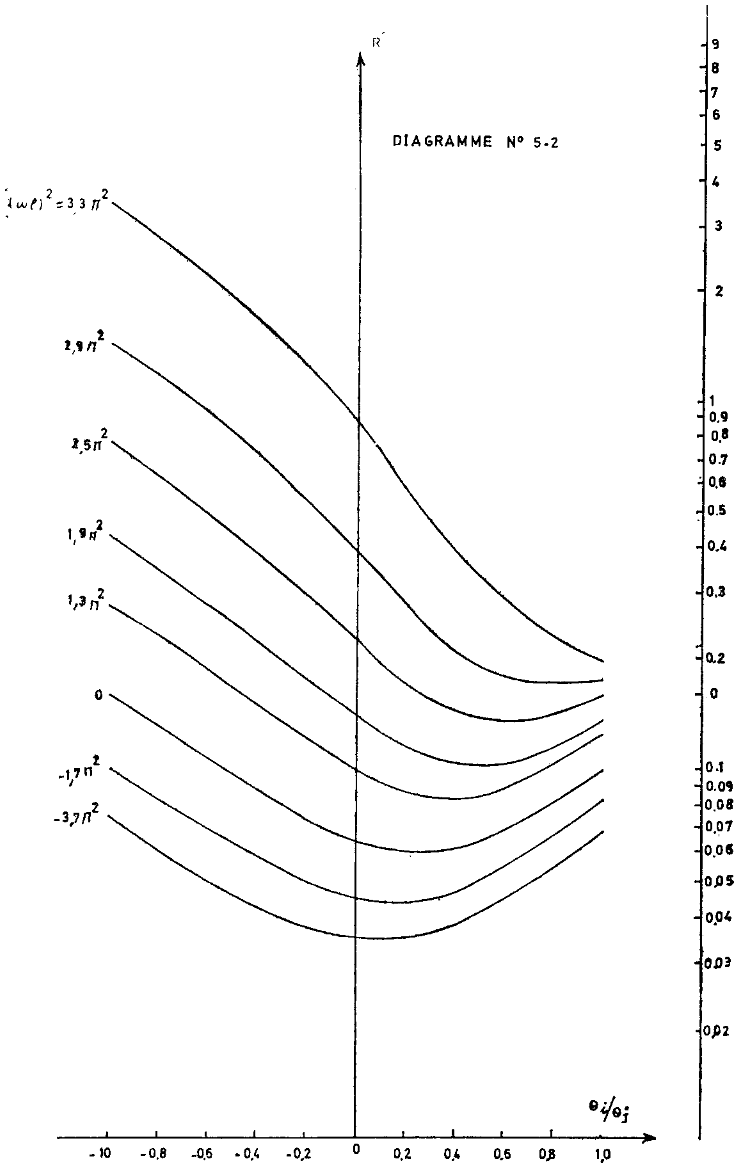
$$\frac{\Delta l_f}{l} = \frac{C^2{}_j}{k^2} R_t \qquad (۱—۴۶)$$

$$\frac{\Delta l_f}{l} = \theta^2{}_j R'_t \qquad (۱—۴۷)$$

که درآن R_t و R'_t نظیر روابط (۴۲ — ۱) و (۴۵ — ۱) میباشند ، فقط با درنظرگرفتن اینکه .



$$
\begin{cases}
P_t = \frac{۱}{٤}\left[\left(\frac{\omega l}{\mathrm{sh}\,\omega l}\right)^{۲} - ۲ + \frac{\omega l}{\mathrm{th}\,\omega l}\right] \\
Q_t = \frac{۱}{۲}\left[\frac{\omega l}{\mathrm{sh}\,\omega l}\cdot\frac{\omega l}{\mathrm{th}\,\omega l} - ۲ + \frac{\omega l}{\mathrm{sh}\,\omega l}\right]
\end{cases}
\qquad (۱-٤۸)
$$



۳ ـ ۵ : نیروی محوری صفر گردد

اگر ωl بسمت صفر میل کند ، معادلات (۴۰ ــ ۱) و (۴۸ ــ ۱) چنین میشوند :

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{P_c}{n^{۲}} &= \frac{P_t}{n^{۲}} = \frac{۱}{۹۰} \\
\frac{Q_c}{n^{۲}} &= \frac{Q_i}{n^{۲}} = -\frac{۷}{۳۶۰}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (۱-٤۹)
$$

درنتیجه :

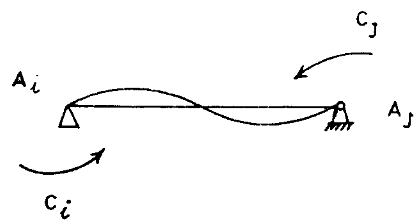
$$\frac{\Delta l_f}{l} = \frac{C^{۲}_j}{k^{۲}} \cdot \frac{۱}{۹۰} \left[\left(\frac{C_i}{C_j}\right)^{۲} + ۱ - \frac{۷}{٤} \frac{C_i}{C_j}\right] \qquad (۱ - ۵۰)$$

رابطه (۴۹ — ۱) شکل رابطه (۴۱ — ۱) را تأیید میمایند . این نتیجه را میتوان مستقیماً با قرار دادن $\frac{dy}{dx}$ درمعادله (۳۵ — ۱) و با استفاده از رابطه :

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = \frac{-M}{EI}$$

بدست آورد . با داشتن :

$$M = C_i\left(۱ - \frac{x}{l}\right) - C_j \frac{x}{l}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{EI}\left[-C_i x + C_i \frac{x^{۲}}{۲l} + C_j \frac{x^{۲}}{۲l} + a\right]$$

$$y = \frac{۱}{EI}\left[-C_i \frac{x^{۲}}{۲} + C_i \frac{x^{۳}}{۶l} + C_j \frac{x^{۳}}{۶l} + ax + b\right]$$

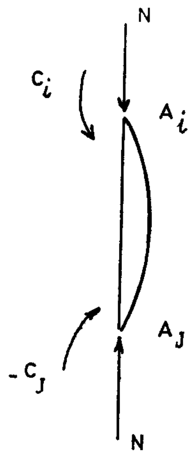
a و b از شرایط $y(o) = y(l) = o$ بدست میآیند .

$$a = \frac{C_i l}{۳} - \frac{C_j l}{۶} \qquad b = o$$

پس از محاسبات لازم همان معادله (۵۰ — ۱) حاصل میشود .

٤ ـ ۵ : مطالعه و بحث ضریب R_c

رابطه (۴۲ — ۱) نشان میدهد که R_c تابعی است از $\frac{C_i}{C_j}$ و ωl و ما حالات زیر را بررسی میکنیم :



(شکل a)

الف) $\frac{C_i}{C_j} = -1$

دراینحالت رابطهٔ (۴۲ — ۱) بصورت زیر خلاصه میگردد :

$$P_c = \frac{1}{n^2}(2P_c - Q_c) \qquad (1-51)$$

یا :

$$R_c = \frac{\omega l(\omega l - \sin\omega l)}{n^2 \cos^2 \frac{\omega l}{2}} \qquad (1-51)$$

بازاء $\cos^2 \frac{\omega l}{2} = 0$ مقدار R_c بینهایت میشود یعنی بازای :

$$\omega l = (2k+1)\pi \qquad (1-53)$$

$$(k = 0, 1, \ldots)$$

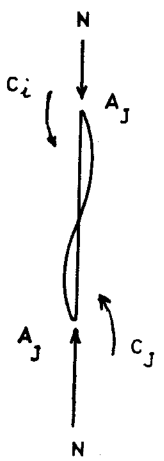
این معادله مقدار ωl که بازاء آن کمانه رخ میدهد تعیین میکند . کوچکترین مقدار ωl حاصل از معادله (۵۳ — ۱) مربوط به $k=0$ میباشد ؛ دراینحالت :

$$\omega l = \sqrt{n} = \sqrt{\frac{Nl^2}{EI}} = \pi$$

و از آنجا :

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI$$

که همان بار بحرانی اولر است .



ب) $\frac{C_i}{C_j} = 1$

فرمول (۴۲ — ۱) بصورت زیر درمیآید :

$$R_c = \frac{1}{2n^2}\left[\frac{\omega l(1+\cos\omega l)(\omega l + \sin\omega l) - 4\sin^2\omega l}{\sin^2\omega l}\right] \qquad (1-55)$$

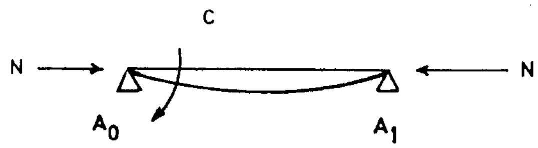
R_c بازاء مقادیر زیر بینهایت میگردد :

$$\frac{\sin\omega l}{2} = 0 \qquad \omega l = 2k\pi = \sqrt{n}$$

که درآن $k = 1, 2, 3, \ldots$ بوده درنتیجه کوچکترین بار بحرانی بازاء $k=1$ برابر است با :

$$N_{cr} = 4 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI \qquad (۱ - ۵۶)$$

نیروی برشی درمقدار بار بحرانی کمانه تأثیر زیادی دارد بار بحرانی برای تیر A_0A_1 که تحت تأثیر لنگر خمشی C در A_0 قرارگرفته بصورت زیر تعیین میگردد.



روابط لنگر برای گره A_0 و A_1 چنین است :

$$M_{01} = C = A\theta_0 + B\theta_1 \qquad \begin{vmatrix} C \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{vmatrix}$$

$$M_{10} = 0 = A\theta_1 + B\theta_0$$

θ_0 و θ_1 دارای مقدار حقیقی خواهند بود ، اگر دترمینان ماتریس سختی k مخالف صفر باشد :

$$\text{dét}\, k = \text{dét} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \neq 0$$

ولی اگر $\text{dét}\, k = 0$ باشد کمانه رخ میدهد یعنی :

$$\text{dét}\, k = A^2 - B^2 = 0$$

با قرار دادن مقادیر A و B از معادله (۱۰ — ۱) و (۱۱ — ۱) چنین حاصل میشود :

$$A^2 - B^2 = -\frac{N^2}{\omega^2} \; \frac{\omega l \sin \omega l}{\omega l \sin \omega l - 2(1 + n\lambda)(1 - \cos \omega l)}$$

عبارت فوق بازاء مقادیر زیر صفر میگردد :

$$\omega l = (2k + 1)\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

کمترین بار بحرانی کمانش برابر است با :

$$\omega l = \sqrt{\frac{n}{1 + n\lambda}} = \pi$$

و یا :

$$n = \frac{Nl^2}{EI} \; \frac{\pi}{1 + \lambda\pi^2}$$

از آنجا :

$$N_{cr}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^{۲}\frac{EI}{۱+\lambda\pi^{۲}}$$

اگر از اثر نیروی برشی صرفنظر گردد $(\lambda=o)$ ، ممان بار بحرانی اولر حاصل میشود یعنی :

$$N_{cr}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^{۲}EI$$

۶ : تفسیر فرمول (۴۳ - ۱)

دردستگاههای‌متعادل بشکل‌قاب تغییر طول‌میله‌ها نسبت به بار وارد تابع‌خطی‌هستند ، درحالیکه اثر لنگر مؤثر ازطرف گره‌ها به میله‌ها ، تغییر طول‌میله‌هارا برحسب یک تابع درجه‌دوم اضافه مینماید. این تغییر طول دربعضی حالات اهمیت زیادی دارند .

۱ - ۶ : محاسبه سطح مقطع ظاهری

سطح مقطع واقعی میله $A_j A_i$ از یک دستگاه متعادل ، با S و سطح مقطع ظاهری آن با 'S نشان داده شده که بطریق زیر محاسبه میگردد .

$$\triangle l=\triangle l_n+\triangle l_f=\frac{Nl}{ES'}$$

با جایگزین نمودن $\triangle l_f$ از فرمول (۴۳ — ۱) و $\triangle l_n=\frac{Nl}{ES}$ چنین حاصل میشود :

الف) در حالت فشار :

$$\frac{S}{S'}=۱+\frac{C^{۲}{}_j}{nk^{۲}}\left(\frac{l}{r}\right)^{۲}R_c \qquad (۱-۵۷)$$

که درآن $r^{۲}=\frac{I}{S}$ است . اگر از فرمول (۴۴ — ۱) استفاده گردد ، داریم :

$$\frac{S}{S'}=۱+\frac{\theta^{۲}{}_j}{n}\left(\frac{l}{r}\right)^{۲}R'_c \qquad (۱-۵۸)$$

ب) درحالت کشش :

$$\frac{S}{S'}=۱-\frac{C^{۲}{}_j}{nk^{۲}}\left(\frac{l}{r}\right)^{۲}R_t \qquad (۱-۵۹)$$

$$\frac{S}{S'}=۱-\frac{\theta^{۲}{}_j}{n}\left(\frac{l}{r}\right)^{۲}R'_t \qquad (۱-۶۰)$$

ملاحظه میگردد ، S' را درمیله‌ها فقط از روش خطا و آزمون سینوان محاسبه نمود .   درمثال زیر تغییرات نیروی N برحسب بار وارد P نشان داده شده است . (دیاگرام ۳ — ٥)

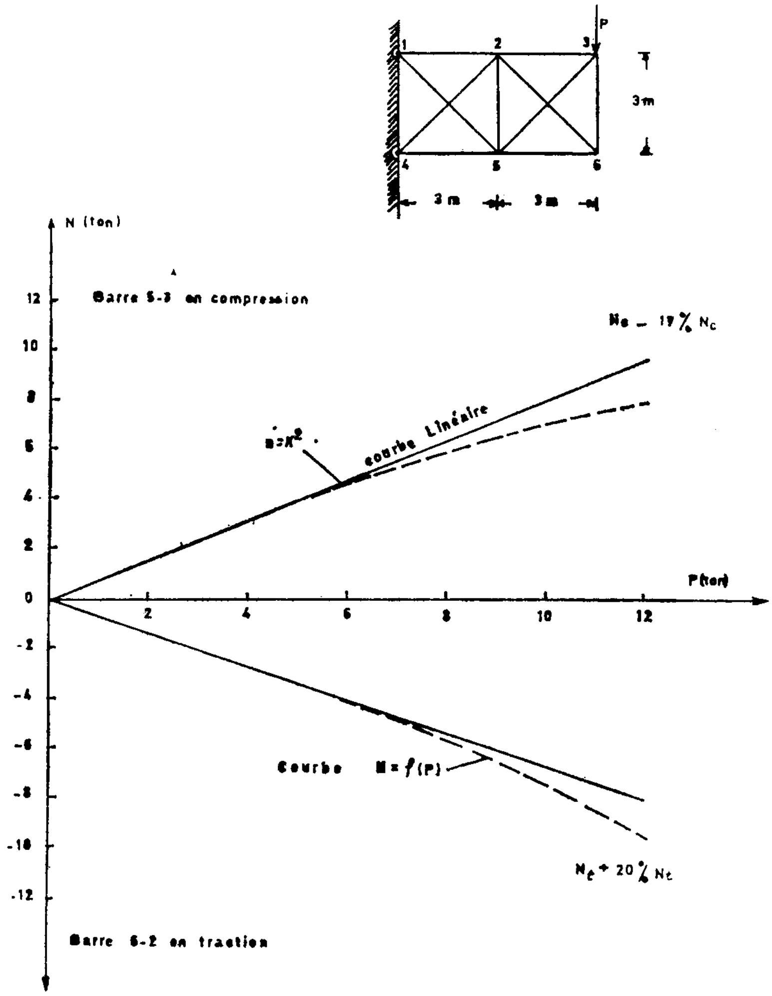
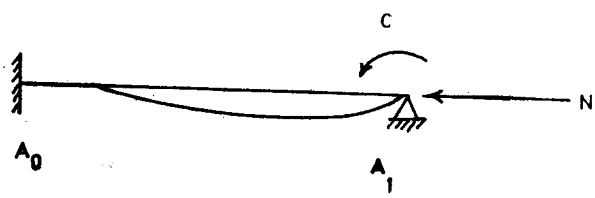


DIAGRAMME N° 5-3

۲ ـ ٦ : حد مورد قبول قضیه تقابل ماکسول

تیر منشوری $A_0 A_1$ در A_0 گیردار و در A_1 برروی تکیه‌گاه ساده قرارگرفته است ؛ دوحالت بارگزاری زیر را درنظر میگیریم :



حالت اول : در A_1 فقط لنگر C مؤثر است ؛ تغییر شکل این گره عبارت از یک دوران :

$$\theta_1 = \frac{C}{A}$$

و یک تغییر مکان Δl_f طبق فرمول (۴۱ — ۱) میباشد که درآن :

$$\left(A = 4\frac{EI}{l}\right)$$

برای تیر منشوری است .

حالت دوم : در A_1 فقط نیروی محوری N مؤثر است ؛ تغییر شکل این گره عبارت از :

$$\Delta l_n = \frac{Nl}{ES}$$

است . اگر قضیه تقابل ماکسول را برای دوحالت بارگزاری فوق بنویسیم چنین داریم :

$$N \times \Delta l_f = C \times o = o$$

طرفین معادله برابر نیستند ، پس میتوان گفت؛ اگر جمله های درجه دوم را درنظر بگیریم ، قضیه ماکسول صادق نمیباشد . اگر در A_1 لنگر C و نیروی محوری N باهم وارد آیند، از روابط (۸ — ۱) و (۳۴ — ۱) و (۴۳ — ۱) چنین حاصل میشود :

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{C}{A} \\ \Delta = \Delta l &= \frac{C^2 l}{k^2} \cdot R_c + \frac{Nl}{ES} \end{aligned}\right\} \qquad (۱ — ۶۱)$$

انرژی اضافی میله A_0A_1 برابر است با :

$$du = \theta \cdot dC + \Delta \cdot dN \qquad (۱ — ۶۲)$$

حال نشان میدهیم که مقدار du مستقل از ترتیب بارگزاری است . یا بعبارت دیگر du باید یک دیفرانسیل کامل باشد ، یعنی باید داشته باشیم :

$$\frac{\partial \theta}{\partial N} = \frac{\partial \Delta}{\partial C}$$

ازمعادله (۶۱ — ۱) میتوان نوشت :

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{A}\right) = 2\,\frac{l}{k^2} \cdot R_c = \frac{2l}{n^2 k^2}\left[(t^2+1)P_c + Q_c t\right] \qquad (۱ — ۶۳)$$

که درآن $t=\frac{C_1}{C_0}$ است . با قرار دادن $\frac{1}{A}$ و t از روابط (۱۰—۱) و (۱۲—۱) برای $\lambda=0$ و ضریب Q_c و P_c از رابطه (۴۰—۱) ملاحظه میگردد ، که معادله (۶۳—۱) برقرار خواهد بود ، و چون :

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{\omega l}{2N^2 l}\cdot\frac{1}{(\omega l\cos\omega l-\sin\omega l)^2}\left[(\omega l)^3-(\omega l)^2\sin\omega l(2+\cos\omega l)+\right.$$
$$\left.+2\omega l(\cos\omega l-\cos 2\omega l)-2\sin\omega l(1-\cos\omega l)\right] \qquad (۱—۶۴)$$

برای حالتیکه نیروی محوری کششی است :

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{2l}{k^2}R_t=\frac{2l}{n^2k^2}\left[(t^2+1)P_t+t\,Q_t\right] \qquad (۱—۶۵)$$

یا :

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{\omega l}{2N^2 l}\cdot\frac{1}{(\omega l\,\mathrm{ch}\,\omega l-\mathrm{sh}\,\omega l)^2}\left[(\omega l)^3-(\omega l)^2\,\mathrm{sh}\,\omega l(2+\mathrm{ch}\,\omega l)+\right.$$
$$\left.+2\omega l(\mathrm{ch}\,2\omega l-\mathrm{ch}\,\omega l)+2\,\mathrm{sh}\,\omega l(\mathrm{ch}\,\omega l-1)\right] \qquad (۱—۶۶)$$

در [٤] قضیه ماکسول بطورکلی موردبررسی قرارگرفت که اهم آن بشرح زیر است :

هرگاه درساختمانی نیروها فقط درگره‌ها وارد آیند ، روابط عمومی بشکل ماتریس زیر میباشند .

$$S=KD$$

که درآن :

S : ماتریس ستونی ، معرف بار وارد S_i برهرگره میباشد .

D : ماتریس ستونی ، معرف تغییر شکل D_i گره‌ها میباشد .

K : ماتریس مربعی ، که بماتریس سختی ساختمان معروف است .

عبارت فوق بصورت زیر نیز نوشته میشود :

$$D=K^{-1}\cdot S=G\cdot S$$

G : ماتریس نرمی ساختمان نامیده میشود .

برای آنکه تحمل ساختمان ، مستقل از تیب بارگزاری باشد ، روابط عمومی ، باید بصورت زیر باشد :

$$\sum_j\frac{\partial g_{ij}}{\partial S_k}S_j+g_{ik}=\sum_j\frac{\partial g_{kj}}{\partial S_i}S_j+g_{ki} \qquad (۱—۶۷)$$

عبارت فوق بـرای حالت اختصاصی قضیه ماکسول پذیرفته میشود ، حالتی که تمام جمله هـای g_{ij} دریک ساختمان مستقل از بار خارج میباشند ، و داریم :

$$g_{ik}=g_{ki}$$

یعنی ماتریس G و K قرینه میباشند .

درمثال اخیر برای تیر A_0A_1 از رابطه (۶۱ — ۱) ماتریس G بصورت زیر نوشته میشود :

$$G=\begin{vmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ \frac{cl}{K^2} R_c & \frac{l}{ES} \end{vmatrix}$$