فرمول‌بندی عمومی شبکه تیرهای متقاطع

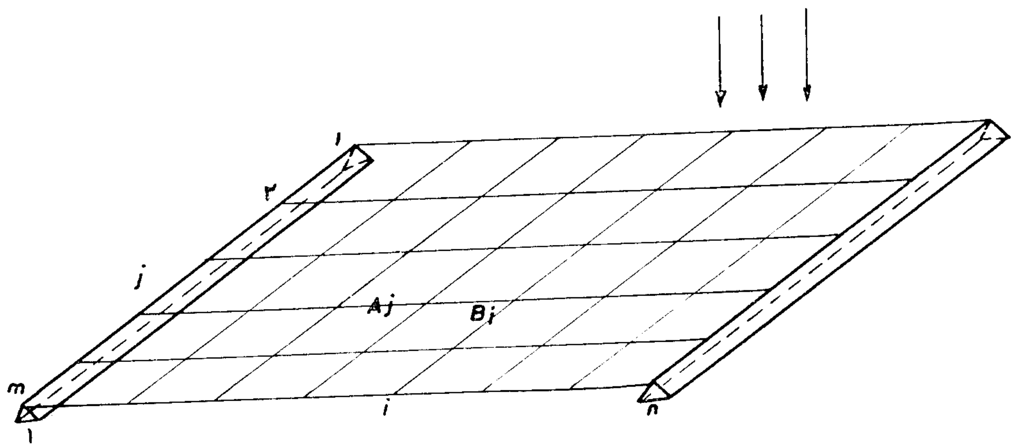
نوشتهٔ :

دکترمهندس خسرو کریم پناهی

استادیار دانشکدهٔ فنی

منظور از شبکه تیرهای متقاطع تیرهای طولی و عرضی متقاطع ایست که دریک صفحه قرار گرفته باشند و بارهای خارجی عمود براین صفحه وارد شوند . تعیین تقسیم اثرات در تیرهای این نوع شبکه ها ، بعلت موارد استعمال زیاد آنها ، یکی از مسائل مورد نظر مهندسین میباشد .

اغلب پلهای مسطح تشکیل میشوند از تیرهای اصلی که توسط تیرهای فرعی بهم متصل ومربوط شده‌اند؛ محاسبه این پلها متضمن محاسبه شبکه تیرهای زیرآن میباشد ؛ این تیرها ممکن است بدون مقاومت



شکل ۱

در مقابل پیچش ویا برعکس دارای مقاومت در مقابل پیچش باشند؛ وجود یک دال روی شبکه ، درصورتیکه اتصال دال و شبکه خوب تضمین شده باشد ، بمقاومت تیرها در مقابل پیچش میافزاید . محاسبات نشان میدهد که احتساب مقاومت پیچش تیرها میتواند تغییرات زیاد درنتیجه محاسبات بدهد . ضمناً در بعضی پلها تیرهای بزرگ با پروفیل های بسته (مثلاً تیرهای بتن مسلح یا بتن پیش فشرده دارای مقطع چهارگوش توخالی) بکار برده میشود که دارای مقاومت قابل ملاحظه‌ای در مقابل پیچش میباشند .

محاسبه این نوع شبکه ها تا مدتها بطرق تقریبی انجام میگردید . حل صحیح این شبکه ها همراه باحل تعداد زیادی معادلات خطی با مجهولهای متعدد میباشد . مثلاً در شبکه‌ای مطابق شکل (۱) لازمست که

برای هرطریقه بارگذاری ، درصورتیکه از مقاومت پیچشی تیرها صرفنظر نشود ، تعداد ٤٤ ، معادله با ٤٤ ، مجهول حل شود . حل این نوع معادلات فقط بوسیله ماشین های الکترونیکی ممکن است .

طرق تقریبی شامل فرضیاتیست که فقط در بعضی موارد صحت کامل دارند .

از جمله طرق تقریبی غیر قابل تغییرشکل گرفتن تیرهای فرعی میباشد[۱] . طول کوتاه تیرهای فرعی دربعضی مواردفرض فوق را تأئید مینماید؛ دراین طریقه از مقاومت پیچشی تیرها صرفنظر میشود؛ دیگر از طرق تقریبی طریقه Mr.Guyon میباشد که برای اولین بار باصرفنظر کردن از مقاومت پیچشی تیرها تدوین شده بود ؛ درمطالعات بعدی[۲] مقاومت پیچشی تیرها نیز درمحاسبات منظور گردید . دراین طریقه فرض میشود که بار بصورت یک تابع سینوسی درجهت طول شبکه تقسیم میشود . درفهرست کتب وابسته به موضوع ، درآخر مقاله ، کتب یا مقالاتی که در تدوین این طریقه سهیم بوده‌اند داده شده است .

دراین مقاله محاسبه صحیح یک شبکه را ، با استفاده از ماتریسها و فرمولهای تیر روی تکیه گاه های الاستیک ، مورد مطالعه قرار میدهیم ؛ این طریقه درحقیقت طریقه تسهیل فیزیکی ـ ریاضی حل معادلات خطی مذکور درفوق میباشد . این تسهیلات کمک زیاد بحل معادلات خطی شبکه توسط دست و یا حتی ماشینهای الکترونیکی مینماید .

ابتدا شبکه را با تیرهای مشابه فرض میکنیم و سپس مسئله را برای شبکه با تیرهای با ممان دینرسی متناسب مورد مطالعه قرار میدهیم . منظور ما از تیرهای با ممان دینرسی متناسب اینست که توابعی که تغییرات ممان دینرسی را درهر کدام از دو نوع تیر (فرعی یا اصلی) نشان میدهد از یک تیر به تیر دیگر متناسب باشد .

۱ ـ شبکه تیرهای متقاطع مشابه

۱-۱ ـ تعریف :

تیرهای A_j ـ این تیرها را مشابه (از لحاظ ممان دینرسی و پیوندهای خارجی) فرض میکنیم و بنام تیرهای اصلی مینامیم . از شرایط لازم برای این تیرها اینست که اگر هر کدام از آنها را از تیرهای فرعی جدا کنیم زیر اثر بارهای خارجی متعادل باشند و بحرکت درنیایند ؛ چون بارها عمود بر تیر فرض میشوند کافیست که این تیرها حداقل دارای دو تکیه گاه ساده باشند . تعداد این تیرها را m میگیریم (j از ۱ تا m تغییر میکند) .

تیرهای B_i ـ این تیرها رانیز مشابه فرض میکنیم و بنام تیرهای فرعی مینامیم . دراینجا شرط تعادل تیر ، جدا شده از تیرهای دیگر ، زیر اثر بارهای خارجی وجود ندارد . مثلاً درپلها بطور معمول این تیرها

۱ـ این طریقه بنام طریقه Courbon معروف است ودر کتاب مقاومت مصالح Mr. Courbon ذکر شده .

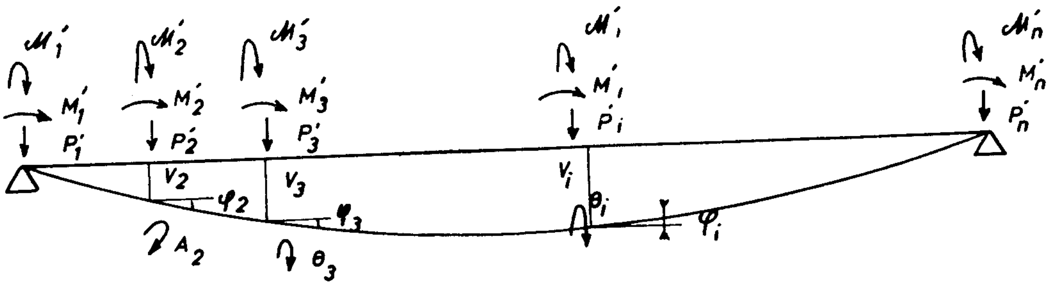
۲ـ Mr. Guyon : calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisées par entretoises. Ann.des P. &c. sept. 1946

دارای هیچ نوع تکیه گاهی نبوده ودرصورتیکه از تیرهای اصلی جدا شوند زیر اثر وزن خود یا وزن‌های خارجی بطرف زمین سقوط خواهند کرد. تعداد این تیرها را n میگیریم بعبارت دیگر i از ۱ تا n تغییرمیکند.

در حالت خاصی که شرط تعادل مذکور درفوق برای هر دونوع تیر موجود باشد میتوان هرکدام از تیرهای A^j یا B_i را تیر اصلی گرفت.

هنگامیکه تعداد یکی از دونوع تیر بینهایت باشد این تیرها اجباراً تیرهای اصلی انتخاب میشوند.

۱-۲- مشخصات تیرهای A^j :



شکل ۲

تیر A راکه شبیه سایر تیرهای اصلی است و از تیرهای فرعی B_i جداشده درنظر میگیریم و نام گذاری‌های زیر راقبول میکنم.

— P'_i نیروی قائم وارد به نقطه i (محل تقاطع تیر A باهرکدام از تیرهای B_i)

— M'_i لنگر خمشی « « «

— $\mathscr{M}'_i$ لنگر پیچشی « « «

— v_i تغییر مکان قائم نقطه i

— φ_i زاویه چرخش نقطه i

— θ_i زاویه پیچش نقطه i

شکل ماتریسی معادله مشخصه این تیربصورت زیر نوشته میشود.

$$[\,[v]\,,[\varphi]\,,[\theta] =][P']\,,[\,M']\,,[\mathscr{M}']\,]\,\boxed{\mathscr{A}} \qquad [۱]$$

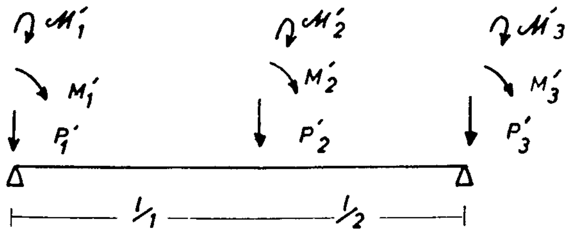
که درآن $[\,[v]\,,[\varphi]\,,[\theta]\,]$ ماتریس خط متغیرهای وضعی تیر میباشد مثلاً اگر ۱۰ تیر فرعی داشته باشیم این ماتریس بصورت $[v_۱ v_۲ \dots v_{۱۰}\, \varphi_۱ \varphi_۲ \dots \varphi_{۱۰}\, \theta_۱ \theta_۲ \dots \theta_{۱۰}]$ نوشته میشود.

ونیز $[\,[P']\,,[M']\,,[\mathscr{M}']\,]$ ماتریس خط متغیرهای تنشی تیر میباشد. برای مثال فوق این ماتریس بصورت زیر است:

$$[P'_۱ P'_۲ \dots P'_{۱۰} M'_۱ M'_۲ \dots M'_{۱۰}\, \mathscr{M}'_۱\, \mathscr{M}'_۲ \dots \mathscr{M}'_{۱۰}]$$

ماتریس $\boxed{\mathscr{A}}$ یک ماتریس مربع ، متقارن ، با قاعده و از درجه $3n$ است

مثال ـ تیری مطابق شکل ۳ درنظر میگیریم :



شکل ۳

معادله مشخصه این تیر بصورت زیراست .

$$[v_1 v_2 v_3\ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\ \theta_1 \theta_2 \theta_3] = [P'_1\ P'_2\ P'_3 M'_1 M'_2 M'_3\ \mathscr{M}'_1\ \mathscr{M}'_2\ \mathscr{M}'_3]\ \boxed{\mathscr{A}}$$

که درآن ماتریس $\boxed{\mathscr{A}}$ بصورت زیر است:

$$\boxed{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{48EI} & 0 & \frac{l^2}{16EI} & 0 & -\frac{l^2}{16EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{16EI} & 0 & \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{24EI} & -\frac{l}{6EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{24EI} & \frac{l}{12EI} & -\frac{l}{24EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l^2}{16EI} & 0 & -\frac{l}{6EI} & -\frac{l}{24EI} & \frac{l}{3EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{2GI_p} & \frac{l}{2GI_p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{2GI_p} & \frac{l}{2GI_p} \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت که این تیر در مقابل پیچش متعادل نیست و تحت اثر لنگرهای پیچشی وارد میچرخد. بدینجهت ماتریس $\boxed{\mathscr{A}}$ (بنام ماتریس سختی) در مورد پیچش دارای جزء ماتریس با قاعده خواهد بود . در مثال فوق برای رفع این نقیصه θ_1 مساوی صفر فرض میشود ، درهر صورت چنانکه خواهیم دید این مسئله مزاحمتی برای ادامه محاسبات ایجاد نخواهد کرد .

درحالتی که محورهای اصلی اینرسی تیر منطبق با امتداد بار و عمود برآن باشند (مانند مثال فوق) ماتریس $\boxed{\mathcal{A}}$ بصورت زیر درمیآید :

$$\boxed{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \boxed{a_1} & \boxed{a_2} & \boxed{0} \\ \boxed{a_2} & \boxed{\Gamma} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\Delta} \end{bmatrix}$$

ماتریسهای $\boxed{a_1}$ و $\boxed{\Gamma}$ و $\boxed{\Delta}$ ماتریسهای مربع ، قرینه ، باقاعده و از درجه n هستند ولی ماتریس $\boxed{a_2}$ فقط با قاعده واز درجه n میباشد .

معکوس رابطه بالا را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$[\,[P'][M'][U']\,] = [\,[v][\varphi][\theta]\,]\,\boxed{A} \qquad (۲)$$

ماتریس $\boxed{A}$ ماتریس معکوس ماتریس $\boxed{\mathcal{A}}$ میباشد و بشکل زیر است :

$$\boxed{A} = \boxed{\mathcal{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\alpha_1} & \boxed{\alpha_2}^{t} & \boxed{0} \\ \boxed{\alpha_2} & \boxed{\gamma} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\delta} \end{bmatrix}$$

در رابطه فوق منظور از $\boxed{\alpha_2}^{t}$ ماتریس وارونه transposée ماتریس $\boxed{\alpha_2}$ میباشد .

با توجه به تجزیه ماتریسها ، روابط بین بار و تغییر شکل را دراین حالت میتوان بصورت زیرنوشت:

$$(۳) \qquad \left[\begin{array}{l} [P'] = [v]\,\boxed{\alpha_1} + [\varphi]\,\boxed{\alpha_2} \\[2em] [M'] = [v]\,\boxed{\alpha_2}^{t} + [\varphi]\,\boxed{\gamma} \\[2em] [\mathcal{M}'] = [\theta]\,\boxed{\delta} \end{array}\right.$$

۱ـ۳ـ مشخصات تیرهای B_i

۱ـ۳ـ۱ـ حالت اول تیر B_i متعادل هنگامیکه ازتیرهای A^j جدا شده باشد .

تیر B را مشابه سایرتیرهای فرعی B_i درنظر میگیریم . دراین حالت فرض ما اینست که هنگامیکه این تیر را از A^j جدا کنیم زیرا اثربارهای خارجی همچنان متعادل مینماید ، یعنی حداقل دارای دوتکیه گاه ساده یا یک تکیه گاه گیردار است .

نام گذاریهای زیررا می‌پذیریم

— P''^j نیروی قائم‌وارد به نقطه J

— M''^j لنگر پیچشی » » » »

— $\mathscr{M}''^j$ لنگر خمشی » » » »

— v^j تغییرمکان نقطه J

— φ^j زاویه‌پیچشی » »

— θ^j » چرخش » »

شکل ماتریسی معادله مشخصه این تیر بصورت زیراست :

$$\left\{\begin{matrix} \{v\} \\ \{\varphi\} \\ \{\theta\} \end{matrix}\right\} = \boxed{\mathscr{B}} \left\{\begin{matrix} \{P''\} \\ \{M''\} \\ \{\mathscr{M}''\} \end{matrix}\right\} \qquad (٤)$$

دراین‌جا ما متغیرها را درماتریس ستون قرار میدهیم . دلیل این‌عمل در مطالعات بعدی روشن خواهد شد . بنابراین رابطه فوق رابطه موجود بین ماتریس ستون متغیرهای وضعی و ماتریس ستون متغیرهای تنشی تیر B میباشد .

ماتریس $\boxed{\mathscr{B}}$ یک ماتریس مربع ، متقارن ، با قاعده و از درجه $3m$ میباشد این ماتریس بشکل زیر است

$$\boxed{\mathscr{B}} = \boxed{\begin{matrix} \boxed{b_1} & \boxed{0} & \boxed{b_2} \\ \boxed{0} & \boxed{c} & \boxed{0} \\ \boxed{{}^{t}b_2} & \boxed{0} & \boxed{\zeta} \end{matrix}}$$

ماتریسهای $\boxed{b_1}$ ، $\boxed{e}$ و $\boxed{z}$ ماتریسهای مربع ، متقارن ، با قاعده واز درجه m میباشند ولی ماتریس $\boxed{b_2}$ تنها یک ماتریس با قاعده از درجه m است .

معکوس رابطه بالا رامیتوان بصورت زیر نوشت:

$$\left\{\begin{array}{c}\{P''\}\\ \{M''\}\\ \{\mathscr{M}''\}\end{array}\right\} = \boxed{B}\left\{\begin{array}{c}\{v\}\\ \{\varphi\}\\ \{\theta\}\end{array}\right\} \qquad (5)$$

ماتریس $\boxed{B}$ معکوس ماتریس $\boxed{\mathscr{B}}$ میباشد و بشکل زیر است :

$$\boxed{B} = \boxed{\mathscr{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\beta_1} & \boxed{0} & \boxed{\beta_2} \\ \boxed{0} & \boxed{\varepsilon} & \boxed{0} \\ \boxed{\beta_2}^t & \boxed{0} & \boxed{\zeta} \end{bmatrix}$$

باتوجه به امکان تجزیه ماتریس $\boxed{B}$ وماتریسهای متغیرهای وضعی وتنشی میتوان روابط زیر را نوشت :

$$\left\{\begin{array}{l}\{P''\} = \boxed{\beta_1}\{v\} + \boxed{\beta_2}\{\theta\}\\[1em] \{M''\} = \boxed{\varepsilon}\{\varphi\}\\[1em] \{\mathscr{M}''\} = \boxed{\beta_2}^t\{v\} + \boxed{\zeta}\{\theta\}\end{array}\right. \qquad (6)$$

۱ـ۳ـ۲ـ حالت دوم تیر B_i غیر متعادل هنگامیکه از تیرهای A^J جدا شده باشد .

دراین حالت متغیرهای تنشی P''^j ، M''^j و $\mathscr{M}''^j$ مستقل نیستند و روابطی بین آنها موجوداست؛ این روابط نکات زیررا نشان میدهند :

— منتجه نیروهای P''^j مساوی صفراست .

— منتجه لنگرهای نیروهای P''^j نسبت بیک نقطه غیرمشخص صفراست .

— منتجه لنگرهای پیچشی M''^j مساوی صفراست .

— منتجه لنگرهای خمشی $\mathscr{M}''^j$ مساوی صفراست.

در نتیجه ماتریس $\boxed{B}$ دیگر با قاعده نیست و دیگر رابطه (٤) را نمیتوان نوشت ؛ ولی میتوان روابطی شبیه روابط (٥) و (٦) ، که مقدار متغیرهای تنشی را برحسب متغیرهای وضعی میدهند ، نوشت.

چنانکه خواهیم دید فقط این روابط هستند که در مطالعات ما بکار میروند .

۱ـ٤ـ معادله تعادل

۱ـ۱ـ٤ـ تعریف ـ ماتریسهای $[P'_i]$ ، $[M'_i]$ و $[\mathscr{M}'_i]$ بعنوان ماتریس خطهای بارهای وارد به یک تیر A^j قبول نمودیم در حقیقت برای تیر A^j میتوان نوشت :

$$[P'_i]^j = [P'^j_1\ P'^j_2\ P'^j_3\ \ldots\ P'^j_n]$$

$$[M'_i]^j = [M'^j_1 M'^j_2 M'^j_3 \ldots M'^j_n]$$

$$[\mathscr{M}'_i]^j = [\mathscr{M}'^j_1\ \mathscr{M}'^j_2\ \mathscr{M}'^j_3\ \ldots\ \mathscr{M}'^j_n]$$

فرض کنیم ماتریسهای $\|P'\|$ ، $\|M'\|$ ، $\|\mathscr{M}'\|$ ماتریسهای مربع مستطیل باشند که خطوط آنها از ماتریسهای $[P'_i]^j$ و $[M'_i]^j$ و $[\mathscr{M}'_i]^j$ باتغییر j از ۱ تا n بدست آید؛ بدین ترتیب خط j ام هریک ازاین ماتریسها نمایش بارهای متحمله توسط تیر A^j میباشد .

بهمین ترتیب میتوان ماتریسهای $\|v\|$ ، $\|\varphi\|$ و $\|\theta\|$ را نوعی تعیین کرد که خط j ام هریک از آنها نمایش تغییر شکل گرههای تیر A^j باشد .

چون ماتریس مربع $\|A'\|$ ، ماتریس ضرائب سختی ، برای تمام تیرهای A^j یکی است رابطه (۳) را میتوان برای تمام تیرهای A^j یکجاو بصورت زیر نوشت:

$$
\left[\begin{aligned}
\|P'\| &= \|v\|\,\|\alpha_1\| + \|\varphi\|\,\|\alpha_2\| \\
\|M'\| &= \|v\|\,\|\alpha_2\|^t + \|\varphi\|\,\|\gamma\| \\
\|\mathscr{M}'\| &= \|\theta\|\,\|\delta\|
\end{aligned}\right.
\qquad (۷)
$$

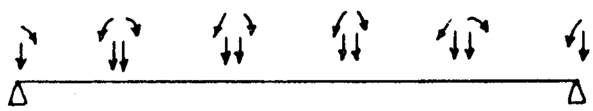
ضمناً بهمان ترتیب میتوان ماتریس های مربع مستطیل $\|P''\|$ ، $\|M''\|$ و $\|\mathscr{M}''\|$ را ، که ستون i ام آنها نمایش ماتریس ستون بارهای تحمل شده توسط تیر B_i باشد ، تشکیل داد . برای این تیرها نیز رابطه زیر موجود است:

۲ـ۱ـ٤ـ سیستم بارهای معادل وارد به گرهها

$$
\left[\begin{aligned}
\|P''\| &= \|\beta_1\|\,\|v\| + \|\beta_2\|\,\|\theta\| \\
\|M\| &= \|\varepsilon\|\,\|\varphi\| \\
\|\mathscr{M}\| &= \|\beta_2\|^t\,\|v\| + \|\mathcal{G}\|\,\|\theta\|
\end{aligned}\right.
\qquad (۸)
$$

۱ـ٤ـ۲ـ سیستم بارهای معادل وارد به‌گره‌ها

درمحاسبات فوق فرض‌شده‌که بارهای وارد به هریک از تیرها درگره‌ها متمرکز باشند . ولی‌در عمل باروارد بهرتیر ممکن است درطول تیر بنوع غیر مشخصی تقسیم شده‌باشد ؛ چنانکه درمقاله قبل (۱) دیدیم میتوان این بارها را به‌گره‌ها ، باگذاردن عکس‌العملهای قطعات تیر دو طرف گیردار روی گره‌ها ، منتقل کرد .



شکل ٤

درشکل ٤ عکس‌العملهای تیرهای گیردار (قطعات بین گره‌ها) روی تیر اصلی وارد شده‌که تولید همان تغییرمکان درگره‌ها را مینماید .

ضمناً میتوان‌بطریق زیر عمل نمود: ابتدا فرض کنیم که‌تیر مورد نظر بتنهائی متعادل باشدباداشتن بارهای خارجی تغییرمکان گره‌هارا حساب مینمائیم و سپس توسط‌معادلات (۳) یا (٦) بارهای معادل وارد به‌گره‌ها را حساب مینمائیم .

درحالتیکه تیرمورد نظر بتنهائی متعادل‌نباشد فرض میکنیم که دوانتهای‌آن روی دو تکیه‌گاه‌ساده قرارگیرد و تغییرمکانهای گره‌های تیر روی دوتکیه‌گاه را ، باداشتن بارهای خارجی ، محاسبه‌میکنیم ؛ سپس بوسیله معادلات (٦) بارهای معادل وارد بگره‌ها را حساب مینمائیم . بارهای وارد به‌دوگره‌انتهائی راچنان انتخاب میکنیم که سیستم بارهای وارد به‌گره‌های این‌تیر متعادل باشند .

۱ـ٤ـ۳ـ معادله تعادل

فرض کنیم که ماتریسهای‌مربع مستطیل $\|P\|$ ، $\|M\|$ و $\|\mathscr{M}\|$ که از درجه (m , n) هستند ، ماتریسهای بار قائم، لنگر خمشی درجهت‌طول ولنگر خمشی‌درجهت عرض وارد‌به‌گره‌های N_i^j شبکه‌تیرهای متقاطع باشند و فرض کنیم که $\|v\|$ ، $\|\varphi\|$ و $\|\theta\|$ ماتریسهای‌مربع‌مستطیل از درجه (m , n) تغییرمکانها و زاویه‌های چرخش گره‌های فوق باشند .

اگر $\|P'\|$ ، $\|M'\|$ و $\|\mathscr{M}'\|$ ازیکطرف‌و $\|P''\|$ ، $\|M''\|$ و $\|\mathscr{M}''\|$ ازطرف‌دیگربترتیب‌نیروهاولنگرهای متحمله توسط تیرهای A^j و B_i باشند لازمست که روابط زیر موجود باشد :

---

۱ - محاسبه ماتریسی سیستم‌های سه بعدی هیپراستاتیک از درجات بالا ـ رابطه مشخصه یک میله ازیک اسکلت ـ نوشته مؤلف ـ مجله دانشکده فنی تهران شماره ٤

$$\left\{\begin{array}{l} \| P \| = \| P' \| + \| P'' \| \\ \\ \| M \| = \| M' \| + \| M'' \| \\ \\ \| \mathcal{M} \| = \| \mathcal{M}' \| + \| \mathcal{M}'' \| \end{array}\right. \qquad (۹)$$

ویا باتوجه بمعادلا ۷ و ۸ میتوان چنین نوشت :

$$\left\{\begin{array}{l} \| P \| = \| \nu \| \, | \alpha_1 | + | \beta_1 | \, \| \nu \| + \| \varphi \| \, | \alpha_2 | + | \beta_2 | \, \| \theta \| \\ \\ \| M \| = \| \nu \| \, | \alpha_2 |^t + \| \varphi \| \, | \gamma | + | \varepsilon | \, \| \varphi \| \\ \\ \| \mathcal{M} \| = | \beta_2 |^t \, \| \nu \| + \| \theta \| \, | \delta | + | \zeta | \, \| \theta \| \end{array}\right. \qquad (۱۰)$$

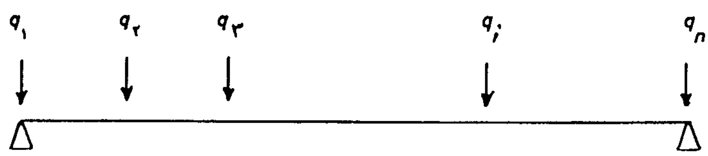
حل معادلات خطی (۱۰) مقادیر متغیرهای وضعی را بماسیدهد و بوسیله روابط (۷) و (۸) بارهای تحمل شده توسط هرتیررا میتوان بدست آورد .

ولی در حقیقت‌اشکال عمده حل معادلات(۱۰) میباشد . معادلات (۱۰) را میتوان بصورتی‌درآورد که در بعضی موارد راه‌حل‌های سریع بما بدهد و نیز دراغلب موارد تسهیلاتی درحل این معادلات ایجاد مینماید .

در سطور زیر سعی خواهیم‌کرد نکات لازم برای انجام این تبدیل را تشریح نمائیم .

۱-۵-سیستم بارهای خاص تیرهای A^j

۱-۵-۱ سیستم بارهای خاص نیروهای قائم



شکل ۵

برحسب تعریف سیستم بارهای خاص q_i سیستم بارهائی هستند که اگر به گره‌های N_i تیر وارد

شوند تغییر مکان تیر درگره N_i متناسب با q_i (بار وارد بگره) باشد. نکته‌فوق رامیتوان بدین صورت‌نوشت:

$$[v]=S[q]$$

اماچنانکه دیدیم :

$$[v]=[q]\ \boxed{a_1}$$

بنابراین :

$$[q](\boxed{a_1}-S\boxed{I})=0$$

$\boxed{I}$ ماتریس واحد از درجه n میباشد . برای اینکه $[q]$ مخالف صفر باشد لازمست‌که S یکی از مقادیر خاص ماتریس $\boxed{a_1}$ باشد . بنابراین S ریشه های کثیرالجمله‌ای که از مساوی صفر گذاردن دترمینان ماتریس $\boxed{a_1}-S\boxed{I}$ بدست میاید میباشد :

$$\begin{vmatrix} a_1^1-S & a_1^2 & a_1^3 & \cdots \\ a_2^1 & a_2^2-S & a_2^3 & \cdots \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3-S & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \end{vmatrix}=0 \qquad (11)$$

چون‌مقادیر خاص S مربوط‌بشکل دوخطی (Forme quadratique) انرژی سیستم ، که همیشه مثبت‌است ، میباشند میتوان براحتی‌اثبات نمود که ریشه های کثیرالجمله (۱۱) همیشه‌حقیقی و مثبت‌اند .

سیستم بارهای $[q_i^r]$ مربوط به مقدار خاص S_r ، باتفاوت یک ضریب تناسب ، همان ماتریس‌خط مختصات بردار خاص ماتریس $\boxed{a_1}$ میباشد .

مقادیر خاص S_r راچنان‌نامگذاری‌میکنیم که $S_1 > S_2 > S_3 \ldots > S_n$ باشداکنون‌ماتریس‌مربع $\boxed{Q}$ را چنان تشکیل میدهیم که‌خطوط‌آن بترتیب از ماتریس خط‌های $[q_i^1]$ و $[q_i^2]$ ... و $[q_i^n]$ تشکیل شده‌باشد. بنابراین ماتریس $\boxed{Q}$ از عنصرهای q_i^r تشکیل شده‌که از آن i و r از ۱ تا n تغییر میکنند .

چنانکه میدانیم بعلت خواص این ماتریس رابطه زیر موجود است :

$$\boxed{Q}^{-1}=\boxed{Q}^t \qquad (12)$$

اکنون ماتریس $\boxed{\pi}$ را بصورت زیر انتخاب میکنیم :

$$\boxed{\pi}=\boxed{P}\ \boxed{Q}^t$$

درحقیقت‌ماتریس $\boxed{\pi}$ ماتریس‌مولفه های‌ماتریس $\boxed{P}$ دردستگاه‌اساس $\boxed{Q}$ میباشد، یعنی‌میتوان‌نوشت :

$$\boxed{P}=\boxed{\pi}\ \boxed{Q} \qquad (13)$$

ضمناً فرض میکنیم که ماتریس $\boxed{\frac{1}{S}}$ معکوس ماتریس $\boxed{S}$ بصورت :

$$\boxed{S} = \begin{vmatrix} S_1 & & O \\ & S_2 & \\ & & \cdots \\ O & & S_n \end{vmatrix}$$

باشد ماتریس $\boxed{S}$ را ماتریس قطری شده‌ی ماتریس $\boxed{\alpha_1}$ مینامند . روابط زیراز خواص ماتریس‌ها نتیجه میشود :

$$\boxed{Q}\,\boxed{\alpha_1} = \boxed{\frac{1}{S}}\,\boxed{Q} \qquad (۱٤)$$

از روابط (۱۲) ، (۱۳) و (۱٤) بعداً استفاده خواهیم نمود .

۱ـ۵ـ۲ـ سیستم بارهای خاص لنگرهای M و $\mathscr{M}$

بهمان ترتیب فوق ماتریسهای $\boxed{N}$ و $\boxed{\mathscr{N}}$ را بنام ماتریسهای مربع مولفه‌های سیستم‌بارهای خاص بترتیب مربوط‌به M و $\mathscr{M}$ تعیین میکنیم باانتخاب همان روش‌استدلال‌روابط‌زیر بدست‌میآیند :

$$\boxed{N}^{-1} = \boxed{N}^{t} \qquad (۱۵)$$

$$\boxed{N}\,\boxed{\gamma} = \boxed{\frac{1}{R}}\,\boxed{N} \qquad (۱٦)$$

$$\boxed{M} = \boxed{\Omega}\,\boxed{N} \qquad (۱۷)$$

$$\boxed{\mathscr{N}}^{-1} = \boxed{\mathscr{N}}^{t} \qquad (۱۸)$$

$$\boxed{\mathscr{N}}\,\boxed{\delta} = \boxed{\frac{1}{T}}\,\boxed{\mathscr{N}} \qquad (۱۹)$$

$$\boxed{\mathscr{M}} = \boxed{\Lambda}\,\boxed{\mathscr{N}} \qquad (۲۰)$$

۱ـ٦ شکل جدید معادلات تعادل

فرض کنیم که $\boxed{V}$ و $\boxed{\Phi}$ و $\boxed{\Theta}$ ماتریسهای مولفه‌های ماتریسهای $\boxed{v}$ ، $\boxed{\varphi}$ و $\boxed{\theta}$ بترتیب دراساسهای $\boxed{Q}$ ، $\boxed{N}$ و $\boxed{\mathscr{N}}$ باشند، درحقیقت‌روابط زیر موجود است :

$$\left[\begin{aligned} \boxed{\boxed{v}} &= \boxed{\boxed{V}}\;\boxed{Q} \\ \boxed{\boxed{\varphi}} &= \boxed{\boxed{\Phi}}\;\boxed{N} \\ \boxed{\boxed{\theta}} &= \boxed{\boxed{\Theta}}\;\boxed{\mathcal{N}} \end{aligned}\right. \qquad (٢١)$$

باتوجه بروابط (۱۲) تا (۲۱) روابط (۱۰) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\left[\begin{aligned} \boxed{\boxed{\Pi}}\;\boxed{Q} &= \boxed{\boxed{V}}\;\boxed{Q}\;\boxed{\alpha_1} + \boxed{n_1}\;\boxed{\boxed{V}}\;\boxed{Q} + \boxed{\boxed{\Phi}}\;\boxed{N}\;\boxed{\alpha_2} + \boxed{\eta_2}\;\boxed{\boxed{\Theta}}\;\boxed{\mathcal{N}} \\ \boxed{\boxed{\Omega}}\;\boxed{N} &= \boxed{\boxed{V}}\;\boxed{Q}\;\boxed{\alpha_2}^t + \boxed{\boxed{\Phi}}\;\boxed{N}\;\boxed{\gamma} + \boxed{\varepsilon}\;\boxed{\boxed{\Phi}}\;\boxed{N} \\ \boxed{\boxed{\Lambda}}\;\boxed{\mathcal{N}} &= \boxed{n_2}^t\;\boxed{\boxed{V}}\;\boxed{Q} + \boxed{\boxed{\Theta}}\;\boxed{\mathcal{N}}\;\boxed{\delta} + \boxed{\zeta}\;\boxed{\theta}\;\boxed{\mathcal{N}} \end{aligned}\right.$$

و یا اگر طرفین رابطه اول را در $\boxed{Q}^{-1}$ ، رابطه دوم را در $\boxed{N}^{-1}$ ورابطه سوم را در $\boxed{\mathcal{M}}^{-1}$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$\left[\begin{aligned} \boxed{\boxed{\Pi}} &= \boxed{\boxed{V}}\;\boxed{\tfrac{1}{S}} + \boxed{n}\;\boxed{\boxed{V}} + \boxed{\boxed{\Phi}}\;\boxed{N}\;\boxed{\alpha}\;\boxed{Q}^t + \boxed{n_2}\;\boxed{\boxed{\Theta}}\;\boxed{\mathcal{N}}\;\boxed{Q}^t \\ \boxed{\boxed{\Omega}} &= \boxed{\boxed{V}}\;\boxed{Q}\;\boxed{\alpha_2}^t\;\boxed{N}^t + \boxed{\boxed{\Phi}}\;\boxed{\tfrac{1}{R}} + \boxed{\varepsilon}\;\boxed{\boxed{\Phi}} \\ \boxed{\boxed{\Lambda}} &= \boxed{n_2}^t\;\boxed{\boxed{V}}\;\boxed{Q}\;\boxed{\mathcal{N}}^t + \boxed{\boxed{\Theta}}\;\boxed{\tfrac{1}{T}} + \boxed{\zeta}\;\boxed{\boxed{\Theta}} \end{aligned}\right.$$

نامگذاریهای زیر را می‌پذیریم :

$$\left[\begin{aligned} \boxed{X} &= \boxed{N}\;\boxed{\alpha_2}\;\boxed{Q}^t \\ \boxed{Y} &= \boxed{\mathcal{N}}\;\boxed{Q}^t \end{aligned}\right. \qquad (٢٢)$$

بنابراین خواهید داشت :

$$\left[\begin{aligned} \boxed{\boxed{\Pi}} &= \boxed{\boxed{V}}\;\boxed{\tfrac{1}{S}} + \boxed{n_1}\;\boxed{\boxed{V}} + \boxed{\boxed{\Phi}}\;\boxed{X} + \boxed{n_2}\;\boxed{\boxed{\Theta}}\;\boxed{Y} \\ \boxed{\boxed{\Omega}} &= \boxed{\boxed{V}}\;\boxed{X}^t + \boxed{\boxed{\Phi}}\;\boxed{\tfrac{1}{R}} + \boxed{\varepsilon}\;\boxed{\boxed{\Phi}} \\ \boxed{\boxed{\Lambda}} &= \boxed{n_2}^t\;\boxed{\boxed{V}}\;\boxed{Y}^t + \boxed{\boxed{\Theta}}\;\boxed{\tfrac{1}{T}} + \boxed{\zeta}\;\boxed{\boxed{\Theta}} \end{aligned}\right.$$

معادلات فوق شکل عمومی معادلات تعادل یک شبکه تیرهای متقاطع را نشان میدهد دراولین معادله از معادلات (۲۳) جمله $\|V\| \left|\frac{1}{S}\right| + \|\beta_1\|\,\|V\|$ مربوط است به معادلات تیرهای فرعی روی تکیه گاههای ارتجاعی باضریب ارتجاعی S . بقیه جملات این رابطه تاثیر لنگر خمشی ولنگر پیچشی رادرجذب بارهای $\|\pi\|$ نشان میدهد .

در معادله دوم از معادلات(۲۳) جمله $\|\Phi\| \left|\frac{1}{R}\right| + \|\varepsilon\|\,\|\Phi\|$ نمایش قسمتی از لنگرهای $\|\Omega\|$ ، جذب شده توسط تیرهای فرعی روی تکیه گاههای ارتجاعی (ارتجاعی در مقابل پیچش) بضریب ارتجاعی R ، میباشد. جمله $\|V\|\,\|x\|^t$ تأثیر تغییر شکلهای قائم تیرهارا در جذب لنگر پیچشی این تیرها، نشان میدهد .

بالاخره درمعادله سوم از معادلات (۲۳) جمله $\|\Theta\| \left|\frac{1}{T}\right| + \|\xi\|\,\|\Theta\|$ نمایش قسمتی از لنگرهای $\|\Lambda\|$ جذب شده توسط تیرهای فرعی روی تکیه گاههای ارتجاعی (ارتجائی در مقابل چرخش) بضریب ارتجاعی T ، میباشد. جمله $\|\beta_2\|^t\,\|V\|\,\|y\|^t$ تاثیر تغییر شکلهای قائم تیرها را درجذب لنگرهای خمشی این تیرها نشان میدهد .

درنتیجه حل معادلات تعادل یک شبکه منجر بحل مسئله تیرهای فرعی زیراثربارهای $\|\pi\|$ و $\|\Omega\|$ و $\|\Lambda\|$ میگردد . البته تیرهای فرعی روی تکیه گاههای ارتجاعی ، بضریب ارتجاعی S_r برای تغییر مکان، R_t برای پیچش و T_u برای چرخش قرار دارند . اما اثر متقابل متغیرات وضعی روی متغیرات تنشی شکل پیچیده ای دارد درشماره آینده این مجله خواهیم دید که در بعضی موارد مخصوص این معادلات بسیار ساده میگردند .

ناتمام