

تعیین مقدار نیروهای گرهی در محاسبه دالها به گسیختگی

نوشته :

دکتر مهدی قالبیافیان (Dr. Ing.)

استادیار دانشکده فنی تهران

سرپرست آزمایشگاه مصالح ساختمان

۱ - علائم و قراردادها

۱.۱ - نشانه‌ها

- Q_k : قدرمطلق بار متمرکزی که در گره N_k اثر مینماید
 q_{ki} : قسمتی از بار متمرکز Q_k که بوسیله قطعه دال (i) تحمل میشود
 f_{kj} : نیروی گرهی جزئی مؤثر در گره N_k که از لولای $N_k N_j$ منتج شده است
 F_{ki} : نیروی گرهی مؤثر روی قطعه دال (i) در گره بدون بار N_k
 \mathcal{F}_{ki} : نیروی گرهی مؤثر روی قطعه دال (i) در گره N_k وقتی که گره مزبور تحت اثر بار متمرکز Q_k قرار گرفته باشد

- M_1 : لنگر مقاوم در یک متر طول مقطعی که به میلگردهای سفره اول آرماتور عمود میباشد
 M_2 : لنگر مقاوم در یک متر طول مقطعی که به میلگردهای سفره دوم آرماتور عمود میباشد .
 m_i : لنگر مقاوم در یک متر طول یک لولای پلاستیک که بالولای به لنگر M_1 زاویه θ_i میسازد
 λ : نسبت بین لنگرهای M_2 و M_1

$$M_2 = \lambda M_1$$

(فرض میشود $\lambda < 1$ میباشد)


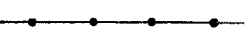

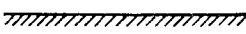






- θ_i : زاویه بین یک لولای پلاستیک غیر مشخص و لولائی که لنگر مقاوم روی آن M_1 است
 β_i, α_i : زاویه بین دو لولای پلاستیک غیر مشخص و یک لولای پلاستیک و لبه دال

- δ_x : تغییر مکان مجازی نقطه X
- φ_{xi} : دوران قطعه دال (i) حول محور x ها
- φ_{yi} : دوران قطعه دال (i) حول محور y ها
- سایر علائم در متن شرح داده شده است .

۱.۲ - قرارداد مربوط به علائم :

- ۱.۲۱ - یک لنگر خمشی وقتی مثبت فرض میشود که در سطح زیرین دال کشش ایجاد نماید . این لنگر با برداری که نسبت به قطعه دال مورد نظر در جهت عقربه های ساعت میچرخد نشان داده شده و لولائی که چنین لنگری در آن اثر مینماید یک لولای گسیختگی مثبت نامیده خواهد شد .
- ۱.۲۲ - بارهای متمرکز و نیروهای گرهی وقتی مثبت در نظر گرفته خواهد شد که جهت آنها از پائین به بالا باشد و در غیر این صورت آنها را منفی در نظر خواهیم گرفت .

۱.۳ - علائم ترسیمی

- لولای پلاستیک مثبت (تارهای پائین دال کششی هستند) : 
- لولای پلاستیک منفی (تارهای بالای دال کششی هستند) : 
- لبه آزاد دال : 
- لبه ای که بطور ساده اتکا دارد : 
- لبه ای که بطور گیردار اتکا دارد : 
- تکیه گاه نقطه ای : 
- محور دوران - محور تقارن : 
- نقطه اثر یک بار متمرکز که جهت آن از بالا به پائین میباشد : 
- نیروی گرهی جزئی که جهت آن از بالا به پائین میباشد : 
- نیروی گرهی جزئی که جهت آن از پائین به بالا میباشد : 

۲ = مقدمه

از مدت ها پیش تئوری پروفیسور ژوهانسن مناسب ترین وسیله برای حل مسائل مربوط به گسیختگی دالهای بتن آرمه شناخته شده است و در واقع در اکثر حالات تنها راه حلی است که میتوان بان توسل جست . پروفیسور ژوهانسن در تئوری خود موسوم به « تئوری خطوط گسیختگی » دو روش محاسبه بشرح زیر پیشنهاد نموده است :

روش کارهای مجازی و روش تعادل

روش اول بیشتر از روش دوم مورد استفاده بوده و روش دوم عملاً متروک شده است. علت این امر آنستکه روش دوم در اغلب حالات به نتایج ناصحیح منجر میشود زیرا فرمولهائی که برای محاسبه نیروهای گرهی تنظیم شده است با واقعیت منطبق نبوده و باید عوامل مکملی بآنها افزوده شود. در این مقاله ابتدا تئوری پروفیسور ژوهانسن را بطور خلاصه از نظر گذرانده و سپس سعی خواهیم کرد که فرمولهائی تازه‌ای برای تعیین نیروهای گرهی تدوین نماییم. در قسمت آخر بکمک یک مثال نشان خواهیم داد که هر دو روش به یک نتیجه منتهی میشود.

۴ - تئوری پروفیسور ژوهانسن

تنظیم تئوری «خطوط گسیختگی» بوسیله پروفیسور ژوهانسن حاصل مطالعه آزمایشات مختلفی بود که روی دالهای بتن آرمه انجام گرفته بود. در واقع پروفیسور ژوهانسن ضمن مطالعه چگونگی گسیختن دالها مشاهده نمود که گسیختگی در طول نوارهای باریکی ایجاد میشود که بطور محسوس مستقیم الخط بوده و در این نوارها تنش در آرماتور به حد ارتجاعی میرسد. او همچنین ملاحظه کرد که ظرفیت باربری دال نظیر تشکیل ناقص این نوارها نبوده بلکه بار تا موقعی افزوده میشود که نوارها بطور کامل تشکیل شده و دال تبدیل یک «مکانیسم» یعنی یک سیستم قابل تغییر شکل بدون احتیاج به نوارهای جدید گردد. در مورد تغییر شکلهای پروفیسور ژوهانسن متوجه شد که از دو قسمت تشکیل میگردد: تغییر شکلهای پلاستیک که در نوارهای فوق‌الذکر متمرکز میشود و تغییر شکلهای ارتجاعی که در مقابل تغییر شکلهای پلاستیک قابل اغماض میباشد. نامبرده بر مبنای این مشاهدات سعی نمود که پدیده گسیختگی دالها را «ایده‌آلیز» نماید و برای این منظور از تغییر شکلهای ارتجاعی صرف نظر کرده و نوارهای گسیختگی را با لولای پلاستیک جان‌نشین نمود و این لولاها را «خطوط گسیختگی» نام نهاد. باین ترتیب یک مدل «ریزید - پلاستیک» از دال در نظر گرفت.

اختیار یک چنین مدلی از دال ایجاب مینماید قطعاتی از دال که بوسیله لولاهای پلاستیک محدود میشوند مسطح بوده و خود لولاها مستقیم الخط باشند زیرا فصل مشترک صفحات را تشکیل میدهند. در این حالت تغییر شکل دال عبارت خواهد بود از دوران قطعه دالهای مختلف حول لولاهای پلاستیک نسبت بیکدیگر. اگر لبه یک قطعه دال بطور ساده روی تکیه‌گاه نشسته باشد محور دوران آن قطعه دال بر محور تکیه‌گاه منطبق خواهد بود و اگر یک قطعه دال بطور ساده روی یک ستون نشسته باشد محور دوران آن از این نقطه اتکاء خواهد گذشت. واضح است که امتداد لولای پلاستیک واقع بین دو قطعه دال مجاور از محل تلاقی محورهای دوران آن دو قطعه خواهد گذشت.

۴ - کاربرد تئوری پرفسور ژوهانس

وقتی مبانی تئوری خطوط گسیختگی مطابق آنچه که دیدیم معلوم گردید ، اگر یک شمای گسیختگی و یک حالت بار (موقعیت و شدت بار) مشخص در دست باشد میتوان لنگری را که در لولاهای پلاستیک اثر مینماید بدست آورد (مسئله تعیین ابعاد) . برعکس اگر لنگر مقاوم را در لولاهای بدانیم با داشتن شمای گسیختگی میتوانیم ظرفیت باربری دال را تعیین نمائیم (مسئله کنترل) .

این محاسبات را میتوان به دو روش مختلف انجام داد :

الف - روش مبتنی بر اصل کار مجازی

ب - روش تعادل

روش مبتنی بر اصل کار مجازی در نوشتن تساوی کار نیروهای داخلی و خارجی در یک تغییر مکان مجازی سازگار با پیوند خلاصه میشود .

در روش تعادل ، تعادل هر قطعه دال درست در لحظه ماقبل گسیختگی کامل ، تحت اثر نیروهای خارجی و نیروهای داخلی که در لولای پلاستیک اثر مینمایند مورد مطالعه قرار میگیرد .

نیروهای داخلی مؤثر در لولاهای بشرح زیر میباشد :

الف - لنگر خمشی

ب - لنگر پیچشی

ج - تلاش برشی

بعقیده پرفسور ژوهانس میتوان دو نیروی اخیر را در مجموع با نیروهای گرهی جانشین نمود که عبارتند از نیروهای عرضی متمرکزی که در محل تلاقی لولاهای گسیختگی روی قطعه دالها اثر مینمایند . واضح است که در کاربرد هر کدام از دو روش فوق میتوان قسمتی از نیروها را بدون هیچ اشکالی با نتیجه آنها جانشین نمود بدون اینکه احتیاج به شناسائی طرز توزیع دقیق آنها در طول لولاهای پلاستیک داشته باشیم .

علاوه بر این وقتی روش کارهای مجازی را مورد استفاده قرار بدهیم فقط لنگرهای خمشی مؤثر در لولاهای پلاستیک وارد محاسبات شده و مجموع کارهای انجام شده بوسیله سایر نیروهای داخلی مساوی صفر میگردد .

در آنچه که تا اینجا دیدیم شمای گسیختگی شناخته شده فرض گردیده ولی در واقع چه در مورد یک مسئله تعیین ابعاد و چه در مورد یک مسئله کنترل شمای گسیختگی اولین چیزی است که باید مشخص گردد .

۹ - مشخص نمودن شمای گسیختگی

۱ . ۵ - وقتی روش انتخاب شده مبتنی بر اصل کار مجازی باشد ، بمنظور تعیین شمای گسیختگی به یکی از قضیه های اصلی تجزیه و تحلیل حدی بنام « قضیه کرانه تختانی » توسل میجویند . بموجب این قضیه بار گسیختگی واقعی از تمام بارهای گسیختگی که با استفاده از شماهای گسیختگی مختلف حساب شده اند کوچکتر میباشد و بین تمام شماهای گسیختگی ممکن یک شما وجود دارد که کوچکترین بار گسیختگی را بدست میدهد ، این شما شمای گسیختگی واقعی است . با توجه باین مطلب یک شمای گسیختگی در نظر میگیرند که به پارامترهای X, Y, Z و غیره . . . بستگی دارد . در مورد این شما روش کارهای مجازی را بکار بسته و بار گسیختگی P را بصورت تابعی از پارامترهای فوق بدست میآورند :

$$(V-1) \quad P = F(X, Y, Z, \dots)$$

شرط لازم برای اینکه بار گسیختگی P حداقل گردد بصورت روابط زیر نوشته میشود :

$$(V-2) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial Z} = 0 \\ \dots \dots \end{cases}$$

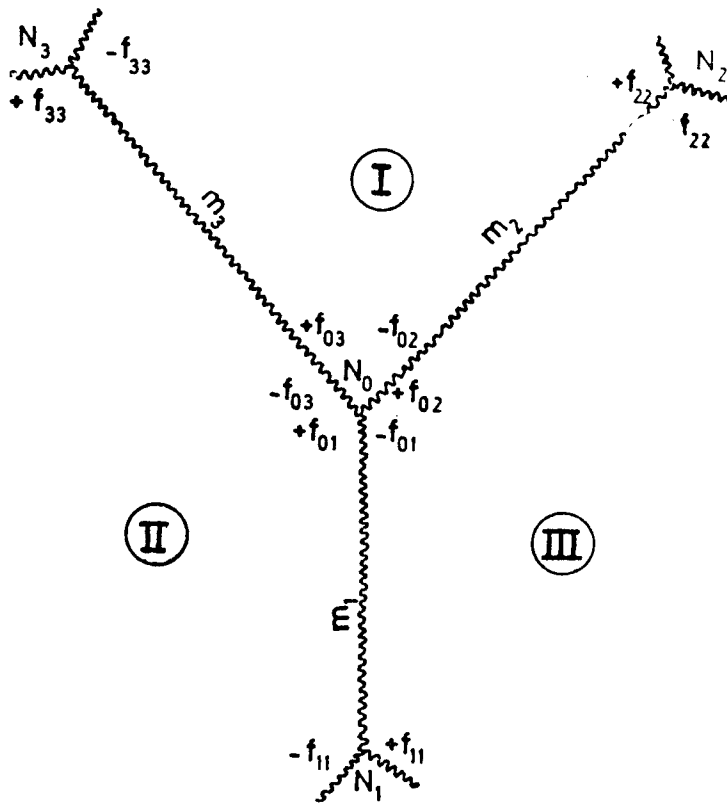
این روابط تشکیل n معادله n مجهولی میدهند که از حل آنها پارامترها و بکمک پارامتر شمای گسیختگی واقعی بطور کامل بدست میآید .

۲ . ۵ - وقتی از روش تعادل برای حل مسائل مربوط به دالها استفاده میشود ، شروع کار کاملاً شبیه حالتی است که روش کارهای مجازی مورد استفاده قرار میگیرد . باین معنی که یک شمای گسیختگی وابسته به پارامترهای X, Y, Z و غیره . . . در نظر گرفته و سعی مینماید با نوشتن رابطه تعادل قطعه دالهای مختلف معادلات لازم را بدست بیاورند . حل این دستگاه معادلات از یکسو به تعیین پارامترها و شمای گسیختگی و از سوی دیگر به تعیین بار گسیختگی در مسئله کنترل و یا به تعیین لنگر مؤثر در لولاهای پلاستیک در مسئله تعیین ابعاد منجر میگردد .

بدیهی است که برای نوشتن رابطه تعادل قطعه دالهای مختلف شناسائی رابطه صحیح نیروهای گرهی ضروری است زیرا در این حالت اثر لنگرهای پیچشی و تلاشهای برشی برعکس روش کارهای مجازی مساوی صفر نمیشد .

۶ = تعیین مقدار نیروهای گرهی

برای تعیین مقدار نیروهای گرهی، یک گره که از تلاقی سه لولای گسیختگی N_0N_2 ، N_0N_1 و N_0N_3 بوجود آمده در نظر میگیریم. این لولاها مطابق شکل (VI-I) قطعه دالهای I، II، III را از هم جدا مینمایند. همانطور که فوقاً توضیح داده شد روی این لولاهای گسیختگی لنگرهای خمشی m_3 ، m_2 ، m_1 و تلاشهای برشی و لنگرهای پیچشی اثر مینماید. دونوع اخیر تلاشها را که در طول یک لولای پلاستیک توزیع شده‌اند میتوان با دونیروی متمرکز که در ابتدا و انتهای لولای مزبور وارد میشوند جانشین نمود.



علائم قراردادی هستند

Fig (VI - I)

(Les signes sont conventionnels)

باید توجه داشت که این نیروها تلاشهای داخلی سیستم بوده و در طرفین لولای مورد نظر نظیر به نظیر

مساوی و مختلف‌العلامه هستند.

این نیروها را نیروهای گرهی جزئی نامیده و با f_{ki} نشان خواهیم داد. در یک گره، برای هر قطعه

دال، نیروهای گرهی جزئی حاصل از دو لولای گسیختگی مجاور نیروی گرهی F_{ki} را بوجود میآورند. بعنوان

مثال برای گره N_0 نیروهای گرهی که روی قطعه دالهای I, II, III اثر می‌نمایند به ترتیب عبارت خواهند بود:

$$(VI-3) \quad \begin{cases} F_{01} = -f_{02} + f_{03} \\ F_{02} = -f_{03} + f_{01} \\ F_{03} = -f_{01} + f_{02} \end{cases}$$

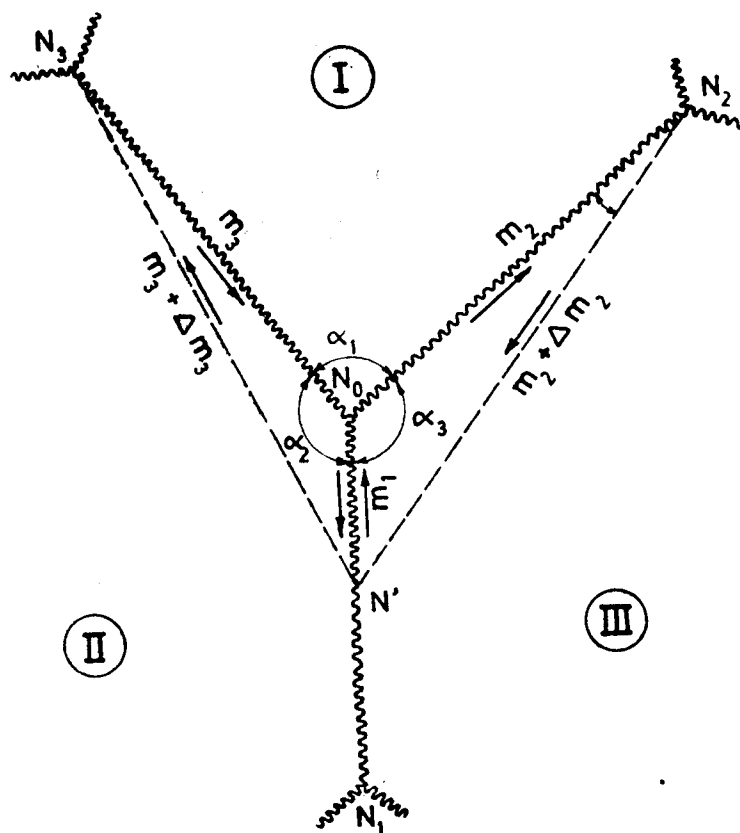
از این روابط نتیجه میشود:

$$F_{01} + F_{02} + F_{03} = 0$$

که نشان دهنده تعادل گره N_0 میباشد.

با توجه بآنچه که گفته شد میتوان باسانی رابطه نیروی گرهی مؤثر روی یک قطعه دال درمجاورت یک گره را بدست آورد. برای اینکار بطریق زیر عمل میشود:

درمثال فوق، درمجاورت گره N_0 دولولای گسیختگی فرضی N'_2N_3 , N'_1N_3 را بینهایت نزدیک به لولاهای گسیختگی N_0N_2 , N_0N_3 طوری عبور میدهیم که از قطعه دالهای II, III به ترتیب مثلتهای $N_2N'_1N_0$, $N_3N'_1N_0$ را جدا نمایند، شکل (VI-II).



Fig(VI - II)

چون مجموعه سیستم در حال تعادل میباشد بنابراین هر یک از اجزاء آن نیز باید در حال تعادل باشد. از این مسئله نتیجه میشود که مثلثهای $N_2N'N_0$, $N_3N'N_0$ در حال تعادل میباشند زیرا بلافاصله قبل از گسیخته شدن ، دال تحت اثر نیروهای داخلی و خارجی هنوز در حال تعادل میباشد . فرض کنیم $N_0N' = \Delta s$. میدانیم که لنگر مقاوم روی واحد طول لولای $N'N_2$ برابر خواهد بود با $m_2 + \Delta m_2$ و روی واحد طول $N'N_3$ لنگر مقاوم $m_3 + \Delta m_3$ وجود خواهد داشت . مستطجه بار گسترده روی مثلث $N_2N'N_0$ مساوی ΔP_3 خواهد بود که نقطه اثر آن G_3 بفاصله Δh_3 از $N'N_2$ قرار دارد ، شکل (VI-III) .

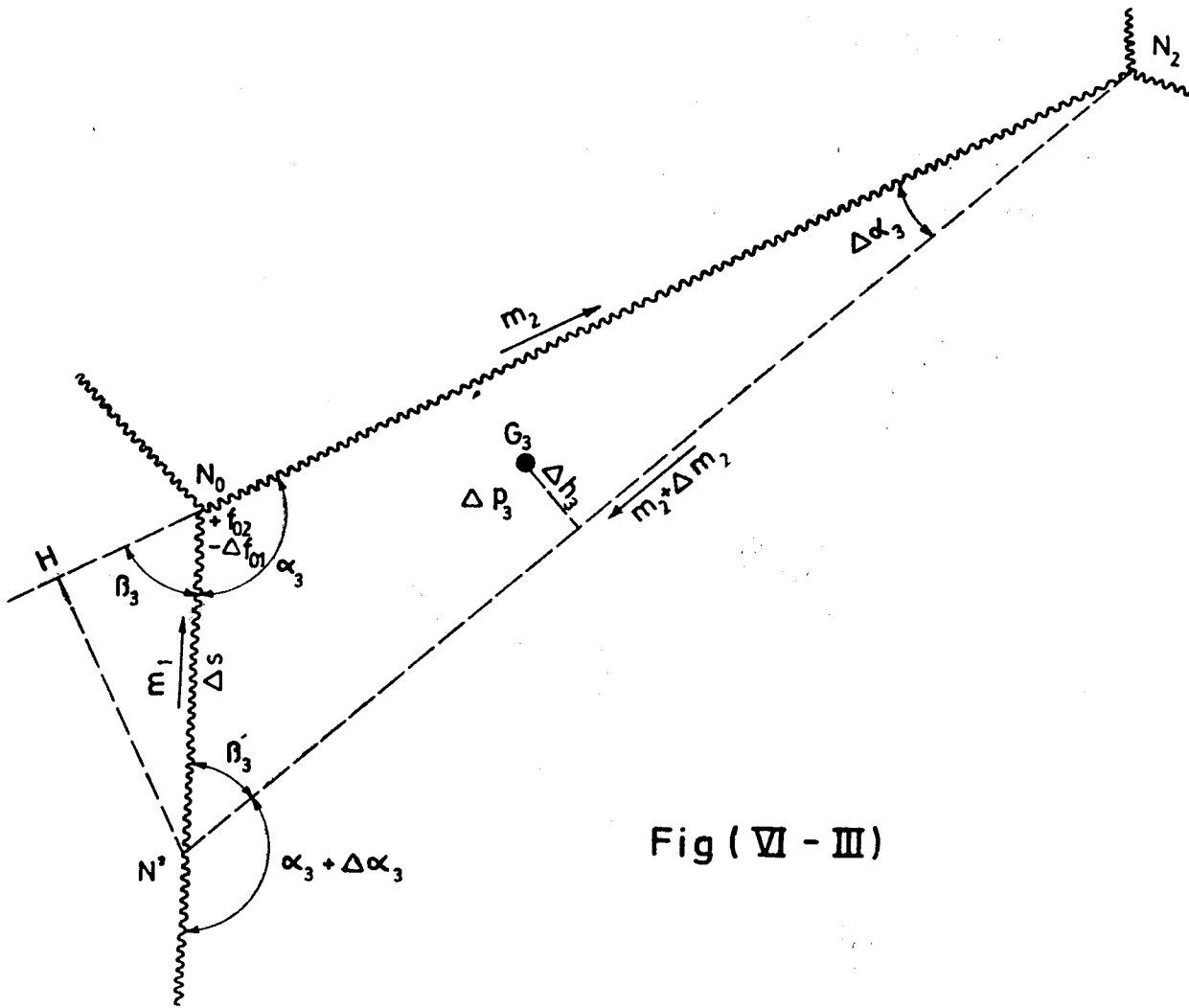


Fig (VI - III)

باتوجه بمطالب فوق رابطه تعادل مثلث $N_2N'N_0$ حول لولای $N'N_2$ بشکل زیر نوشته میشود :

$$(a) \quad \Delta s m_1 \cos \beta'_3 + N_0 N_2 m_2 \cos \Delta \alpha_3 - N_2 N' (m_2 + \Delta m_2) + (f_{o2} - \Delta f_{o1}) \Delta s \sin \beta'_3 - \Delta h_3 \Delta P_3 = 0$$

مطابق شکل (VI-III) داریم :

$$N_2 N' = \Delta s \cos \beta'_3 + N_0 N_2 \cos \Delta \alpha_3$$

که با استفاده از آن رابطه (a) بشکل زیر نوشته میشود :

$$(b) \quad \Delta s m_1 \cos \beta'_3 + N_0 N_2 m_2 \cos \Delta \alpha_3 - \Delta s m_2 \cos \beta'_3 - N_0 N_2 m_2 \cos \Delta \alpha_3 - \\ - N_2 N' \Delta m_2 + f_{02} \Delta s \sin \beta'_3 - \Delta f_{01} \Delta s \sin \beta'_3 - \Delta h_3 \Delta P_3 = 0$$

حال اگر $N_2 N'$ بسمت $N_2 N_0$ میل نماید دوجمله آخر این رابطه بسمت $dh_3 dP_3$, $df_{01} ds \sin \beta'_3$ میل خواهند نمود که بینهایت کوچکی از درجه دوم بوده و میتوان از آنها در مقابل سایر جمله ها صرف نظر نمود . باین ترتیب رابطه (b) بشکل زیر درمیآید :

$$(c) \quad (m_1 - m_2) \Delta s \cos \beta'_3 - N_2 N' \Delta m_2 + f_{02} \Delta s \sin \beta'_3 = 0$$

از طرف دیگر :

$$N'H = \Delta s \sin \beta_3$$

و چون $\Delta \alpha_3$ بینهایت کوچک میباشد میتوانیم بنویسیم :

$$\operatorname{tg} \Delta \alpha_3 = \Delta \alpha_3 = \frac{N'H}{N_2 N'}$$

و از آنجا :

$$N_2 N' = \frac{N'H}{\Delta \alpha_3} = \frac{\Delta s \sin \beta_3}{\Delta \alpha_3}$$

اگر بجای $N_2 N'$ مقدار آنرا از رابطه فوق قرار دهیم رابطه (c) بصورت زیر نوشته میشود :

$$(m_1 - m_2) \Delta s \cos \beta'_3 - \Delta s \sin \beta_3 \frac{\Delta m_2}{\Delta \alpha_3} + f_{02} \Delta s \sin \beta'_3 = 0$$

حال میتوان Δs را حذف کرد و اگر $\Delta \alpha_3$ بسمت صفر میل نماید β'_3 بسمت β_3 میل کرده و از

تقسیم طرفین رابطه به $\sin \beta_3$ نتیجه میشود :

$$(d) \quad (m_1 - m_2) \operatorname{Cotg} \beta_3 - \frac{dm_2}{d\alpha_3} + f_{02} = 0$$

چون $\operatorname{Cotg} \beta_3 = -\operatorname{Cotg} \alpha_3$ میباشد ، رابطه را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$(e) \quad -(m_1 - m_2) \operatorname{Cotg} \alpha_3 - \frac{dm_2}{d\alpha_3} + f_{02} = 0$$

که از آن f_{02} بشکل زیر نتیجه میشود :

$$(f) \quad f_{02} = (m_1 - m_2) \operatorname{Cotg} \alpha_3 + \frac{dm_2}{d\alpha_3}$$

$$(h) \quad (m_1 - m_3) \cos \beta'_2 - \frac{\Delta m_3}{\Delta a_2} \sin \beta_2 - f_{o3} \sin \beta'_2 = 0$$

وقتی که Δa_2 بسمت صفر میل نماید β'_2 بسمت β_2 میل کرده و رابطه h بشکل زیر درمیآید :

$$(m_1 - m_3) \cot \beta_2 - \frac{dm_3}{da_2} - f_{o3} = 0$$

و یا با توجه به اینکه :

$$\cot \beta_2 = -\cot \alpha_2$$

$$(k) \quad f_{o3} = -(m_1 - m_3) \cot \alpha_2 - \frac{dm_3}{da_2}$$

از دو رابطه (f) ، (k) براحتی رابطه نیروی گرهی F_{o1} بدست میآید :

$$F_{o1} = -f_{o2} + f_{o3}$$

$$F_{o1} = -(m_1 - m_2) \cot \alpha_3 - \frac{dm_2}{da_3} - (m_1 - m_3) \cot \alpha_2 - \frac{dm_3}{da_2}$$

و بالاخره :

$$(VI-5) \quad F_{o1} = (m_2 - m_1) \cot \alpha_3 + (m_3 - m_1) \cot \alpha_2 - \frac{dm_2}{da_3} - \frac{dm_3}{da_2}$$

بهمین ترتیب نیروهای گرهی F_{o2} ، F_{o3} از روابط زیر بدست میآیند :

$$(VI-6) \quad F_{o2} = (m_3 - m_2) \cot \alpha_1 + (m_1 - m_2) \cot \alpha_3 - \frac{dm_3}{da_1} - \frac{dm_1}{da_3}$$

$$(VI-7) \quad F_{o3} = (m_1 - m_3) \cot \alpha_2 + (m_2 - m_3) \cot \alpha_1 - \frac{dm_1}{da_2} - \frac{dm_2}{da_1}$$

ملاحظات :

الف - تقریباً در تمام نشریاتی که مسئله نیروهای گرهی مورد مطالعه قرار گرفته مؤلفین از تغییرات m صرف نظر نموده و جملات $\frac{dm_j}{da_i}$ را مساوی صفر فرض نموده اند . اینکار جز درحالتی که m روی تمام لولاهای گسیختگی مآر برگره مورد نظر یکسان و ثابت باشد صحیح نمیباشد . این مسئله را نمیتوان مانند بعضی از مؤلفین بدلیل اینکه لنگر خمشی m در طول لولاهای گسیختگی ماکزیمم بوده و بنا به تعریف $\frac{dm}{da}$

باید مساوی صفر باشد ، عمومیت داد .

در واقع لنگر خمشی ناشی از بارهای خارجی در لولاهای پلاستیک ما کزیمم بوده و وقتی بخواهیم اثر نیروهای خارجی را مطالعه نمائیم میتوانیم استدلال فوق را قبول کنیم ولی در محاسبه نیروهای گرهی ، لنگر مقاوم دال وارد محاسبات میگردد و این لنگر مقاوم یکی از مشخصات ذاتی دال بوده و بهیچوجه تابع بارهای خارجی نمیشد . با توجه باین مسئله ما حق نداریم مفهوم ما کزیمم و می نیمم را مورد استفاده قرار بدهیم بعبارت دیگر $\frac{dm}{d\alpha}$ الزاماً مساوی نمیشد مگر در صورتیکه در اطراف گره مورد نظر ، همانطور که در بالا اشاره کردیم ، مقدار m تابع امتداد لولای گسیختگی نباشد .

در حالت اخیر نیروهای گرهی نیز خود مساوی صفر میباشند مشروط بر اینکه خطوط گسیختگی همه دارای یک علامت باشند .

ب - روابط F_{03} , F_{02} , F_{01} برای حالتیکه سه لولای گسیختگی در نقطه N_0 تلاقی مینمایند تنظیم شده است ولی این روابط در گرهائی که تعداد خطوط گسیختگی بیشتر از سه باشد نیز قابل کار برد میباشند . بعنوان مثال در گره N_n که شامل چهار لولای پلاستیک میباشد ، شکل (VI - V) ، با استفاده از روابط فوق میتوان نوشت :

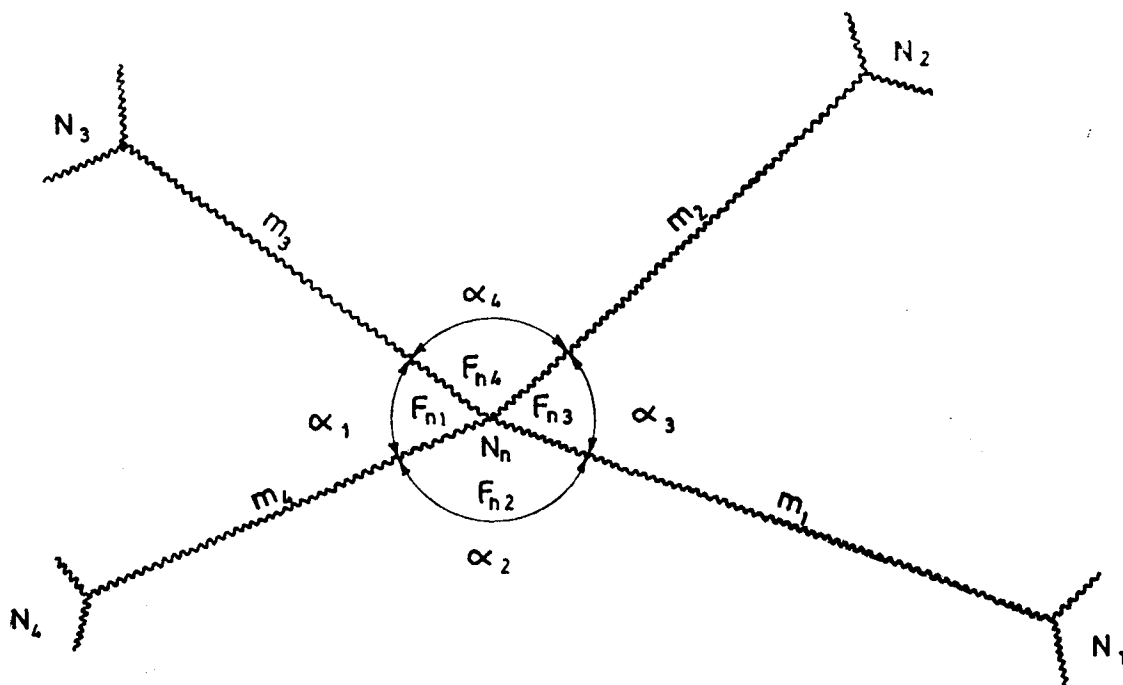


Fig (VI - V)

$$(VI-8) \left\{ \begin{array}{l} F_{n1} + F_{n4} = (m_2 - m_1) \cot \alpha_3 + (m_4 - m_1) \cot \alpha_2 - \frac{dm_2}{da_3} - \frac{dm_4}{da_2} \\ F_{n2} + F_{n1} = (m_3 - m_2) \cot \alpha_4 + (m_1 - m_2) \cot \alpha_3 - \frac{dm_3}{da_4} - \frac{dm_1}{da_3} \\ F_{n3} + F_{n2} = (m_4 - m_3) \cot \alpha_1 + (m_2 - m_3) \cot \alpha_4 - \frac{dm_4}{da_1} - \frac{dm_2}{da_4} \\ F_{n4} + F_{n3} = (m_1 - m_4) \cot \alpha_2 + (m_3 - m_4) \cot \alpha_1 - \frac{dm_1}{da_2} - \frac{dm_3}{da_1} \end{array} \right.$$

روابط فوق یکدستگاه چهارمعادله چهار مجهولی است که از حل آن F_{n1} , F_{n2} , F_{n3} , F_{n4} بدست

میآید. بهمین ترتیب میتوان درموردیکه تعداد لولاهای گسیختگی بازهم بیشتر باشد عمل نمود.

ج- تعادل گره N_k ایجاب مینماید که $\sum F_{ki}$ مساوی صفر باشد. بطوریکه در شکل (VI-VI)

دیده میشود $da_i = -da_{i+1}$ میباشد.

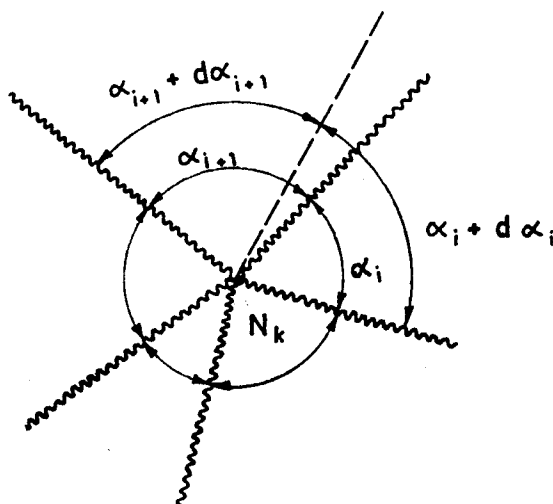


Fig (VI-VI)

ازاین مسئله نتیجه میشود:

$$\frac{dm_j}{da_i} = - \frac{dm_j}{da_{i+1}}$$

با در نظر گرفتن این رابطه ملاحظه خواهیم کرد که $\sum F_{ki}$ نمیتواند مخالف صفر باشد.

د- برای تنظیم فرمولهای (VI-5) و (VI-6) و (VI-7) سه لولای گسیختگی مثبت

در نظر گرفته شده است ولی میتوان روش استدلال فوق را درمورد هر نوع لولای گسیختگی تکرار نمود.

بعبارت دیگر فرمولهای فوق عمومیت مطلق داشته و لنگرهای مقاوم موجود در لولاها میتواند مثبت ، منفی و یا صفر باشد .

هـ - در تنظیم فرمولهای (VI-5) تا (VI-7) فقط بار گسترده (یکنواخت یا غیر مشخص) در نظر گرفته شده است در صورتیکه در اغلب حالات ، گرهها در نقاط اثر بارهای متمرکز تشکیل میشوند . در اینصورت هر قطعه دال قسمتی از بار متمرکز Q_{ki} را تحمل مینماید که با q_{ki} نشان داده میشود . اگر فرض کنیم q_{ki} جهتش از بالا به پائین باشد و در اینحال نیروی گرهی را با \mathcal{F}_{ki} نشان بدهیم ، از نوشتن تعادل مثلثهای جزئی نتیجه خواهد شد :

$$\mathcal{F}_{o1} = q_{o1} + (m_2 - m_1) \cot \alpha_3 + (m_3 - m_1) \cot \alpha_2 - \frac{dm_2}{d\alpha_3} - \frac{dm_3}{d\alpha_2}$$

$$\mathcal{F}_{o2} = q_{o2} + (m_3 - m_2) \cot \alpha_1 + (m_1 - m_2) \cot \alpha_3 - \frac{dm_3}{d\alpha_1} - \frac{dm_1}{d\alpha_3}$$

$$\mathcal{F}_{o3} = q_{o3} + (m_1 - m_3) \cot \alpha_2 + (m_2 - m_3) \cot \alpha_1 - \frac{dm_1}{d\alpha_2} - \frac{dm_2}{d\alpha_1}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{o1} = F_{o1} + q_{o1} \\ \mathcal{F}_{o2} = F_{o2} + q_{o2} \\ \mathcal{F}_{o3} = F_{o3} + q_{o3} \end{cases}$$

این روابط قشان میدهد که برای محاسبه نیروهای گرهی در یک گره تحت بار متمرکز کافیسست نیروهای گرهی را بدون در نظر گرفتن بار مزبور و مانند یک گره بدون بار محاسبه نموده و سپس به نیروهای بدست آمده جملات اصلاحی q_{ki} را اضافه نمائیم .

تعادل گره مورد نظر ایجاب مینماید که داشته باشیم :

$$-Q_{ki} + \Sigma \mathcal{F}_{ki} = 0$$

و از آنجا :

$$-Q_{ki} + \Sigma F_{ki} + \Sigma q_{ki} = 0$$

و چون :

$$Q_{ki} = \Sigma q_{ki}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\Sigma F_{ki} = 0$$

که همان رابطه (VI-4) میباشد .

۷ = تعیین مقدار نیروهای کناره

نیروی گرهی مؤثر در گرهی را که روی لبه آزاد دال واقع می‌باشد « نیروی کناره » خواهیم نامید. برای تعیین مقدار این نیروها میتوان فرمولهای کلی محاسبه نیروهای گرهی را مورد استفاده قرار داد ولی باید شرایط مخصوص باین حالت خاص در نظر گرفته شود.

در این حالت لبه دال را مانند یک لولای گسیختگی در نظر میگیریم که لنگر مقاوم m روی آن مساوی صفر می‌باشد.

علاوه بر این فرض مینمائیم که دال سمت بوده ولی از لبه بآنطرف یعنی در منطقه (III) لنگر مقاوم روی تمام امتدادها یکسان و مساوی صفر می‌باشد. این فرض در آنچه که بطرز کار و رفتار دال مربوط میشود تغییری ایجاد نمینماید ولی امکان میدهد که با سهولت بیشتری استدلال نمائیم. از ثابت بودن لنگر مقاوم در منطقه (III) نتیجه میشود:

$$\frac{dm_1}{d\alpha_3} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dm_2}{d\alpha_3} = 0$$

و با توجه به شکل (VII—VII) میتوان نوشت:

$$\frac{dm_3}{d\alpha_1} = \frac{dm}{d\alpha}$$

و:

$$\frac{dm_3}{d\alpha_2} = \frac{dm}{d(\pi - \alpha)} = - \frac{dm}{d\alpha}$$

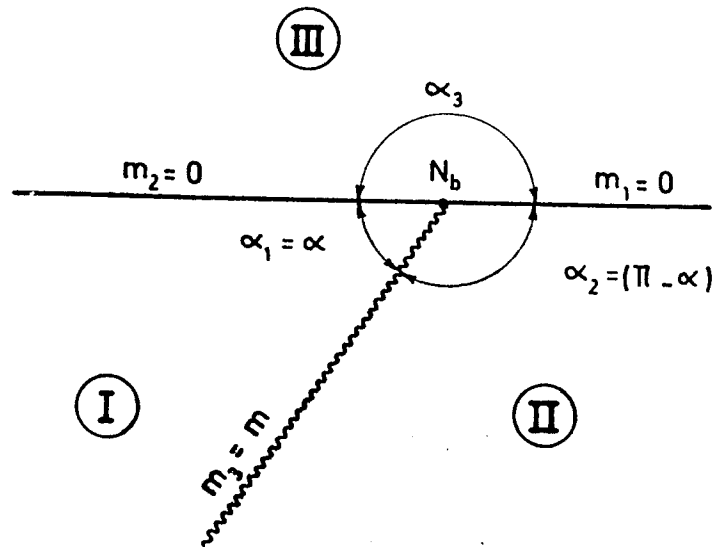


Fig (VII - VII)

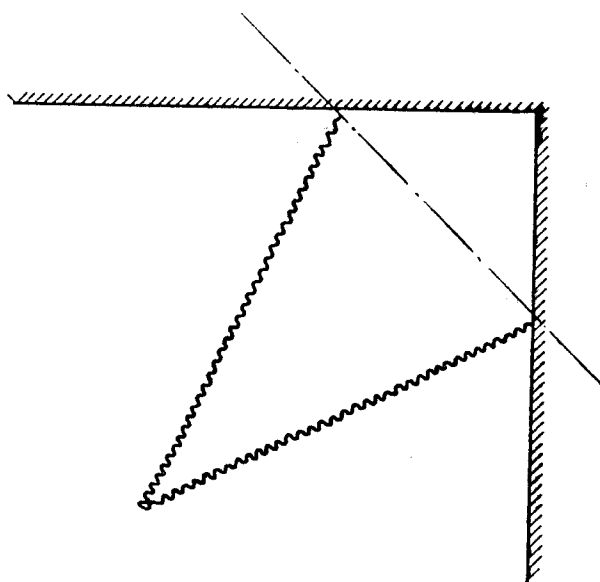
با در نظر گرفتن این روابط و با استفاده از فرمولهای کلی نیروهای گرهی خواهیم داشت :

$$(VII-9) \quad \begin{cases} F_{b1} = -m \cot \alpha + \frac{dm}{d\alpha} \\ F_{b2} = +m \cot \alpha - \frac{dm}{d\alpha} \end{cases}$$

نیروی F_{b3} باید مساوی صفر باشد زیرا با توجه باینکه دال عملاً ممتد نیست این نیرو نمیتواند مقداری جز صفر داشته باشد. بعلاوه ملاحظه میشود که $F_{b1} + F_{b2} = 0$ و چون ΣF_{bi} نیز باید مساوی صفر باشد لذا F_{b3} اجباراً مساوی صفر خواهد بود.

ملاحظات :

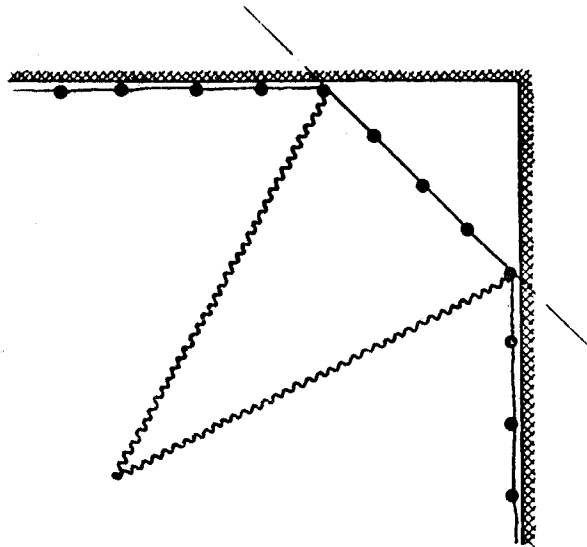
الف - فرمولهای کلی درحالتی که لولای گسیختگی به لبه‌ای با اتکاء ساده منتهی میشود نیز قابل استفاده میباشد، شکل (VII - VIII) ، (بلند شدن گوشه از روی تکیه گاه) . در این حالت برای نیروهای گرهی همان روابط نیروهای کناره را باضافه یک جمله مکمل بدست خواهیم آورد . این جمله اضافی نشان دهنده اثر عکس العمل تکیه گاه میباشد.



Dalle simplement appuyée

Fig(VII - VIII) دال با تکیه گاه ساده

ب - در صورتیکه دال روی تکیه گاه گیردار باشد ، شکل (VII - IX) ، برای گرهی که روی خط تکیه گاه واقع باشد میتوان فرمولهای کلی را بکار برد مشروط براینکه عکس العمل تکیه گاه را در نظر بگیریم .



Dalle encastrée دال باتکیه گاه گیر دال

Fig (VII - IX)

ج - درحالت خاص یک دال ایزوترپ که برای آن $\frac{dm}{d\alpha} = 0$ میباشد روابط نیروهای کناره بصورت

زیر درمیآید :

$$(VII-10) \quad \begin{cases} F_{b1 iso.} = -m \cotg \alpha \\ F_{b2 iso.} = +m \cotg \alpha \end{cases}$$

این روابط همان فرمولهائی هستند که خود پروفیسور ژوهانسن ارائه داده است .

۸ - تنظیم فرمولهای محاسبه نیروهای گرهی برای دالهایی که با

دوسفره آرماتورهای عمود برهم آرمه شده اند

در عمل اغلب دالها با دوسفره آرماتور که میلگردهای آنها باهم زاویه φ درجه میسازند آرمه میشوند . یک چنین دالی را در نظر گرفته و امتداد آرماتورها را بعنوان امتداد محورهای مختصات انتخاب مینمائیم . فرض مینمائیم لنگر مقاوم اصلی در واحد طول مقطعی عمود بر محور y ها مساوی M_1 و روی مقطعی عمود بر محور x ها مساوی $M_2 = \lambda M_1$ باشد .

حال با در نظر گرفتن فرض فوق گرهی مرکب از سه لولای گسیختگی را که مبنای کار برای تنظیم فرمولهای کلی قرار گرفت مورد مطالعه قرار میدهیم .

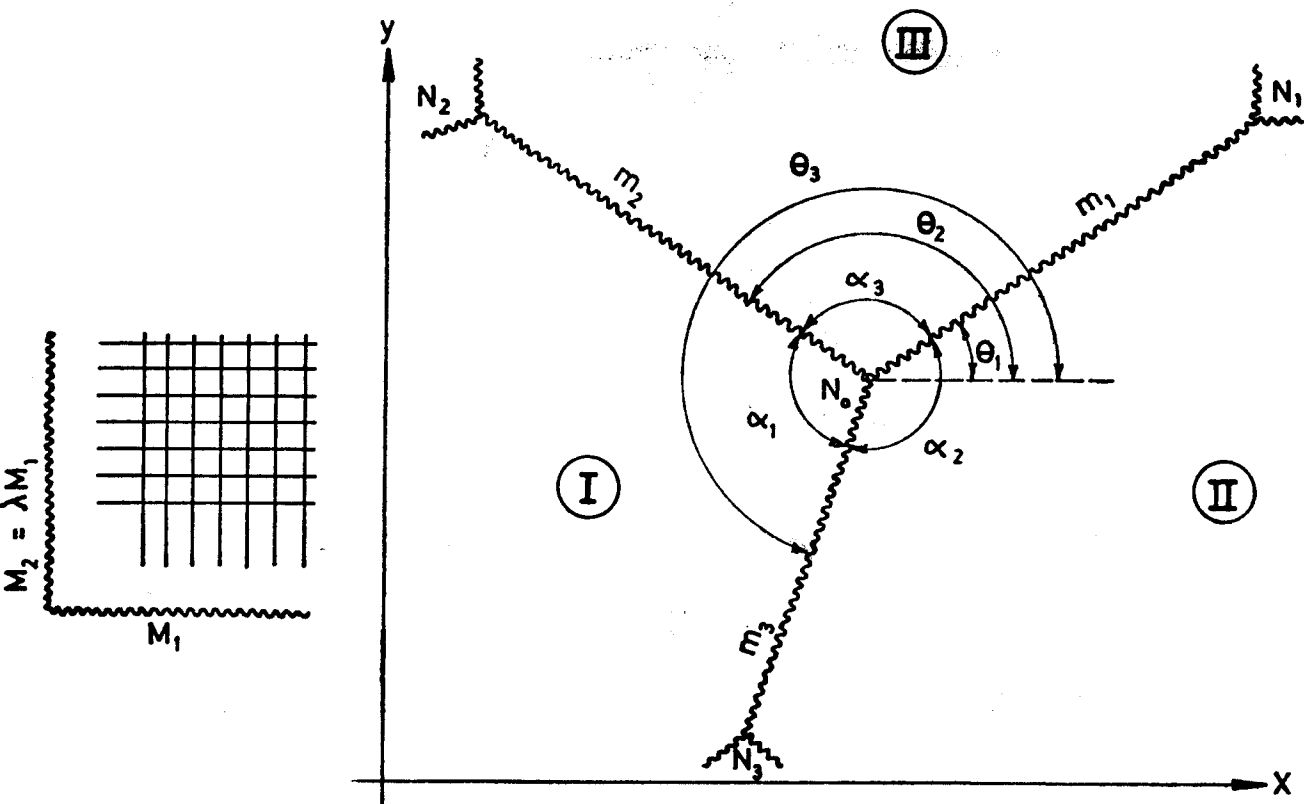


Fig (VIII - X)

مطابق فرمولهای پیشنهادی پروفیسور ژوهانسن میتوان لنگرهای m_3, m_2, m_1 را برحسب

لنگرهای اصلی مشخص نمود :

$$(VIII - 11) \quad \begin{cases} m_1 = M_1 (\cos^2 \theta_1 + \lambda \sin^2 \theta_1) \\ m_2 = M_1 (\cos^2 \theta_2 + \lambda \sin^2 \theta_2) \\ m_3 = M_1 (\cos^2 \theta_3 + \lambda \sin^2 \theta_3) \end{cases}$$

حال میتوان جملات $\frac{dm_j}{d\alpha_i}$ را نیز برحسب M_2, M_1 مشخص نمود . مطابق شکل (VIII-X)

میتوان نوشت :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 - \alpha_3 \\ \theta_1 = \theta_3 - 2\pi + \alpha_2 \\ \theta_2 = \theta_3 - \alpha_1 \\ \theta_2 = \theta_1 + \alpha_3 \\ \theta_3 = \theta_2 + \alpha_1 \\ \theta_3 = \theta_1 - \alpha_2 + 2\pi \end{cases}$$

از آنجا :

$$m_1 = M_1 [\text{Cos}^2(\theta_2 - \alpha_3) + \lambda \text{Sin}^2(\theta_2 - \alpha_3)]$$

و :

$$\frac{dm_1}{d\alpha_3} = M_1 [2\text{Sin}(\theta_2 - \alpha_3)\text{Cos}(\theta_2 - \alpha_3) - 2\lambda \text{Sin}(\theta_2 - \alpha_3)\text{Cos}(\theta_2 - \alpha_3)]$$

$$\frac{dm_1}{d\alpha_3} = 2M_1(1 - \lambda)\text{Sin}(\theta_2 - \alpha_3)\text{Cos}(\theta_2 - \alpha_3)$$

و بالاخره :

(VIII-12)

$$\frac{dm_1}{d\alpha_3} = 2M_1(1 - \lambda)\text{Sin}\theta_1\text{Cos}\theta_1$$

همچنین :

$$m_1 = M_1 [\text{Cos}^2(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2) + \lambda \text{Sin}^2(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2)]$$

$$\frac{dm_1}{d\alpha_2} = M_1 [-2\text{Sin}(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2)\text{Cos}(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2) + 2\lambda \text{Sin}(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2)\text{Cos}(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2)]$$

(VIII-13)

$$\frac{dm_1}{d\alpha_2} = -2M_1(1 - \lambda)\text{Sin}\theta_1\text{Cos}\theta_1$$

به همین ترتیب میتوان نوشت :

$$m_2 = M_1 [\text{Cos}^2(\theta_3 - \alpha_1) + \lambda \text{Sin}^2(\theta_3 - \alpha_1)]$$

(VIII-14)

$$\frac{dm_2}{d\alpha_1} = 2M_1(1 - \lambda)\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2$$

$$m_2 = M_1 [\text{Cos}^2(\theta_1 + \alpha_3) + \lambda \text{Sin}^2(\theta_1 + \alpha_3)]$$

(VIII-15)

$$\frac{dm_2}{d\alpha_3} = -2M_1(1 - \lambda)\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2$$

$$m_3 = M_1 [\text{Cos}^2(\theta_2 + \alpha_1) + \lambda \text{Sin}^2(\theta_2 + \alpha_1)]$$

(VIII-16)

$$\frac{dm_3}{d\alpha_1} = -2M_1(1 - \lambda)\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3$$

$$m_3 = M_1 [\text{Cos}^2(\theta_6 - \alpha_2 + 2\pi) + \lambda \text{Sin}^2(\theta_1 - \alpha_2 + 2\pi)]$$

(VIII-17)

$$\frac{dm_3}{d\alpha_2} = 2M_1(1-\lambda)\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3$$

از سوی دیگر روی شکل (VIII-X) ملاحظه میشود :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \theta_3 - \theta_2 \\ \alpha_2 = \theta_1 - \theta_3 + 2\pi \\ \alpha_3 = \theta_2 - \theta_1 \end{cases}$$

از وارد کردن تمام این مقادیر در فرمولهای کلی نتیجه میشود :

$$F_1 = M_1 [(\text{Cos}^2\theta_2 + \lambda \text{Sin}^2\theta_2 - \text{Cos}^2\theta_1 - \lambda \text{Sin}^2\theta_1) \text{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) + \\ + (\text{Cos}^2\theta_3 + \lambda \text{Sin}^2\theta_3 - \text{Cos}^2\theta_1 - \lambda \text{Sin}^2\theta_1) \text{Cotg}(\theta_1 - \theta_3 + 2\pi) - \\ - 2(1-\lambda)\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3 + 2(1-\lambda)\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2]$$

$$F_1 = M_1 [(1 - \text{Sin}^2\theta_2 + \lambda \text{Sin}^2\theta_2 - 1 + \text{Sin}^2\theta_1 - \lambda \text{Sin}^2\theta_1) \text{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) + \\ + (1 - \text{Sin}^2\theta_3 + \lambda \text{Sin}^2\theta_3 - 1 + \text{Sin}^2\theta_1 - \lambda \text{Sin}^2\theta_1) \text{Cotg}(\theta_1 - \theta_3) - \\ - 2(1-\lambda)\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3 + 2(1-\lambda)\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2]$$

(VIII-18)

$$F_1 = M_1(1-\lambda) [(\text{Sin}^2\theta_1 - \text{Sin}^2\theta_2) \text{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) + \\ + (\text{Sin}^2\theta_1 - \text{Sin}^2\theta_3) \text{Cotg}(\theta_1 - \theta_3) + 2\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2 - 2\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3]$$

و بهمین ترتیب :

(VIII-19)

$$F_2 = M_1(1-\lambda) [(\text{Sin}^2\theta_2 - \text{Sin}^2\theta_3) \text{Cotg}(\theta_3 - \theta_2) + \\ + (\text{Sin}^2\theta_2 - \text{Sin}^2\theta_1) \text{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) + 2\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3 - 2\text{Sin}\theta_1\text{Cos}\theta_1]$$

(VIII-20)

$$F_3 = M_1(1-\lambda) [(\text{Sin}^2\theta_3 - \text{Sin}^2\theta_1) \text{Cotg}(\theta_1 - \theta_3) + \\ + (\text{Sin}^2\theta_3 - \text{Sin}^2\theta_2) \text{Cotg}(\theta_3 - \theta_2) + 2\text{Sin}\theta_1\text{Cos}\theta_1 - 2\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2]$$

در مورد نیروهای کناره نیز بهمین ترتیب میتوان استدلال نمود . ثابت کردیم که :

$$F_{b1} = -F_{b2} = -m \text{Cotg}\alpha + \frac{dm}{d\alpha}$$

اگر لبه دال با محور x ها زاویه β بسازد مطابق شکل (VIII-XI) خواهیم داشت :

$$\theta = \alpha + \beta$$

وبا دانستن اینکه :

$$m = M_1(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta)$$

می‌توانیم به ترتیب بنویسیم :

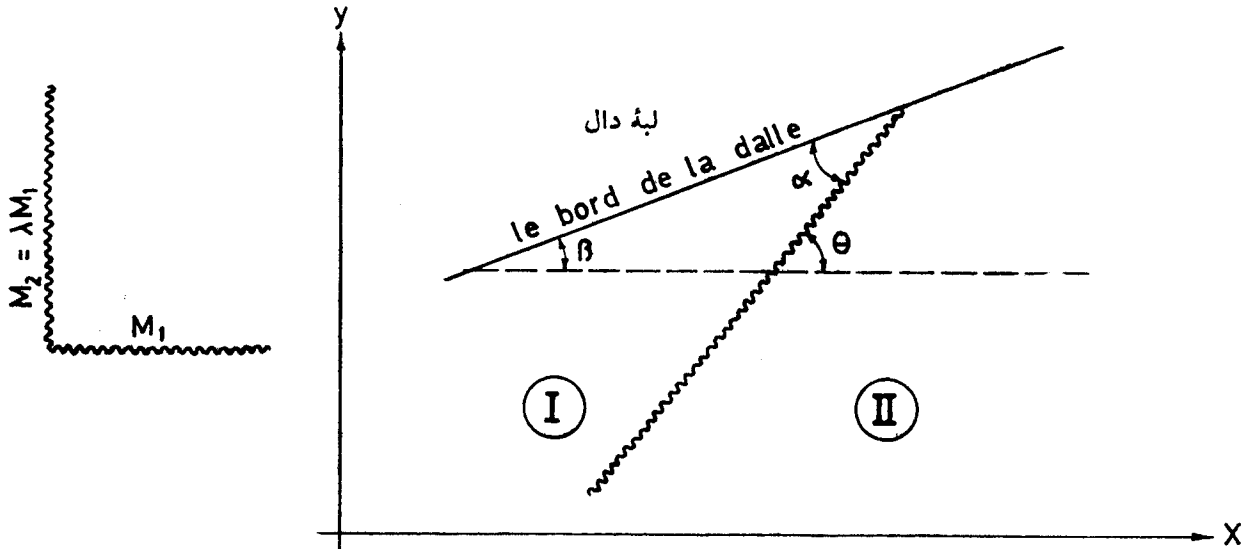


Fig (VIII - XI)

$$m = M_1[\cos^2(\alpha + \beta) + \lambda\sin^2(\alpha + \beta)]$$

$$\frac{dm}{d\alpha} = M_1[-2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + 2\lambda\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)]$$

(VIII-21)

$$\frac{dm}{d\alpha} = -2M_1(1-\lambda)\sin\theta\cos\theta$$

و از آنجا :

$$(VIII-22) \quad F_{b1} = -F_{b2} = -M_1(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta)\cotg(\theta - \beta) - 2M_1(1-\lambda)\sin\theta\cos\theta$$

اگر $\beta = 0$ باشد فرمول فوق بصورت زیر نوشته میشود :

$$F_{b1} = -F_{b2} = -M_1(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta + 2\sin^2\theta - 2\lambda\sin^2\theta)\cotg\theta$$

$$(VIII-23) \quad F_{b1} = -F_{b2} = -M_1[1 + (1-\lambda)\sin^2\theta]$$

و اگر $\beta = 90^\circ$ فرض شود، با توجه به اینکه $\text{Cotg}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\text{tg}\theta$ فرمول بصورت زیر درمیآید:

$$F_{b1} = -F_{b2} = -M_1(-\text{Cos}^2\theta - \lambda\text{Sin}^2\theta + 2\text{Cos}^2\theta - 2\lambda\text{Cos}^2\theta)\text{tg}\theta$$

$$(VIII-24) \quad F_{b1} = -F_{b2} = -M_1[-\lambda + (1-\lambda)\text{Cos}^2\theta]\text{tg}\theta$$

۹- مثال

یک دال بتنی مربع شکل که با دوسفره آرماتورهای عمودبرهم و موازی با لبه‌ها آرمه شده در نظر میگیریم. این دال روی چهارگوشه خود اتکاء داشته و مطابق شکل (IX-XII) تحت اثر چهاربارمترکز Q قرار گرفته است.

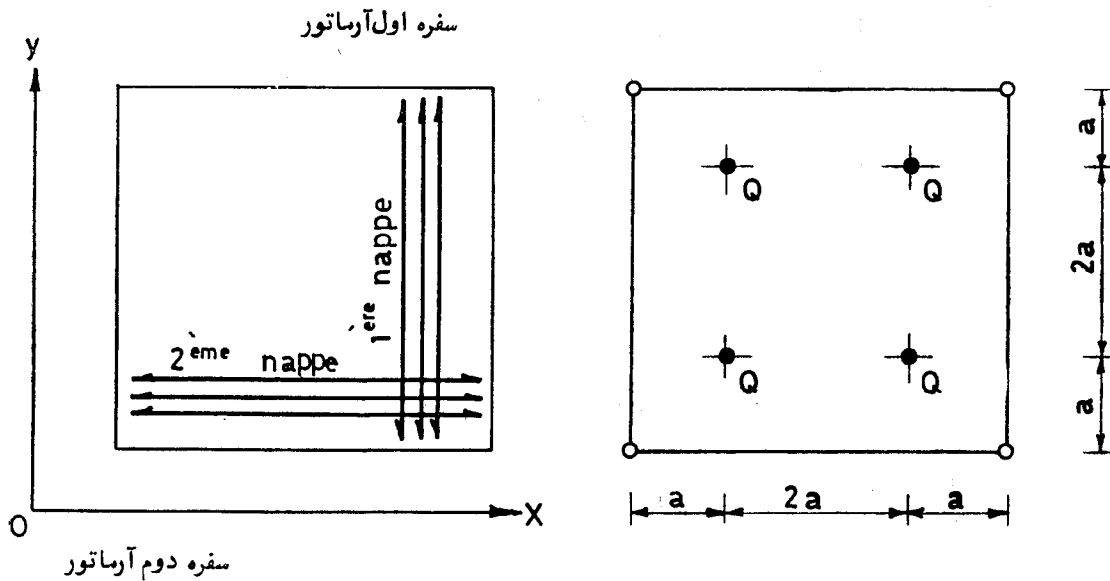


Fig (IX - XII)

فرض کنیم $M_1 > M_2$ باشد (ممکن است اختلاف بین M_1 , M_2 ناشی از اختلاف ارتفاع مفید دوسفره آرماتور یا اختلاف بین مقاطع عرضی میلگردهای آندو باشد) . در اینحالت شمای گسیختگی بصورتی که در شکل (IX-XIII) نموده شده است خواهد بود .

موقعیت لولای AB بوسیله نقاط اثر A , B بارهای متمرکز مشخص میشود و موقعیت دولولای AD , AE را میتوان به کمک دو پارامتر θ_1 , θ_2 معلوم نمود .

حال باید سعی کنیم مقادیر واقعی این پارامترها را بدست بیاوریم . برای اینکار ابتدا از روش کارهای مجازی و سپس از روش تعادل استفاده خواهیم نمود .

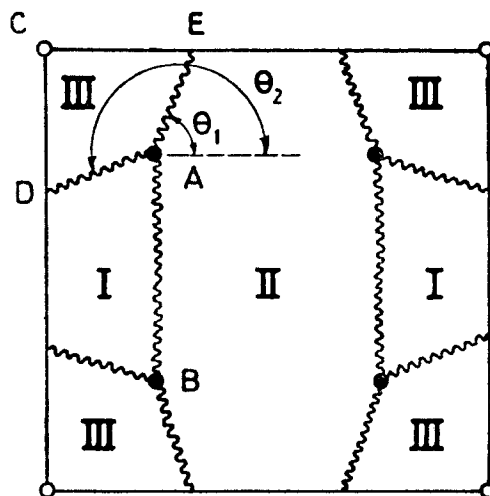


Fig (IX - XIII)

۹.۱ - روش کارهای مجازی

در یک تغییر مکان مجازی نقاط اثر بارها ، دوران قطعه دال (I) حول محوری موازی محور OY انجام میپذیرد (بدلیل تقارن). قطعه دال (II) دوران نمینماید یا بعبارت دیگر محور دوران آن درینهایت قرار دارد و محور دوران قطعه دال (III) از نقطه اتکاء میگذرد .
 با توجه باین نکته که لولای گسیختگی واقع بین دو قطعه دال مجاور باید از نقطه تلاقی محورهای دوران آندو بگذرد و با در نظر گرفتن اینکه محور دوران قطعه دال (II) درینهایت واقع میباشد ، نتیجه میگیریم که خط GH باید با AE موازی باشد . شکل (IX - XIV) .
 فرض کنیم تغییر مکان نقاط اثر بارها مساوی واحد باشد . با توجه بمطالب فوق تغییر مکان نقطه E برابر خواهد بود با :

$$\delta E = 1$$

و از آنجا :

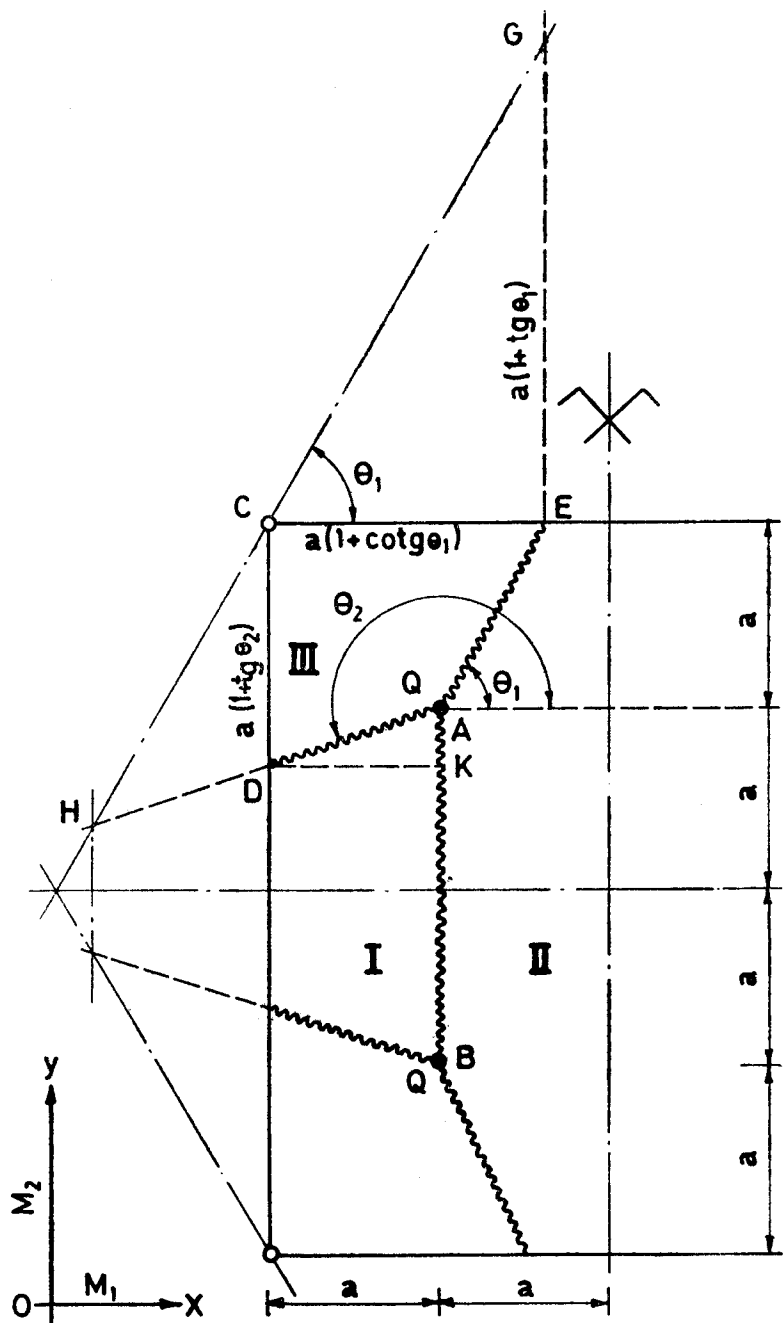
$$\varphi_{x3} = \frac{1}{GE} = \frac{1}{a(1 + \text{tg}\theta_1)}$$

و :

$$\varphi_{y3} = \frac{1}{CE} = \frac{1}{a(1 + \text{Cotg}\theta_1)} = \frac{\text{tg}\theta_1}{a(1 + \text{tg}\theta_1)}$$

با در دست داشتن φ_{x3} تعیین تغییر مکان نقطه D بسهولت میسر میباشد .

$$\delta D = \delta E \cdot \frac{CD}{GE} = 1 \cdot \frac{a(1 + \text{tg}\theta_2)}{a(1 + \text{tg}\theta_1)}$$



Fig(IX-XIV)

و بالاخره :

$$\delta D = \frac{1 + \operatorname{tg} \theta_2}{1 + \operatorname{tg} \theta_1}$$

با معلوم شدن δD میتوانیم φ_{yx} را بدست بیاوریم :

$$\varphi_{y1} = \frac{\delta K - \delta D}{DK} = \frac{1 - \frac{1 + \operatorname{tg}\theta_2}{1 + \operatorname{tg}\theta_1}}{a}$$

$$\varphi_{y1} = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)}$$

البته روشن است که :

$$\varphi_{x1} = \varphi_{x2} = \varphi_{y2} = 0$$

ما اکنون تمام عوامل لازم برای تنظیم معادله کار مجازی را در اختیار داریم و میتوانیم بنویسیم

(برای یک چهارم دال) :

$$Q \cdot 1 = a(1 - \operatorname{tg}\theta_2)M_2 \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)} + a(1 + \operatorname{Cotg}\theta_1)M_1 \frac{1}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)} +$$

$$+ a(1 + \operatorname{tg}\theta_2)M_2 \frac{\operatorname{tg}\theta_2}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)}$$

و از آنجا :

$$\frac{Q}{M_1} = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}^2\theta_2 + \operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 \lambda + \operatorname{Cotg}\theta_1}{1 + \operatorname{tg}\theta_1}$$

$$\frac{Q}{M_1} = \frac{2\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}^2\theta_2 \lambda + \operatorname{Cotg}\theta_1}{1 + \operatorname{tg}\theta_1}$$

و :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{Q}{M_1} \right) = \frac{-\frac{1}{\operatorname{Cos}^2\theta_2} + 2\operatorname{tg}\theta_2 \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\theta_2} \lambda}{1 + \operatorname{tg}\theta_1} = 0$$

و یا :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{Q}{M_1} \right) = \frac{(1 - 2\operatorname{tg}\theta_2) \frac{-\lambda}{\operatorname{Cos}^2\theta_2}}{1 + \operatorname{tg}\theta_1} = 0$$

نظرباینکه $\lambda \neq 0$, $\operatorname{Cos}^2\theta_2 \neq 0$, $1 + \operatorname{tg}\theta_1 \neq \infty$, میباشد ، میتوانیم بنویسیم :

$$1 - 2\operatorname{tg}\theta_2 = 0$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{1}{2}$$

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

و مطابق شکل (IX-XIV) :

$$\theta_2 = \pi + \text{Arctg} \frac{1}{2}$$

همچنین :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{Q}{M_1} \right) = \frac{(1 + \text{tg} \theta_1) \frac{2}{\text{Cos}^2 \theta_1} - (2 \text{tg} \theta_1 - \text{tg} \theta_2 + \text{tg}^2 \theta_2) \frac{1}{\text{Cos}^2 \theta_1}}{(1 + \text{tg} \theta_1)^2} \lambda + \frac{-\frac{1}{\text{Cos}^2 \theta_1}}{\text{tg}^2 \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{Q}{M_1} \right) = \frac{(2 + \text{tg} \theta_2 - 2 \text{tg}^2 \theta_2) \lambda}{(1 + \text{tg} \theta_1)^2} - \frac{1}{\text{tg}^2 \theta_1} = 0$$

حال اگر بجای $\text{tg} \theta_2$ مقدار آن $\frac{1}{2}$ را قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{\frac{9}{4} \lambda}{(1 + \text{tg} \theta_1)^2} = \frac{1}{\text{tg}^2 \theta_1} = \text{Cotg}^2 \theta_1$$

$$2.25 \lambda = (\text{Cotg} \theta_1 + 1)^2 = (\text{Cotg}^2 \theta_1 + 2 \text{Cotg} \theta_1 + 1)$$

$$\text{Cotg}^2 \theta_1 + 2 \text{Cotg} \theta_1 + 1 - 2.25 \lambda = 0$$

$$\text{Cotg} \theta_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 1 + 2.25 \lambda}}{1}$$

$$\text{Cotg} \theta_1 = 1.5 \sqrt{\lambda} - 1$$

$$\theta_1 = \text{Arc Cotg} (1.5 \sqrt{\lambda} - 1)$$

حال برای محاسبه بار گسیختگی کفبست مقادیر θ_1 ، θ_2 را در معادله کار مجازی وارد نمائیم :

$$\frac{Q}{M_1} = \frac{\left(\frac{2}{1.5 \sqrt{\lambda} - 1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \lambda}{1 + \frac{1}{1.5 \sqrt{\lambda} - 1}} + 1.5 \sqrt{\lambda} - 1$$

$$\frac{Q}{M_1} = \frac{2 - \frac{1.5 \sqrt{\lambda}}{4} + \frac{1}{4}}{1.5 \sqrt{\lambda} - 1 + 1} \lambda + 1.5 \sqrt{\lambda} - 1$$

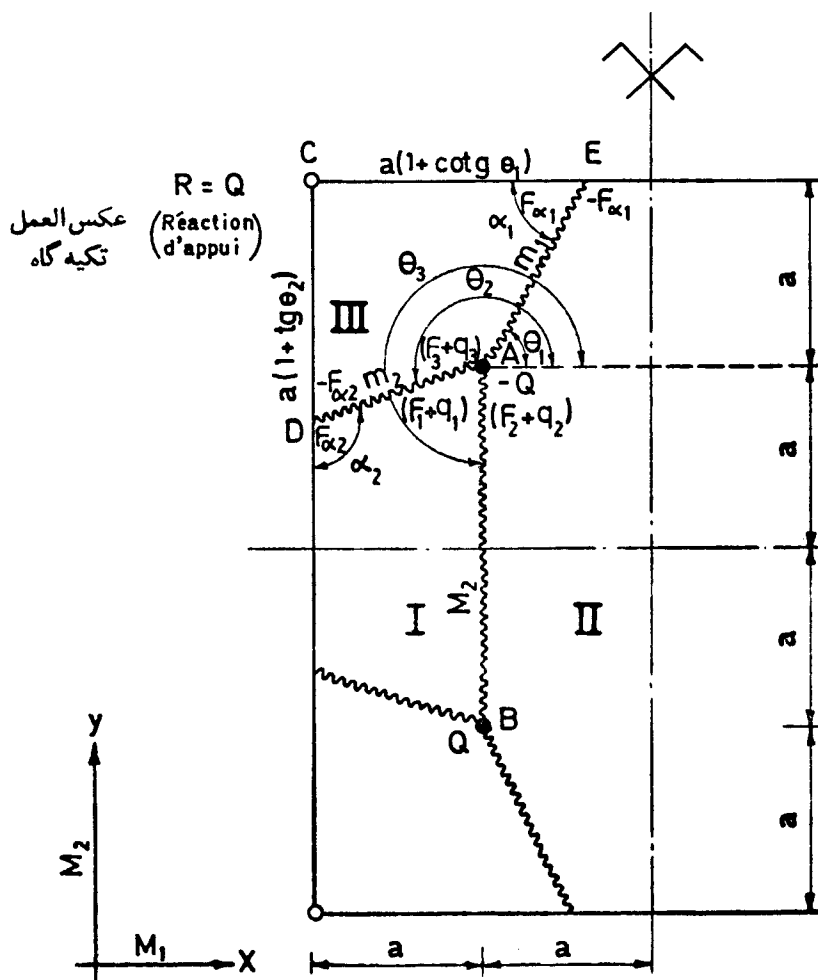
$$\frac{Q}{M_1} = 1.5 \sqrt{\lambda} - 0.25 \lambda + 1.5 \sqrt{\lambda} - 1$$

$$Q = (-0.25\lambda + 3\sqrt{\lambda} - 1)M_1$$

۹.۲ - روش تعادل

برای استفاده از این روش باید قبل از هر چیز نیروهای کناره و نیروهای گرهی را محاسبه نمود .
 مطابق شکل (IX - XV) در نقطه E داریم $\beta = 0^\circ$ ، $\alpha = \theta = \theta_1$ و میتوانیم فرمول (VIII - 23) را بکار
 ببریم که از آن نتیجه میشود :

$$F_{\alpha_1} = -M_1 \cot \theta_1 [1 + (1 - \lambda) \sin^2 \theta_1]$$



Fig(IV-XV)

همچنین در نقطه D داریم :

$$\beta = 90^\circ$$

$$\theta = \theta_2$$

$$\alpha_2 = \theta_2 - \frac{\pi}{2}$$

و میتوانیم فرمول (VIII-24) را بکار ببریم :

$$F_{\alpha_2} = -M_1 \operatorname{tg} \theta_2 [-\lambda + (1 - \lambda) \operatorname{Cos}^2 \theta_2]$$

از سوی دیگر بدلیل تقارن داریم :

$$\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$$

در نتیجه :

$$\operatorname{Sin} \theta_3 = -1$$

$$\operatorname{Cos} \theta_3 = 0$$

$$\operatorname{Cotg} \theta_3 = 0$$

و از کاربرد فرمولهای (VI-5) , (VI-6) , (VI-7) نتیجه میشود :

$$\left\{ \begin{aligned} F_1 &= M_1(1 - \lambda)[(\operatorname{Sin}^2 \theta_1 - \operatorname{Sin}^2 \theta_2) \operatorname{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) + \\ &\quad + (\operatorname{Sin}^2 \theta_1 - 1) \operatorname{Cotg} \left(\theta_1 - \frac{3\pi}{4} \right) + 2 \operatorname{Sin} \theta_2 \operatorname{Cos} \theta_2] \\ F_2 &= M_1(1 - \lambda)[(\operatorname{Sin}^2 \theta_2 - 1) \operatorname{Cotg} \left(\frac{3\pi}{4} - \theta_2 \right) + \\ &\quad + (\operatorname{Sin}^2 \theta_2 - \operatorname{Sin}^2 \theta_1) \operatorname{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) - 2 \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Cos} \theta_1] \\ F_3 &= M_1(1 - \lambda)[(1 - \operatorname{Sin}^2 \theta_1) \operatorname{Cotg} \left(\theta_1 - \frac{3\pi}{4} \right) + \\ &\quad + (1 - \operatorname{Sin}^2 \theta_2) \operatorname{Cotg} \left(\frac{3\pi}{4} - \theta_2 \right) - 2 \operatorname{Sin} \theta_2 \operatorname{Cos} \theta_2 + \\ &\quad + 2 \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Cos} \theta_1 \end{aligned} \right.$$

از آنجا :

$$\left\{ \begin{aligned} F_1 &= M_1(1 - \lambda)[(\operatorname{Sin}^2 \theta_1 - \operatorname{Sin}^2 \theta_2) \operatorname{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) - \operatorname{Cos}^2 \theta_1 (-\operatorname{tg} \theta_1) + 2 \operatorname{Sin} \theta_2 \operatorname{Cos} \theta_2] \\ F_2 &= M_1(1 - \lambda)[- \operatorname{Cos}^2 \theta_2 \operatorname{tg} \theta_2 + (\operatorname{Sin}^2 \theta_2 - \operatorname{Sin}^2 \theta_1) \operatorname{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) - 2 \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Cos} \theta_1] \\ F_3 &= M_1(1 - \lambda)[\operatorname{Cos}^2 \theta_1 (-\operatorname{tg} \theta_1) + \operatorname{Cos}^2 \theta_2 \operatorname{tg} \theta_2 - 2 \operatorname{Sin} \theta_2 \operatorname{Cos} \theta_2 + 2 \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Cos} \theta_1] \end{aligned} \right.$$

ویا :

$$\begin{cases} F_1 = M_1(1 - \lambda)[(\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2)\cotg(\theta_2 - \theta_1) + \sin\theta_1\cos\theta_1 + 2\sin\theta_2\cos\theta_2] \\ F_2 = M_1(1 - \lambda)[(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1)\cotg(\theta_2 - \theta_1) - 2\sin\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_2] \\ F_3 = M_1(1 - \lambda)[\sin\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_2] \end{cases}$$

وقتی که نیروهای گرهی و نیروهای کناره محاسبه گردید میتوانیم با مطالعه تعادل قطعه دالهای مختلف تعداد لازم معادله برای تعیین پارامترها و بارگسیختگی تنظیم نمائیم :

$$\begin{cases} (1) \text{ (قطعه دال (I) ، لنگر نسبت به AB)} & M_2 - m_2\text{tg}\theta_2 - F_{\alpha_2} = 0 \\ (2) \text{ (قطعه دال (III) ، لنگر نسبت به DC)} & m_1 - m_2\text{tg}\theta_2 + F_{\alpha_1}(1 + \cotg\theta_1) + (F_3 + q_3 - q_3) = 0 \\ (3) \text{ (قطعه دال (III) ، لنگر نسبت به CE)} & m_1\cotg\theta_1 + m_2 - F_{\alpha_2}(1 + \text{tg}\theta_2) + (F_3 + q_3 - q_3) = 0 \\ (4) \text{ (تعادل نیروهای قطعه دال (III))} & R - F_{\alpha_2} + F_{\alpha_1} + (F_3 + q_3 - q_3) = 0 \end{cases}$$

از رابطه (1) نتیجه میشود :

$$\lambda M_1 - M_1(\cos^2\theta_2 + \lambda \sin^2\theta_2)\text{tg}\theta_2 + M_1\text{tg}\theta_2[-\lambda + (1 - \lambda)\cos^2\theta_2] = 0$$

$$\lambda - \text{tg}\theta_2(\cos^2\theta_2 + \lambda \sin^2\theta_2 + \lambda - \cos^2\theta_2 + \lambda \cos^2\theta_2) = 0$$

$$\lambda - \text{tg}\theta_2(\lambda + \lambda) = \lambda - 2\lambda\text{tg}\theta_2 = 0$$

$$\text{tg}\theta_2 = \frac{1}{2}$$

پس :

$$\theta_2 = \arctg \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad \cos\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

و مطابق شکل :

$$\theta_2 = \pi + \text{Arctg} \frac{1}{2}$$

حال روابط (2) ، (3) را در نظر میگیریم :

$$(2) \quad \left\{ m_1 + \frac{m_2}{2} + F_{\alpha_1}(1 + \cotg\theta_1) + (F_3 + q_3 - q_3) = 0 \right.$$

$$(3) \quad \left\{ m_1\cotg\theta_1 + m_2 - F_{\alpha_2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + (F_3 + q_3 - q_3) = 0 \right.$$

اگر رابطه (3) را از رابطه (2) کم کنیم خواهیم داشت :

$$m_1(1 - \text{Cotg}\theta_1) - \frac{m_2}{2} + F_{\alpha_1}(1 + \text{Cotg}\theta_1) + 1.5F_{\alpha_2} = 0$$

حال اگر بجای m_1 , m_2 , F_{α_1} , F_{α_2} مقادیر آنها را قرار داده و $\text{tg}\theta_2$ را نیز با $\frac{1}{2}$ جانشین

نمائیم به ترتیب میتوانیم بنویسیم :

$$M_1(\text{Cos}^2\theta_1 + \lambda\text{Sin}^2\theta_1)(1 - \text{Cotg}\theta_1) - \frac{M_1}{2}\left(\frac{4}{5} + \frac{\lambda}{5}\right) -$$

$$-M_1\text{Cotg}\theta_1[1 + (1 - \lambda)\text{Sin}^2\theta_1](1 + \text{Cotg}\theta_1) - 0.75M_1\left[-\lambda + \frac{4}{5}(1 - \lambda)\right] = 0$$

$$\text{Cotg}^2\theta_1[1 + (1 - \lambda)\text{Sin}^2\theta_1] + \text{Cotg}\theta_1[\text{Cos}^2\theta_1 + \lambda\text{Sin}^2\theta_1 + 1 + \text{Sin}^2\theta_1 -$$

$$-\lambda\text{Sin}^2\theta_1] + [-\text{Cos}^2\theta_1 - \lambda\text{Sin}^2\theta_1 + 0.4 + 0.1\lambda - 0.75\lambda + 0.6 - 0.6\lambda] = 0$$

$$\text{Cotg}^2\theta_1[1 + (1 - \lambda)\text{Sin}^2\theta_1] + 2\text{Cotg}\theta_1 + [(1 - \lambda)\text{Sin}^2\theta_1 - 1.25\lambda] = 0$$

$$\text{Cotg}^2\theta_1 + 2\text{Cotg}\theta_1 + (1 - \lambda)\text{Cos}^2\theta_1 + (1 - \lambda)\text{Sin}^2\theta_1 - 1.25\lambda = 0$$

$$\text{Cotg}^2\theta_1 + 2\text{Cotg}\theta_1 + 1 - \lambda - 1.25\lambda = 0$$

$$\text{Cotg}\theta_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 1 + 2.25\lambda}}{1}$$

$$\text{Cotg}\theta_1 = 1.5\lambda - 1$$

بنابراین :

$$\theta_1 = \text{Arc Cotg}(1.5\lambda - 1)$$

با معلوم شدن θ_1 میتوانیم براحتی بارگسیختگی را محاسبه نماییم . از روابط (3) , (4) نتیجه میشود :

$$Q = R = F_{\alpha_2} - F_{\alpha_1} + m_1\text{Cotg}\theta_1 + m_2 - F_{\alpha_2} - F_{\alpha_2}\text{tg}\theta_2$$

با قراردادن مقادیر m_1 , m_2 , F_{α_1} , F_{α_2} بجای آنها میتوان Q را متوالیاً بصورت‌های زیر نوشت :

$$Q = M_1\text{Cotg}\theta_1[1 + (1 - \lambda)\text{Sin}^2\theta_1] + M_1\text{Cotg}\theta_1[\text{Cos}^2\theta_1 + \lambda\text{Sin}^2\theta_1] +$$

$$+ M_1(\text{Cos}^2\theta_2 + \lambda\text{Sin}^2\theta_2) + M_1\text{tg}^2\theta_2[-\lambda + (1 - \lambda)\text{Cos}^2\theta_2]$$

$$Q = M_1\text{Cotg}\theta_1[1 + \text{Sin}^2\theta_1 - \lambda\text{Sin}^2\theta_1 + \text{Cos}^2\theta_1 + \lambda\text{Sin}^2\theta_1] +$$

$$+ M_1[\text{Cos}^2\theta_2 + \lambda\text{Sin}^2\theta_2 - \lambda\text{tg}^2\theta_2 + \text{Sin}^2\theta_2 - \lambda\text{Sin}^2\theta_2]$$

$$Q = 2M_1\text{Cotg}\theta_1 + M_1(1 - \lambda\text{tg}^2\theta_2)$$

$$Q = 2M_1(1.5\sqrt{\lambda} - 1) + M_1\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)$$

$$Q = M_1(3\sqrt{\lambda} - 2 + 1 - 0.25\lambda)$$

$$Q = M_1(-0.25\lambda + 3\sqrt{\lambda} - 1)$$

بطوریکه ملاحظه میشود هر دو روش به نتیجه واحدی منجر میگردد .
 (برای ملاحظه تحقیق تجربی این مثال به بولتن شماره ۷ کمیته اروپائی بتن C.E.B. مراجعه شود) .

۱۰ = نتیجه

از آنچه که شرح داده شد نتیجه میشود که برای مطالعه مسائل مربوط به دالها میتوان بدلتخواه روش تعادل و یا روش کارهای مجازی را بکار برد و هیچ شرط خاصی برای استفاده از روش تعادل وجود ندارد . ولی باید توجه داشت که برای دالهای یک چشمه ساده ، روش کارهای مجازی ترجیح داده میشود زیرا نوشتن معادله کار نیروها منجر به حل سریع مسئله میگردد . اما در مورد دالهای یکسره با چشمه های متعدد ، تنظیم معادله کار طولانی بوده و زحمت زیادی را ایجاد مینماید در حالیکه مطالعه تعادل قطعه دالها اشکال خاصی ایجاد نمیکند . روی این اصل در این حالت استفاده از روش تعادل مزیت داشته و اجازه میدهد که سهولت معادلات لازم برای تعیین پارامترها را بدست بیاوریم . در مورد دالهای با چشمه های متعدد ممکن است تعداد معادلات لازم نسبتاً زیاد باشد . در اینصورت برای حل دستگاه معادلات استفاده از حسابگرهای الکترونیک ضرورت پیدا مینماید .

DETERMINATION DES FORCES NODALES DANS LE CALCUL A RUPTURE DES DALLES

par :

Mehdi GHALIBAFIAN

Docteur-Ingénieur

Ingénieur de la Faculté Technique de Téhéran
Assistant - Professeur à la Faculté Technique de Téhéran
Directeur du Laboratoire d'Essais des Matériaux

1- NOTATIONS, CONVENTIONS

1.1- Notations

- Q_k : Valeur absolue de la charge concentrée agissant dans le nœud N_k
- q_{ki} : Partie de la charge concentrée Q_k supportée par la partie de dalle (i)
- f_{kj} : Force nodale partielle agissant dans le nœud N_k et provient de la charnière $N_k N_j$
- F_{ki} : Force nodale agissant, dans le nœud N_k non chargé, sur la partie de dalle (i)
- \mathcal{F}_{ki} : Force nodale agissant, dans le nœud N_k chargé d'une charge concentrée Q_k , sur la partie de dalle (i)
- M_1 : Moment résistant par unité de longueur agissant sur une section perpendiculaire aux armatures de la première nappe
- M_2 : Moment résistant par unité de longueur agissant sur une section perpendiculaire aux armatures de la deuxième nappe

m_i : Moment résistant par unité de longueur agissant sur la charnière plastique faisant un angle θ_i avec la charnière sur laquelle s'exerce le moment résistant M_i

λ : Rapport entre les moment M_1 et M_2

$$M_2 = \lambda M_1$$

(nous avons considéré $\lambda < 1$)

θ_i : Angle que font entre elles une charnière plastique quelconque et la charnière sur laquelle s'exerce le moment M_i

α_i, β_i : Angles que font entre elles deux charnières plastiques ou un bord et une charnière

δ_x : Déplacement virtuel du point X

φ_{xi} : Rotation par rapport à l'axe des x de la partie de dalle (i)

φ_{yi} : Rotation par rapport à l'axe des y de la partie de dalle (i)




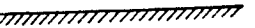
D'autres notations sont expliquées dans le texte



1.2- Conventions de Signe

1.21—Un moment fléchissant sera considéré comme positif s'il produit une traction à la partie inférieure de la dalle. Nous le représenterons par un vecteur orienté dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport à la partie de dalle considérée. La charnière plastique correspondante sera considérée comme une ligne de rupture positive.

1.22—Les charges concentrées et les forces nodales seront considérées comme positives si elles sont dirigées vers le haut, et négatives si elles sont dirigées vers le bas.

4.3- Conventions de dessin

	charnière plastique positive (les fibres inférieures de la dalle sont tendues)
	charnière plastique négative (les fibres supérieures de la dalle sont tendues)
	Bord libre
	Bord simplement appuyé

	Bord encastré
○	Point d'appui isolé
	Axe de rotation, axe de symétrie
●	Point d'application d'une charge concentrée dirigée vers le bas
-	Force nodale partielle dirigée vers le bas
+	Force nodale partielle dirigée vers le haut

2- INTRODUCTION

Depuis longtemps la théorie du Professeur JOHANSEN s'est révélée être le moyen le plus convenable pour résoudre les problèmes posés par la rupture des dalles en béton armé. C'est d'ailleurs, dans la majorité des cas, la seule solution que l'on puisse envisager.

Dans sa théorie dite «des Lignes de Rupture» le Professeur JOHANSEN a proposé deux méthodes de calcul : méthode des travaux virtuels et méthode d'équilibre, dont la première est utilisée plus fréquemment que l'autre, qui est pratiquement abandonnée. La raison en est que, dans la plupart des cas, la deuxième méthode conduit à des résultats inexacts. L'erreur vient du fait que, les formules établies pour évaluer les forces nodales ne sont pas en accord avec la réalité, et qu'il y manque des termes complémentaires.

Dans cet exposé, sera donné tout d'abord un court résumé de la théorie du Pr. JOHANSEN ; nous essayerons ensuite d'établir de nouvelles formules pour l'évaluation des forces nodales. L'exposé sera suivi d'un exemple pour montrer que les deux méthodes conduisent bien aux mêmes résultats.

3- THEORIE DU Pr. JOHANSEN

L'élaboration de la théorie des «Lignes de Rupture» par le Pr. JOHANSEN a été précédée de l'étude des résultats de différents essais de dalles en béton armé. En effet le Pr. JOHANSEN, en étudiant la façon dont ces dalles se sont rompues, a bien remarqué que la rupture survient le long de bandes étroites et quasi rectilignes dans lesquelles l'acier des armatures atteint sa limite d'élasticité. Il a également remarqué que l'épuisement de

capacité portante des dalles ne correspond pas à la formation partielle de ces bandes et que la charge peut être augmentée jusqu' à ce que la dalle se transforme en un « mécanisme » c'est-à-dire en un système déformable sans apparition de nouvelles bandes. En ce qui concerne la déformation, le Pr. JOHANSEN a constaté qu' elle se compose de deux parties : la partie plastique qui se concentre dans les bandes précitées et la partie élastique qui est négligeable vis à vis de la partie plastique . Il s'est alors efforcé d'idéaliser le phénomène de rupture en négligeant les déformations élastiques et en remplaçant les bandes plastifiées par des charnières plastiques appelées «Lignes de Rupture». Il a été ainsi amené à considérer un modèle «Rigide-Plastique» de la dalle.

Le fait d' avoir imaginé un tel modèle exige que les parties de dalle limitées par des charnières plastiques restent planes et que ces dernières soient rectilignes puisqu'elles constituent des intersections de plans . Dans ce cas les déformations de la dalle consisteront en rotations des différentes parties de dalle, les unes par rapport aux autres, le long des charnières plastiques ; pour une partie de dalle simplement appuyée sur un de ses cotés l'axe de rotation sera confondu avec la ligne d'appui et pour une partie de dalle simplement appuyée sur un poteau, l'axe de rotation passera par le point d'appui.

Il va de soi que la charnière plastique entre deux parties de dalle adjacentes passera par le point d'intersection de leurs axes de rotation.

4- APPLICATION DE LA THEORIE DU Pr. JOHANSEN

Les lignes essentielles de la théorie des lignes de rupture étant ainsi définies, étant donnés par ailleurs une configuration des lignes charnières et un cas de charges (position et intensité) bien précis ; nous pouvons calculer le moment s'exerçant dans les charnières plastiques (problème de dimensionnement) ou inversement connaissant le moment résistant dans les charnières on peut déterminer la capacité portante de la dalle (problème de contrôle).

Ces calculs peuvent s'effectuer selon deux méthodes :

- a—Méthode basée sur le principe des travaux virtuels
- b—Méthode d'équilibre

La méthode des travaux virtuels consiste à écrire l'égalité des travaux des forces internes et externes dans un déplacement virtuel compatible avec les liaisons pour toute la dalle.

La méthode d'équilibre consiste simplement à étudier l'équilibre de chaque partie de dalle, à l'instant précédant la rupture complète, sous l'effet des charges extérieures et les efforts internes qui agissent dans les charnières plastiques.

Ces efforts sont les suivants :

a — Moment fléchissant

b — Moment de torsion

c — Effort tranchant

D'après le Pr. JOHANSEN les deux derniers efforts peuvent être remplacés dans leur ensemble par des forces nodales : forces concentrées transversales appliquées aux parties de dalle où les lignes de rupture forment des nœuds. Il est évident qu'en appliquant l'une ou l'autre des deux méthodes ci-dessus nous pouvons remplacer sans inconvénient une partie des forces internes par leur résultante et nous n'avons pas besoin de connaître la distribution exacte de ces efforts le long des charnières plastiques.

D'ailleurs en utilisant la méthode des travaux virtuels n'entrent en jeu que les moments de flexion s'exerçant dans les charnières plastiques et la somme des travaux effectués par les autres efforts internes est égale à zéro.

Jusqu'ici nous avons supposé connaître la configuration des lignes charnières, mais en réalité, la figure de rupture est la première chose à déterminer aussi bien dans un problème de dimensionnement que dans un problème de contrôle.

5- DETERMINATION DE LA FIGURE DE RUPTURE

5.1 — Lorsque la méthode choisie est basée sur le principe des travaux virtuels, on fait appel pour déterminer la configuration des lignes charnières, au théorème fondamental de l'analyse limite, dit «théorème de la borne inférieure». D'après ce théorème, la charge de rupture réelle est inférieure à toutes les charges de rupture calculées à partir de différentes figures de rupture, et parmi tous les schémas de rupture possibles il y en a un seul qui conduise à la charge de

rupture minimale ; c' est le schéma réel de rupture. Ceci étant, on envisage une figure de rupture qui dépend de certains paramètres X, Y, Z, \dots , on applique la méthode des travaux virtuels à cette figure et on détermine la charge de rupture P en fonction des dits paramètres, soit :

$$(V-1) \quad P = F(X, Y, Z, \dots)$$

La condition nécessaire pour que la charge de rupture P soit minimale peut se traduire par les relations suivantes :

$$(V-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial Z} = 0 \\ \dots \dots \end{array} \right.$$

Ces relations forment un système de n équations à n inconnues dont la résolution fournit les valeurs des paramètres par l'intermédiaire desquels la figure de rupture est parfaitement déterminée.

5.2 – Lorsqu'on se sert de la méthode d'équilibre pour résoudre un problème de dalle, le point de départ est exactement le même que pour la méthode des travaux virtuels, c'est-à-dire que l'on part d'un schéma de rupture dépendant des paramètres X, Y, Z, \dots et en écrivant l'équilibre des différentes parties de dalle on essaye d'établir le nombre voulu d'équations. La résolution de ces équations définit d'une part le schéma de rupture et d'autre part la charge de rupture quand il s'agit d'un problème de contrôle, ou les moments s'exerçant dans les charnières plastiques quand il s'agit d'un problème de dimensionnement.

Il va de soi que pour écrire l'équilibre des différentes parties de dalle, la connaissance de l'expression exacte des forces nodales est indispensable, puisque dans ce cas les moments de torsion et les efforts tranchants ne s'annulent pas comme dans la méthode des travaux virtuels.

6- EVALUATION DES FORCES NODALES

Pour évaluer les forces nodales on considère un nœud constitué par trois lignes de rupture N_0N_1 , N_0N_2 et N_0N_3 séparant les parties de dalle I, II et III, Fig. (VI-I). Comme il vient d'être indiqué, sur ces lignes de rupture agissent les efforts suivants : moments fléchissant m_1 , m_2 et m_3 , efforts tranchants et moments de torsion. Aux deux dernières catégorie d'efforts, repartis le long d'une charnière plastique on peut substituer deux forces localisées appliquées aux deux extrémités de cette charnière.

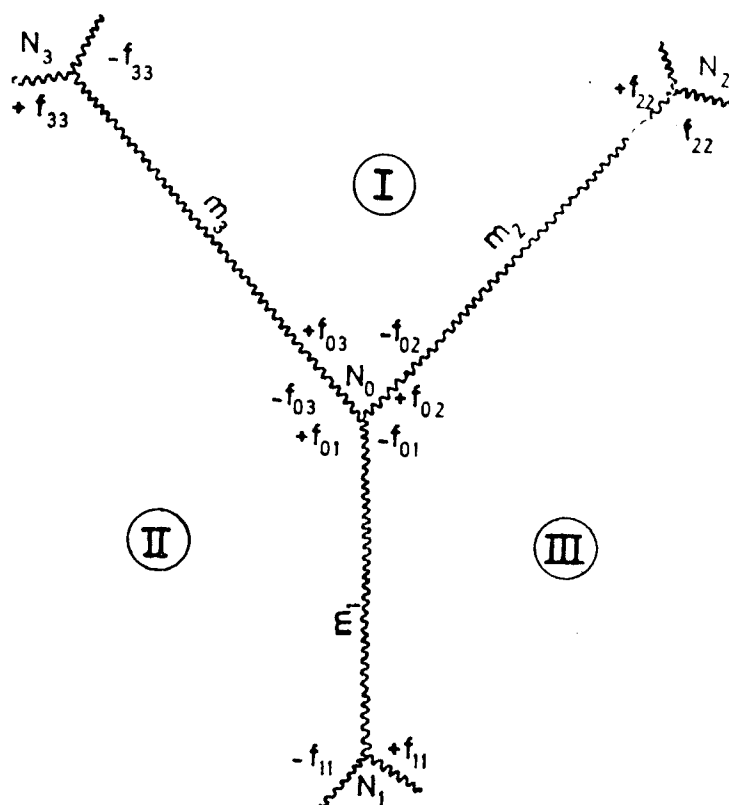


Fig (VI - I)

(Les signes sont conventionnels)

Il faut remarquer que ces forces, intérieures à l'ensemble du système sont respectivement égales et opposées de part et d'autre de la charnière considérée.

Nous appellerons ces forces localisées «forces nodales partielles» et nous les désignerons par f_{kj} . Dans un nœud donné et pour chaque partie de dalle, les forces nodales partielles provenant de deux lignes de rupture adjacentes constituent

la force nodale F_{ki} proprement dite. Par exemple pour le nœud N_0 les forces nodales agissant sur les parties de dalle I, II et III seront respectivement :

$$(VI-3) \quad \begin{cases} F_{01} = -f_{02} + f_{03} \\ F_{02} = -f_{03} + f_{01} \\ F_{03} = -f_{01} + f_{02} \end{cases}$$

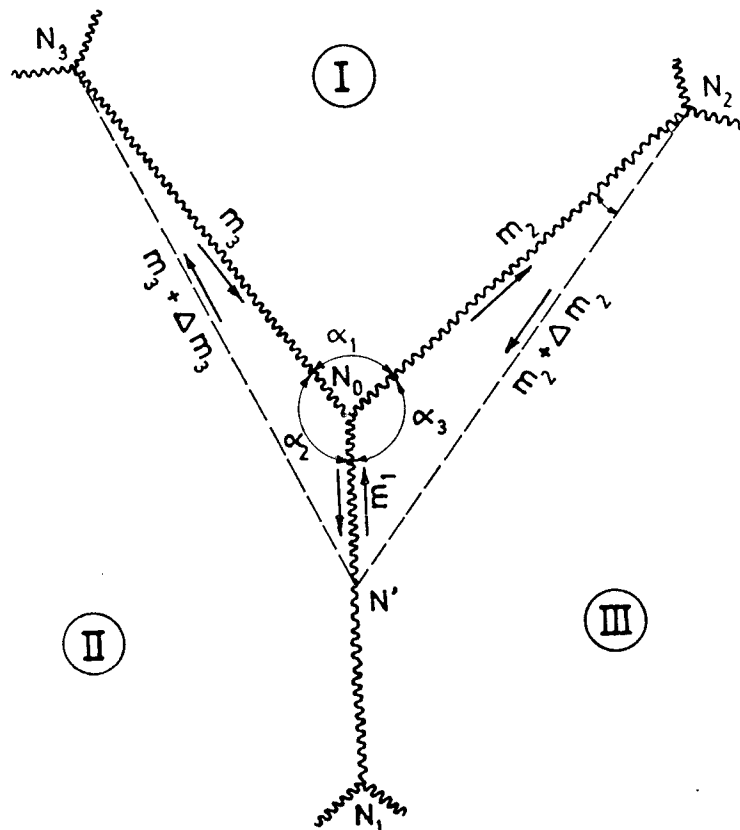
De ces relations résulte :

$$F_{01} + F_{02} + F_{03} = 0$$

qui traduit la condition d'équilibre du nœud N_0 .

Cela dit, on peut établir facilement l'expression de la force nodale agissant sur une partie de dalle au voisinage d'un nœud. On procède de la façon suivante :

Dans l'exemple choisi ci-dessus, au voisinage du nœud N_0 on fait passer deux lignes de rupture fictives $N'N_2$ et $N'N_3$ infiniment voisines de N_0N_2 et N_0N_3 . Ces lignes de rupture découpent dans les parties de dalle II et III respectivement les triangles $N_3N'N_0$ et $N_2N'N_0$, Fig. (VI-II). L'ensemble du système



Fig(VI - II)

étant en équilibre, chacun de ses éléments sera obligatoirement en équilibre. Il s'ensuit immédiatement que les triangles $N_3N'N_0$ et $N_2N'N_0$ sont en équilibre puisque tout de suite avant l'effondrement la dalle est encore en équilibre sous l'effet des charges extérieures et des efforts internes.

Posons $N_0N' = \Delta S$; le moment de flexion par unité de longueur agissant sur $N'N_2$ est égal à $m_2 + \Delta m_2$. Sur l'unité de longueur de $N'N_3$ agit un moment fléchissant égal à $m_3 + \Delta m_3$. La résultante de la charge répartie sur le triangle $N_2N'N_0$ est égale à ΔP_3 qui passe par le point G_3 distant de Δh_3 de $N'N_2$, Fig. (VI—III).

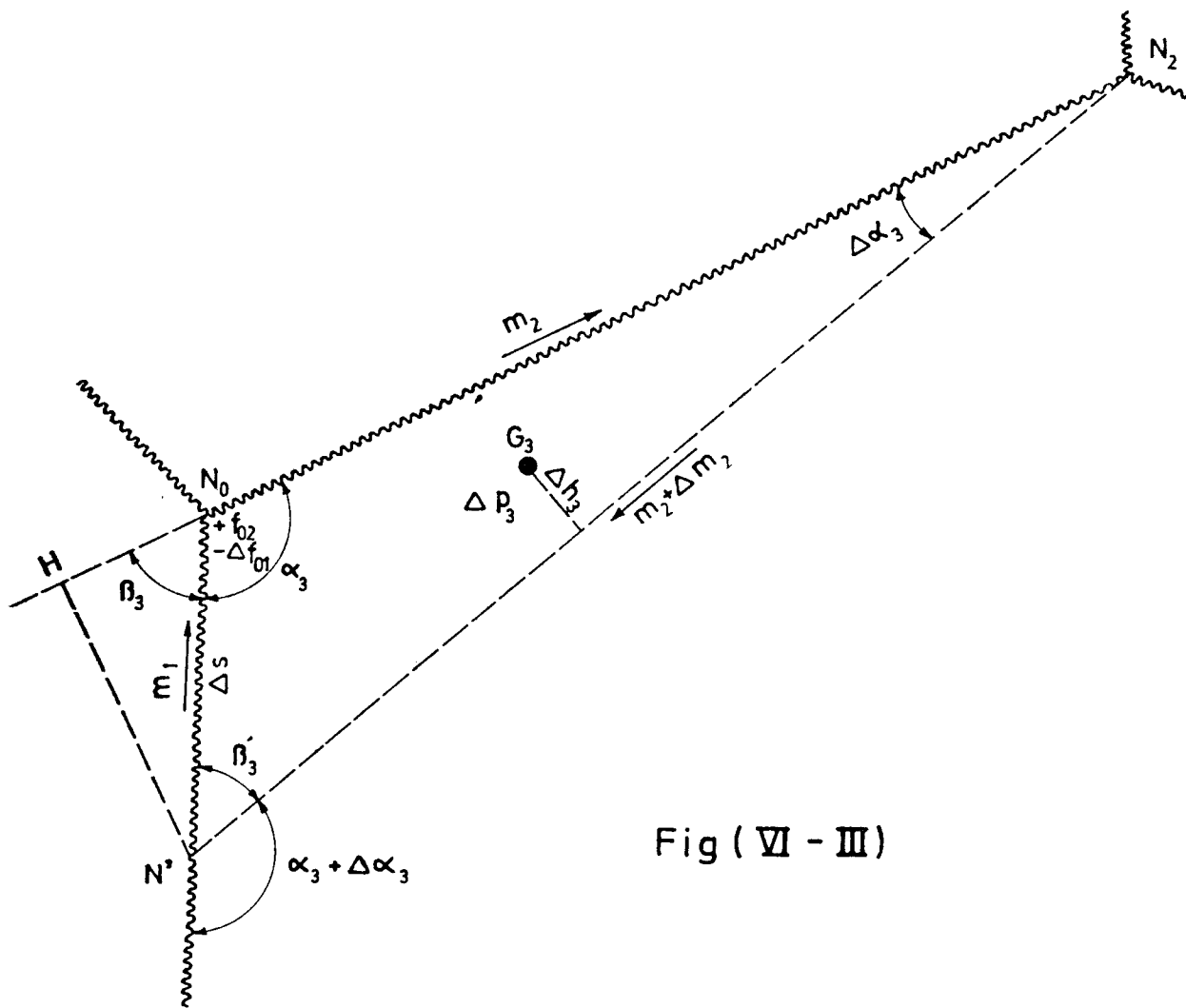


Fig (VI - III)

Ceci étant, l'équilibre du triangle $N_2N'N_0$ autour de $N'N_2$ s'écrit :

$$(a) \quad \Delta s m_1 \cos \beta'_3 + N_0 N_2 m_2 \cos \Delta \alpha_3 - N_2 N' (m_2 + \Delta m_2) + (f_{02} - \Delta f_{01}) \Delta s \sin \beta'_3 - \Delta h_3 \Delta P_3 = 0$$

D'après la figure (VI—III) nous avons :

$$N_2 N' = \Delta s \operatorname{Cos} \beta'_3 + N_0 N_2 \operatorname{Cos} \Delta \alpha_3$$

d'où on peut écrire la relation (a) sous la forme suivante :

$$(b) \quad \Delta s m_1 \operatorname{Cos} \beta'_3 + N_0 N_2 m_2 \operatorname{Cos} \Delta \alpha_3 - \Delta s m_2 \operatorname{Cos} \beta'_3 - N_0 N_2 m_2 \operatorname{Cos} \Delta \alpha_3 - \\ - N_2 N' \Delta m_2 + f_{02} \Delta s \operatorname{Sin} \beta'_3 - \Delta f_{01} \Delta s \operatorname{Sin} \beta'_3 - \Delta h_3 \Delta P_3 = 0$$

De plus, si $N'N_2$ tend vers N_0N_2 les deux derniers termes de cette relation tendront vers $df_{01} ds \operatorname{Sin} \beta'_3$ et $dh_3 dP_3$ qui étant des infiniment petits du second ordre, peuvent être définitivement supprimés. La relation (b) devient :

$$(c) \quad (m_1 - m_2) \Delta s \operatorname{Cos} \beta'_3 - N_2 N' \Delta m_2 + f_{02} \Delta s \operatorname{Sin} \beta'_3 = 0$$

D' autre part :

$$N'H = \Delta s \operatorname{Sin} \beta_3$$

et comme $\Delta \alpha_3$ est un infiniment petit, nous pouvons écrire :

$$\operatorname{tg} \Delta \alpha_3 = \Delta \alpha_3 = \frac{N'H}{N_2 N'}$$

d'où

$$N_2 N' = \frac{N'H}{\Delta \alpha_3} = \frac{\Delta s \operatorname{Sin} \beta_3}{\Delta \alpha_3}$$

En substituant à $N_2 N'$, la valeur ci-dessus, la relation (c) s'écrit :

$$(m_1 - m_2) \Delta s \operatorname{Cos} \beta'_3 - \Delta s \operatorname{Sin} \beta_3 \frac{\Delta m_2}{\Delta \alpha_3} + f_{02} \Delta s \operatorname{Sin} \beta'_3 = 0$$

Δs peut être alors éliminé. Lorsque $\Delta \alpha_3$ tend vers zéro, β'_3 tend vers β_3 et, en divisant les deux membres de la relation par $\operatorname{Sin} \beta_3$, on obtient :

$$(d) \quad (m_1 - m_2) \operatorname{Cotg} \beta_3 - \frac{dm_2}{d\alpha_3} + f_{02} = 0$$

comme $\operatorname{Cotg} \beta_3 = -\operatorname{Cotg} \alpha_3$ on trouve finalement :

$$(e) \quad -(m_1 - m_2) \operatorname{Cotg} \alpha_3 - \frac{dm_2}{d\alpha_3} + f_{02} = 0$$

d'où l' expression de f_{02} :

$$(f) \quad f_{02} = (m_1 - m_2) \operatorname{Cotg} \alpha_3 + \frac{dm_2}{d\alpha_3}$$

$$(m_1 - m_3) \Delta s \cos \beta'_2 - \Delta s \sin \beta_2 \frac{\Delta m_3}{\Delta \alpha_2} - f_{03} \Delta s \sin \beta'_2 = 0$$

$$(h) \quad (m_1 - m_3) \cos \beta'_2 - \frac{\Delta m_3}{\Delta \alpha_2} \sin \beta_2 - f_{03} \sin \beta'_2 = 0$$

Quand $\Delta \alpha_2$ tend vers zéro, β'_2 tend vers β_2 et la relation (h) devient :

$$(m_1 - m_3) \cotg \beta_2 - \frac{dm_3}{d\alpha_2} - f_{03} = 0$$

ou bien avec

$$\cotg \beta_2 = -\cotg \alpha_2$$

$$(k) \quad f_{03} = -(m_1 - m_3) \cotg \alpha_2 - \frac{dm_3}{d\alpha_2}$$

Des deux expressions (f) et (k) on déduit facilement l'expression de la force nodale F_{01} :

$$F_{01} = -f_{02} + f_{03}$$

$$F_{01} = -(m_1 - m_2) \cotg \alpha_3 - \frac{dm_2}{d\alpha_3} - (m_1 - m_3) \cotg \alpha_2 - \frac{dm_3}{d\alpha_2}$$

d'où

$$(VI-5) \quad \boxed{F_{01} = (m_2 - m_1) \cotg \alpha_3 + (m_3 - m_1) \cotg \alpha_2 - \frac{dm_2}{d\alpha_3} - \frac{dm_3}{d\alpha_2}}$$

Les forces nodales F_{02} et F_{03} seraient données de la même manière par les expressions suivantes :

$$(VI-6) \quad \boxed{F_{02} = (m_3 - m_2) \cotg \alpha_1 + (m_1 - m_2) \cotg \alpha_3 - \frac{dm_3}{d\alpha_1} - \frac{dm_1}{d\alpha_3}}$$

$$(VI-7) \quad \boxed{F_{03} = (m_1 - m_3) \cotg \alpha_2 + (m_2 - m_3) \cotg \alpha_1 - \frac{dm_1}{d\alpha_2} - \frac{dm_2}{d\alpha_1}}$$

REMARQUES :

A—Dans la quasi-totalité des publications traitant du problème des forces nodales, les auteurs ont négligé la variation de m . Ils ont donc supprimé les termes $\frac{dm_j}{d\alpha_i}$. Ce n'est exact que si la valeur de m est la même sur n'importe quelles lignes de rupture passant par le nœud considéré mais on ne peut pas généraliser comme le font certains auteurs et dire, en se basant sur le fait que le moment de flexion m est maximal le long des lignes de rupture, que, par définition, la variation $\frac{dm}{d\alpha}$ doit être égale à zéro.

Effectivement le moment de rupture provoqué par les charges extérieures est maximal sur les charnières plastiques et quand on étudie l'effet des charges extérieures on peut raisonner de la façon ci-dessus. Mais en ce qui concerne le calcul des forces nodales c'est le moment résistant propre de la dalle qui entre en jeu. Ce moment résistant est une qualité intrinsèque de la dalle et ne dépend absolument pas des charges extérieures. Etant donné cette indépendance, nous n'avons pas le droit d'appliquer la notion de maximum et minimum, et $\frac{dm}{d\alpha}$ n'est pas obligatoirement égal à zéro sauf, comme il vient d'être indiqué, dans le cas, où autour d'un nœud donné, la valeur de m ne dépend pas de la direction de la ligne de rupture.

D'ailleurs dans ce cas les forces nodales elles même sont égales à zéro à condition que toutes les lignes de rupture soient du même signe.

B—Les expressions de F_{o1} , F_{o2} et F_{o3} sont établies pour trois lignes de rupture qui convergent en N_o . Elles sont également applicables à un nœud où aboutissent un nombre plus élevé de charnières plastiques. Par exemple pour un nœud N_n avec quatre charnières plastiques, Fig. (VI—V), l'application des formules donne :

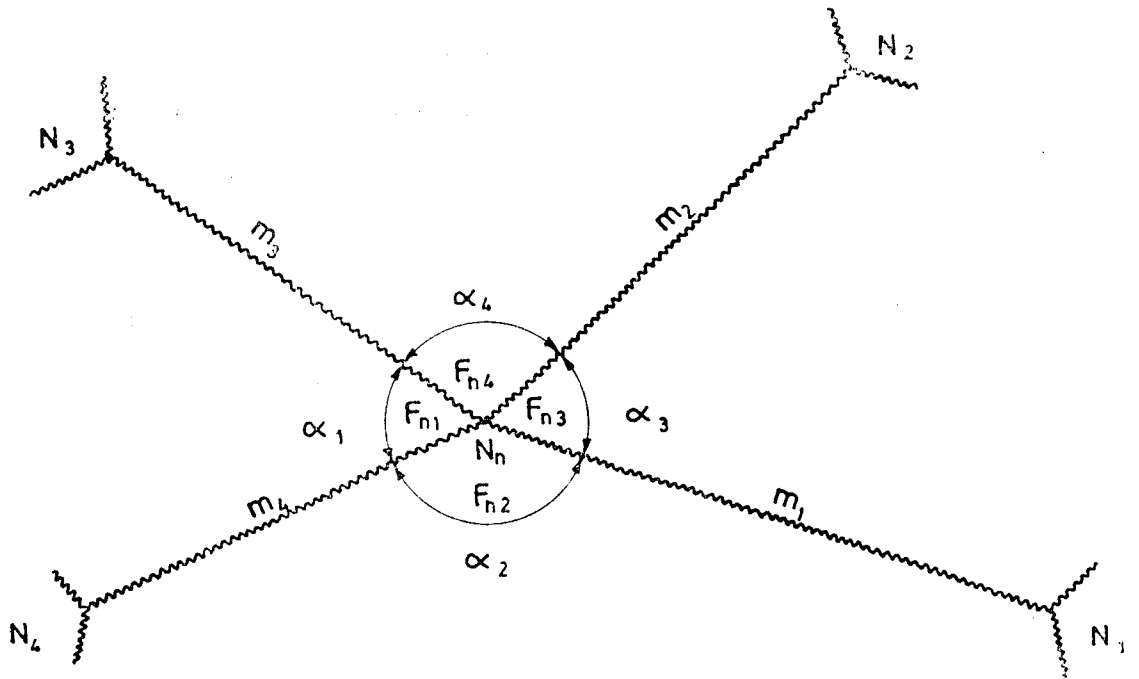


Fig (VI - V)

$$(VI-8) \left\{ \begin{array}{l} F_{n1} + F_{n4} = (m_2 - m_1) \text{Cotg} \alpha_3 + (m_4 - m_1) \text{Cotg} \alpha_2 - \frac{dm_2}{d\alpha_3} - \frac{dm_4}{d\alpha_2} \\ F_{n2} + F_{n1} = (m_3 - m_2) \text{Cotg} \alpha_4 + (m_1 - m_2) \text{Cotg} \alpha_3 - \frac{dm_3}{d\alpha_4} - \frac{dm_1}{d\alpha_3} \\ F_{n3} + F_{n2} = (m_4 - m_3) \text{Cotg} \alpha_1 + (m_2 - m_3) \text{Cotg} \alpha_4 - \frac{dm_4}{d\alpha_1} - \frac{dm_2}{d\alpha_4} \\ F_{n4} + F_{n3} = (m_1 - m_4) \text{Cotg} \alpha_2 + (m_3 - m_4) \text{Cotg} \alpha_1 - \frac{dm_1}{d\alpha_2} - \frac{dm_3}{d\alpha_1} \end{array} \right.$$

C'est un système de quatre équations à quatre inconnues qui permet de calculer F_{n1} , F_{n2} , F_{n3} et F_{n4} .

On peut procéder de la même manière pour un nombre plus élevé de lignes de rupture.

C - L'équilibre du nœud N_k exige que ΣF_{ki} soit égale à zéro. On voit sur la figure (VI - VI) que $d\alpha_i = -d\alpha_{i+1}$.

Il en résulte :

$$\frac{dm_j}{d\alpha_i} = - \frac{dm_j}{d\alpha_{i+1}}$$

Elant donné cette relation on constate que ΣF_{ki} ne peut être qu'égalé à zéro .

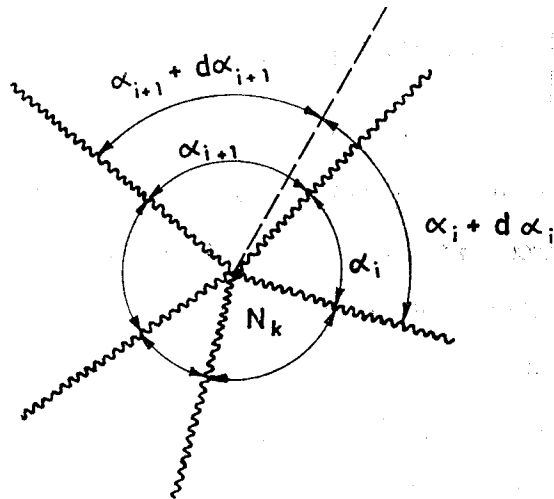


Fig (VI -VI)

D—Pour établir les formules (VI—5) , (VI—6) et (VI—7) nous avons choisi trois lignes de rupture positives , mais on peut reprendre le même raisonnement pour n'importe quelles lignes de ropture. Autrement dit, les formules ci-dessus sont absolument générales et les moments de flexion s'exerçant dans les charnières peuvent être positifs , négatifs ou nuls.

E—Dans l'établissement des formules (VI—5) à (VI—7) nous n'avons tenu compte que de la charge répartie (uniforme ou quelconque), mais dans la plupart des cas les nœuds se forment aux points d'application des charges concentrées. Dans ce cas, chaque partie de dalle supporte une part q_{ki} de la charge concentrée Q_k .

Supposons que q_{ki} soit dirigée vers le bas et désignons, cette fois, la force nodale par \mathcal{F}_{ki} . En écrivant l'équilibre des triangles élémentaires nous trouverons :

$$\mathcal{F}_{o1} = q_{o1} + (m_2 - m_1) \text{Cotg} \alpha_3 + (m_3 - m_1) \text{Cotg} \alpha_2 - \frac{dm_2}{d\alpha_3} - \frac{dm_3}{d\alpha_2}$$

$$\mathcal{F}_{o2} = q_{o2} + (m_3 - m_2) \text{Cotg} \alpha_1 + (m_1 - m_2) \text{Cotg} \alpha_3 - \frac{dm_3}{d\alpha_1} - \frac{dm_1}{d\alpha_3}$$

$$\mathcal{F}_{o3} = q_{o3} + (m_1 - m_3) \text{Cotg} \alpha_2 + (m_2 - m_3) \text{Cotg} \alpha_1 - \frac{dm_1}{d\alpha_2} - \frac{dm_2}{d\alpha_1}$$

d'où :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{01} = F_{01} + q_{01} \\ \mathcal{F}_{02} = F_{02} + q_{02} \\ \mathcal{F}_{03} = F_{03} + q_{03} \end{cases}$$

C'est-à-dire que dans un nœud chargé d'une charge concentrée il suffit, pour calculer les forces nodales, de déterminer les valeurs des forces nodales comme si le nœud n'était pas chargé et ajouter ensuite à ces forces, le terme rectificatif q_{ki} .

L'équilibre du nœud considéré exige :

$$-Q_{ki} + \Sigma \mathcal{F}_{ki} = 0$$

d'où

$$-Q_{ki} + \Sigma F_{ki} + \Sigma q_{ki} = 0$$

étant donné

$$Q_{ki} = \Sigma q_{ki}$$

on trouve

$$\Sigma F_{ki} = 0$$

qui n'est autre chose que la relation (VI-4).

7- EVALUATION DES FORCES DE BORD

Nous appellerons « force de bord » la force nodale agissant dans un nœud situé sur le bord libre de la dalle. Pour évaluer ces forces on peut utiliser les formules générales des forces nodales. Il faut toutefois tenir compte des conditions spéciales à ce cas particulier.

Dans ce cas, le bord peut être considéré comme une ligne de rupture sur laquelle m est égal à zéro.

D'autre part on suppose que la dalle est continue, mais au delà du bord, c'est-à-dire dans la zone (III), le moment résistant est le même dans toutes les directions et est égal à zéro. Cette hypothèse ne change en rien le comportement de la dalle mais permet de raisonner plus aisément. Le moment résistant étant invariable dans la zone (III), il est évident que dans cette zone on aura :

$$\frac{dm_1}{d\alpha_3} = 0, \quad \frac{dm_2}{d\alpha_3} = 0$$

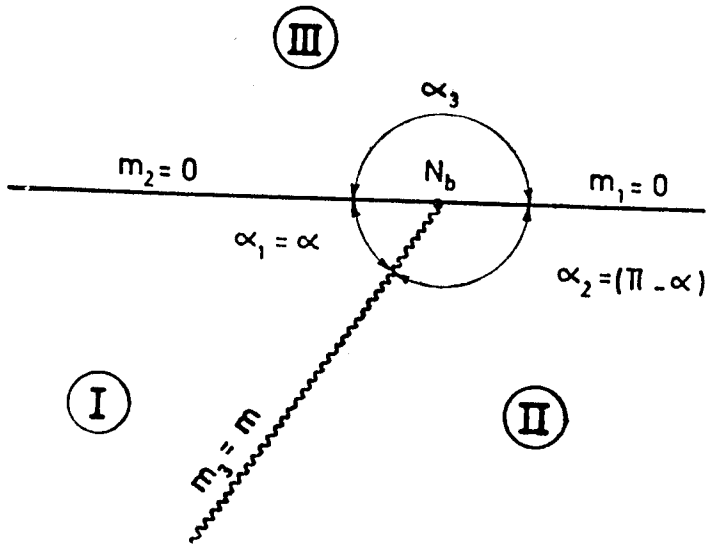


Fig (VII - VII)

et d'après la figure (VII - VII) on peut écrire :

$$\frac{dm_3}{d\alpha_1} = \frac{dm}{d\alpha}$$

et :

$$\frac{dm_3}{d\alpha_2} = \frac{dm}{d(\pi - \alpha)} = - \frac{dm}{d\alpha}$$

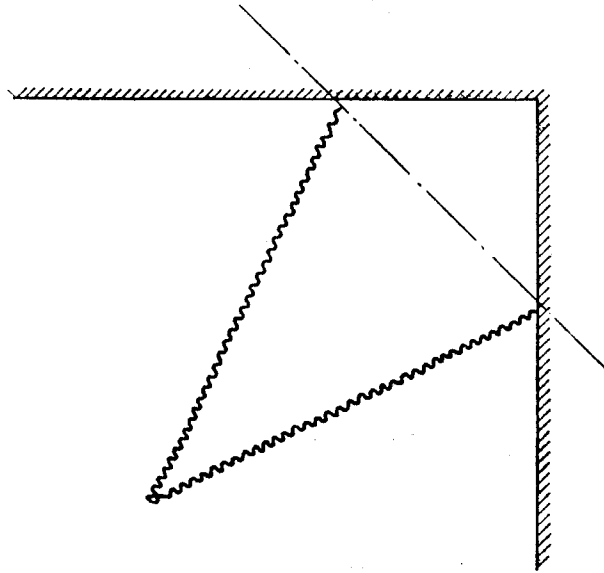
En tenant compte de ces relations et en utilisant les expressions générales des forces nodales on trouve :

$$(VII-9) \quad \begin{cases} F_{b1} = -m \cot \alpha + \frac{dm}{d\alpha} \\ F_{b2} = +m \cot \alpha - \frac{dm}{d\alpha} \end{cases}$$

La force F_{b3} doit être égale à zéro car la dalle étant en fait interrompue, il est impossible d'avoir $F_{b3} \neq 0$. On a $F_{b1} + F_{b2} = 0$ et comme ΣF_{bi} aussi doit être égale à zéro, la force F_{b3} ne peut être que nulle.

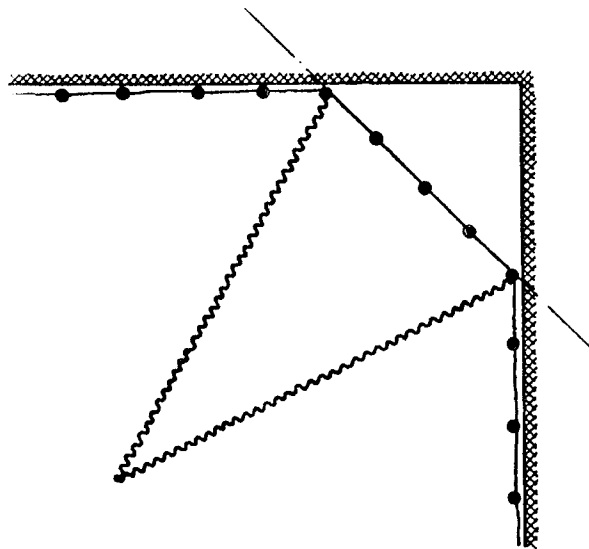
REMARQUES :

A—Les formules générales sont également applicables dans le cas où une ligne de rupture atteint un bord simplement appuyé, Fig (VII – VIII), (soulèvement d'angle). Dans ce cas pour les forces nodales on retrouve les mêmes expressions que pour les forces du bord, avec un terme complémentaire qui représente l'effet de la réaction d'appui.



Dalle simplement appuyée

Fig(VII - VIII)



Dalle encastrée

Fig(VII - IX)

B—Quand la dalle est encastrée sur la ligne d'appui, Fig (VII—IX), pour un nœud se trouvant sur cette ligne il suffit d'appliquer les formules générales en tenant compte de la réaction d'appui.

C—Dans le cas particulier d'une dalle isotrope où $\frac{dm}{d\alpha} = 0$, les expressions des forces de bord devient :

$$(VII-10) \quad \begin{cases} F_{b1 \text{ iso.}} = -m \operatorname{Cotg} \alpha \\ F_{b2 \text{ iso.}} = +m \operatorname{Cotg} \alpha \end{cases}$$

On retrouve alors les formules données par le Pr. JOHANSEN.

8- ETABLISSEMENT DES FORMULES POUR L'ÉVALUATION DES FORCES NODALES DANS LE CAS DES DALLES ARMEES DE DEUX NAPPES D'ARMATURES ORTHOGONALES

Dans la pratique, la plupart des dalles sont armées de deux nappes d'armatures faisant un angle de 90° . Supposons une telle dalle et prenons les directions des armatures comme axes de coordonnées. Appelons M_1 le moment résistant principal par unité de longueur d'une section perpendiculaire à l'axe des y et $M_2 = \lambda M_1$ celui d'une section perpendiculaire à l'axe des x .

Etudions maintenant, en tenant compte des hypothèses ci-dessus, le nœud constitué par trois lignes de rupture qui nous a servi de base pour établir les formules générales.

D'après les formules proposées par le Pr. JOHANSEN on peut exprimer m_1 , m_2 et m_3 en fonction des moments principaux :

$$(VIII-11) \quad \begin{cases} m_1 = M_1 (\operatorname{Cos}^2 \theta_1 + \lambda \operatorname{Sin}^2 \theta_1) \\ m_2 = M_1 (\operatorname{Cos}^2 \theta_2 + \lambda \operatorname{Sin}^2 \theta_2) \\ m_3 = M_1 (\operatorname{Cos}^2 \theta_3 + \lambda \operatorname{Sin}^2 \theta_3) \end{cases}$$

Essayons maintenant d'exprimer les termes $\frac{dm_j}{d\alpha_i}$ en fonction de M_1 et M_2 .

D'après la figure (VIII—X) on peut écrire :

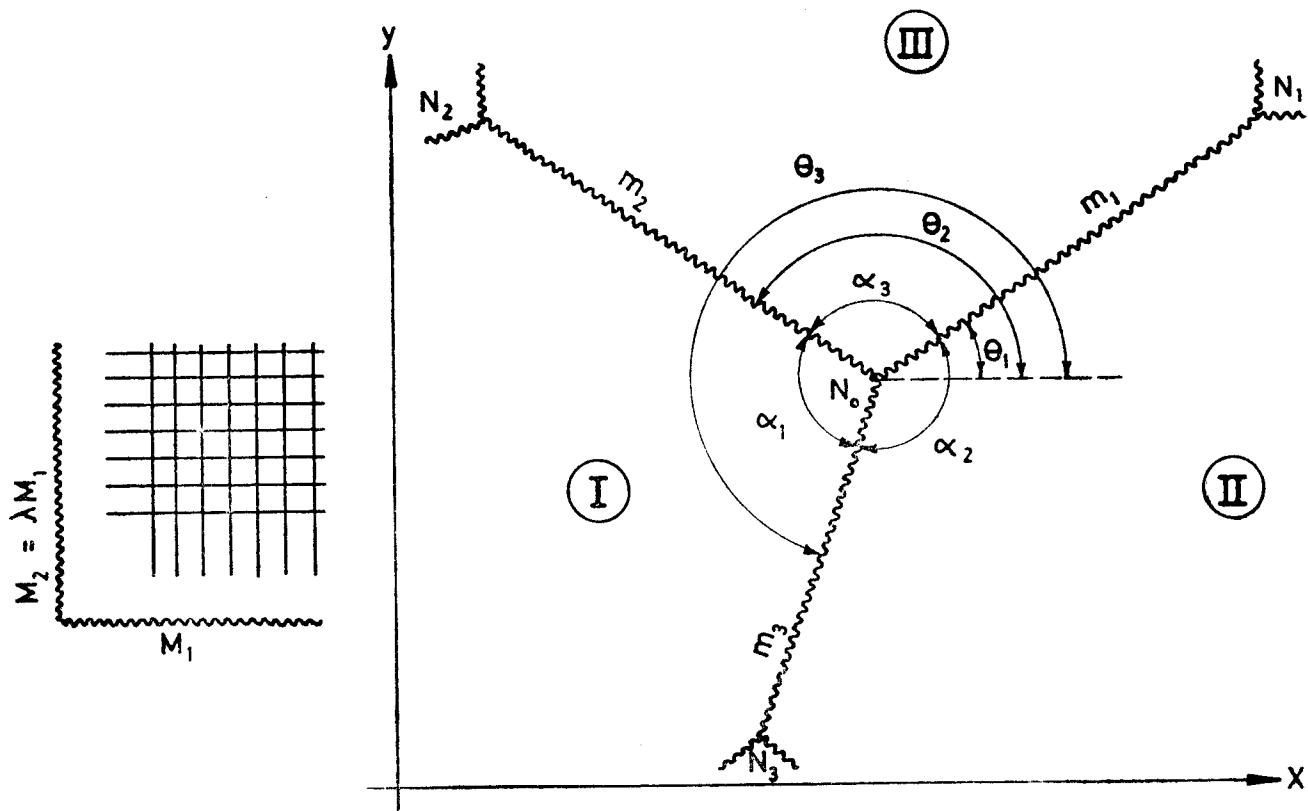


Fig (VIII - X)

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 - \alpha_3 \\ \theta_1 = \theta_3 - 2\pi + \alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_3 - \alpha_1 \\ \theta_2 = \theta_1 + \alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_3 = \theta_2 + \alpha_1 \\ \theta_3 = \theta_1 - \alpha_2 + 2\pi \end{cases}$$

d' où

$$m_1 = M_1 [\cos^2(\theta_2 - \alpha_3) + \lambda \sin^2(\theta_2 - \alpha_3)]$$

et

$$\frac{dm_1}{d\alpha_3} = M_1 [2\sin(\theta_2 - \alpha_3)\cos(\theta_2 - \alpha_3) - 2\lambda\sin(\theta_2 - \alpha_3)\cos(\theta_2 - \alpha_3)]$$

$$\frac{dm_1}{d\alpha_3} = 2M_1(1 - \lambda)\sin(\theta_2 - \alpha_3)\cos(\theta_2 - \alpha_3)$$

ou bien

$$(VIII-12) \quad \boxed{\frac{dm_1}{d\alpha_3} = 2M_1(1-\lambda)\text{Sin}\theta_1\text{Cos}\theta_1}$$

De même

$$m_1 = M_1[\text{Cos}^2(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2) + \lambda\text{Sin}^2(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2)]$$

$$\frac{dm_1}{d\alpha_2} = M_1[-2\text{Sin}(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2)\text{Cos}(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2) + 2\lambda\text{Sin}(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2)\text{Cos}(\theta_3 - 2\pi + \alpha_2)]$$

$$(VIII-13) \quad \boxed{\frac{dm_1}{d\alpha_2} = -2M_1(1-\lambda)\text{Sin}\theta_1\text{Cos}\theta_1}$$

D'une manière analogue on peut écrire :

$$m_2 = M_1[\text{Cos}^2(\theta_3 - \alpha_1) + \lambda\text{Sin}^2(\theta_3 - \alpha_1)]$$

$$(VIII-14) \quad \boxed{\frac{dm_2}{d\alpha_1} = 2M_1(1-\lambda)\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2}$$

$$m_2 = M_1[\text{Cos}^2(\theta_1 + \alpha_3) + \lambda\text{Sin}^2(\theta_1 + \alpha_3)]$$

$$(VIII-15) \quad \boxed{\frac{dm_2}{d\alpha_3} = -2M_1(1-\lambda)\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2}$$

$$m_3 = M_1[\text{Cos}^2(\theta_2 + \alpha_1) + \lambda\text{Sin}^2(\theta_2 + \alpha_1)]$$

$$(VIII-16) \quad \boxed{\frac{dm_3}{d\alpha_1} = -2M_1(1-\lambda)\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3}$$

$$m_3 = M_1[\text{Cos}^2(\theta_1 - \alpha_2 + 2\pi) + \lambda\text{Sin}^2(\theta_1 - \alpha_2 + 2\pi)]$$

$$(VIII-17) \quad \boxed{\frac{dm_3}{d\alpha_2} = 2M_1(1-\lambda)\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3}$$

D'autre part on voit sur la figure (VIII—X) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \theta_3 - \theta_2 \\ \alpha_2 = \theta_1 - \theta_3 + 2\pi \\ \alpha_3 = \theta_2 - \theta_1 \end{array} \right.$$

En introduisant toutes ces valeurs dans les formules générales on trouve :

$$\begin{aligned} F_1 = M_1 [& (\text{Cos}^2\theta_2 + \lambda\text{Sin}^2\theta_2 - \text{Cos}^2\theta_1 - \lambda\text{Sin}^2\theta_1)\text{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) + \\ & + (\text{Cos}^2\theta_3 + \lambda\text{Sin}^2\theta_3 - \text{Cos}^2\theta_1 - \lambda\text{Sin}^2\theta_1)\text{Cotg}(\theta_1 - \theta_3 + 2\pi) - \\ & - 2(1 - \lambda)\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3 + 2(1 - \lambda)\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 = M_1 [& (1 - \text{Sin}^2\theta_2 + \lambda\text{Sin}^2\theta_2 - 1 + \text{Sin}^2\theta_1 - \lambda\text{Sin}^2\theta_1)\text{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) + \\ & + (1 - \text{Sin}^2\theta_3 + \lambda\text{Sin}^2\theta_3 - 1 + \text{Sin}^2\theta_1 - \lambda\text{Sin}^2\theta_1)\text{Cotg}(\theta_1 - \theta_3) - \\ & - 2(1 - \lambda)\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3 + 2(1 - \lambda)\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(VIII—18)} \quad F_1 = M_1(1 - \lambda) [& (\text{Sin}^2\theta_1 - \text{Sin}^2\theta_2)\text{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) + \\ & + (\text{Sin}^2\theta_1 - \text{Sin}^2\theta_3)\text{Cotg}(\theta_1 - \theta_3) + 2\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2 - 2\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3] \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} \text{(VIII—19)} \quad F_2 = M_1(1 - \lambda) [& (\text{Sin}^2\theta_2 - \text{Sin}^2\theta_3)\text{Cotg}(\theta_3 - \theta_2) + \\ & + (\text{Sin}^2\theta_2 - \text{Sin}^2\theta_1)\text{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) + 2\text{Sin}\theta_3\text{Cos}\theta_3 - 2\text{Sin}\theta_1\text{Cos}\theta_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(VIII—20)} \quad F_3 = M_1(1 - \lambda) [& (\text{Sin}^2\theta_3 - \text{Sin}^2\theta_1)\text{Cotg}(\theta_1 - \theta_3) + \\ & + (\text{Sin}^2\theta_3 - \text{Sin}^2\theta_2)\text{Cotg}(\theta_3 - \theta_2) + 2\text{Sin}\theta_1\text{Cos}\theta_1 - 2\text{Sin}\theta_2\text{Cos}\theta_2] \end{aligned}$$

En ce qui concerne les forces de bord on peut suivre le même raisonnement. Nous avons démontré :

$$F_{b1} = -F_{b2} = -m \text{Cotg}\alpha + \frac{dm}{d\alpha}$$

Supposons que le bord de la dalle fasse un angle β avec l'axe des X. D'après la figure (VIII—XI) :

$$\theta = \alpha + \beta$$

Sachant que :

$$m = M_1(\text{Cos}^2\theta + \lambda\text{Sin}^2\theta)$$

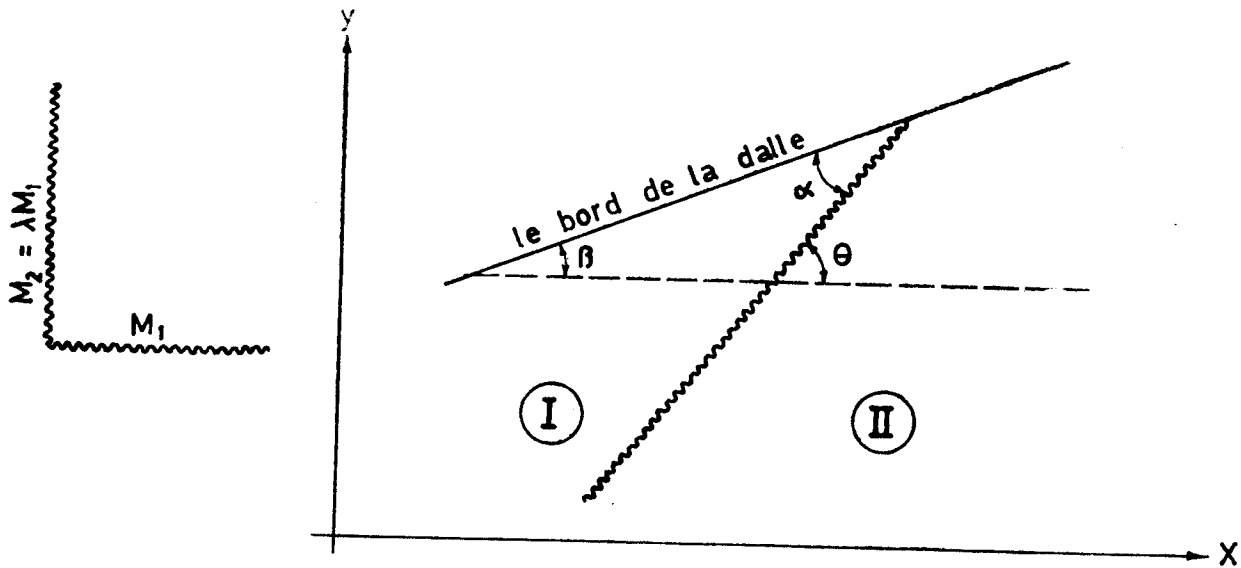


Fig (VIII - XI)

on peut écrire successivement :

$$m = M_1 [\cos^2(\alpha + \beta) + \lambda \sin^2(\alpha + \beta)]$$

$$\frac{dm}{d\alpha} = M_1 [-2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + 2\lambda\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)]$$

(VIII-21)

$$\frac{dm}{d\alpha} = -2M_1(1-\lambda)\sin\theta\cos\theta$$

d'où :

$$(VIII-22) \quad F_{b1} = -F_{b2} = -M_1(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta)\cotg(\theta - \beta) - 2M_1(1-\lambda)\sin\theta\cos\theta$$

Quand $\beta = 0$ la formule peut s'écrire :

$$(VIII-23) \quad F_{b1} = -F_{b2} = -M_1(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta + 2\sin^2\theta - 2\lambda\sin^2\theta)\cotg\theta$$

$$F_{b1} = -F_{b2} = -M_1[1 + (1-\lambda)\sin^2\theta]$$

Quand $\beta = 90^\circ$, sachant que $\cotg\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\tg\theta$ la formule s'écrit :

$$(VIII-24) \quad F_{b1} = -F_{b2} = -M_1(-\cos^2\theta - \lambda\sin^2\theta + 2\cos^2\theta - 2\lambda\cos^2\theta)\tg\theta$$

$$F_{b1} = -F_{b2} = -M_1[-\lambda + (1-\lambda)\cos^2\theta]\tg\theta$$

9- EXEMPLE

Considérons une dalle carrée en béton, armée de deux nappes d'armatures orthogonales et parallèles aux bord. Cette dalle est appuyée sur ses quatre angles et chargée de quatre charges concentrées Q comme le montre la figure (IX—XII).

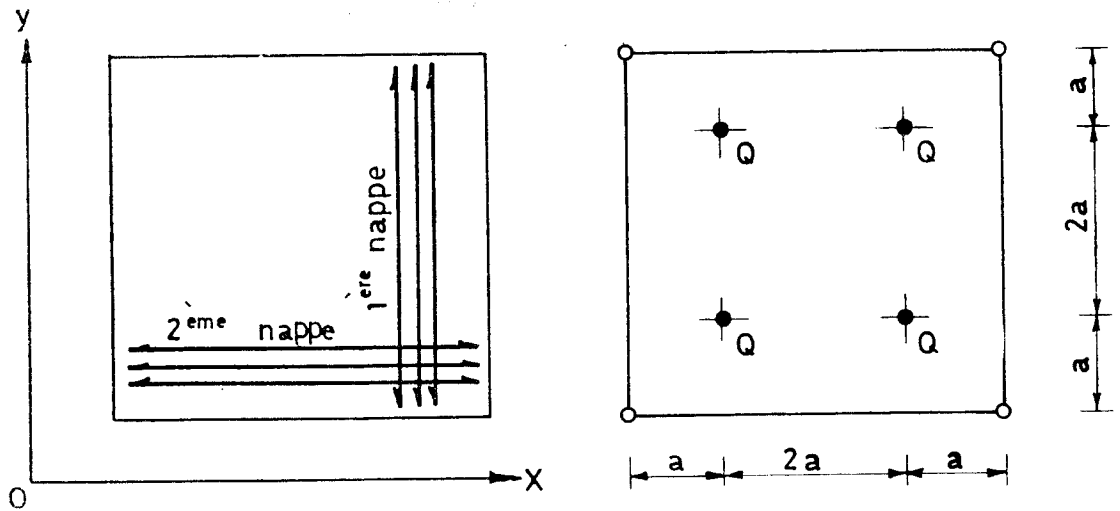


Fig (IX - XII)

Supposons $M_1 > M_2$ (la différence entre M_1 et M_2 peut résulter soit de la différence entre les hauteurs utiles des deux lits de barre soit de la différence des sections d'armature de chaque nappe). Dans ce cas, la figure de rupture aura la forme suivante, représentée à la figure (IX—XIII).

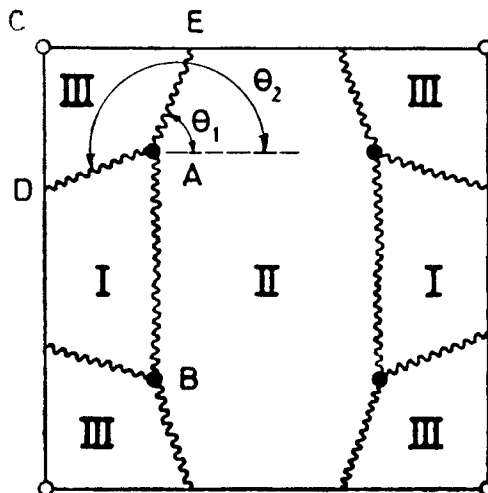


Fig (IX - XIII)

La position de la charnière AB est fixée par les points d'application A et B des charges concentrées et les positions de AE et AD peuvent être définies par deux paramètres θ_1 et θ_2 .

Essayons maintenant de déterminer les valeurs exactes de ces paramètres. Nous procéderons tout d'abord par la méthode des travaux virtuels, et ensuite par la méthode d'équilibre.

9.1- Méthode des travaux virtuels

Dans un déplacement virtuel des points d'application des charges, la rotation de la partie de dalle (I) s'effectue autour d'un axe parallèle à oy (pour des raisons de symétrie), la partie (II) ne subit pas de rotation, en d'autres termes son axe de rotation se trouve à l'infini, et l'axe de rotation de la partie (III) passe par le point d'appui.

Sachant que la ligne de rupture entre deux parties de dalle passe par le point d'intersection de leurs axes de rotation et que l'axe de rotation de la partie (II) se trouve à l'infini, on constate facilement que GH doit être parallèle à AE, Fig. (IX—XIV).

Supposons que le déplacement des points d'application des charges concentrées soit égal à l'unité. Dans ce cas, le déplacement du point E sera également :

$$\delta E = 1$$

d'où :

$$\varphi_{x3} = \frac{1}{GE} = \frac{1}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)}$$

et

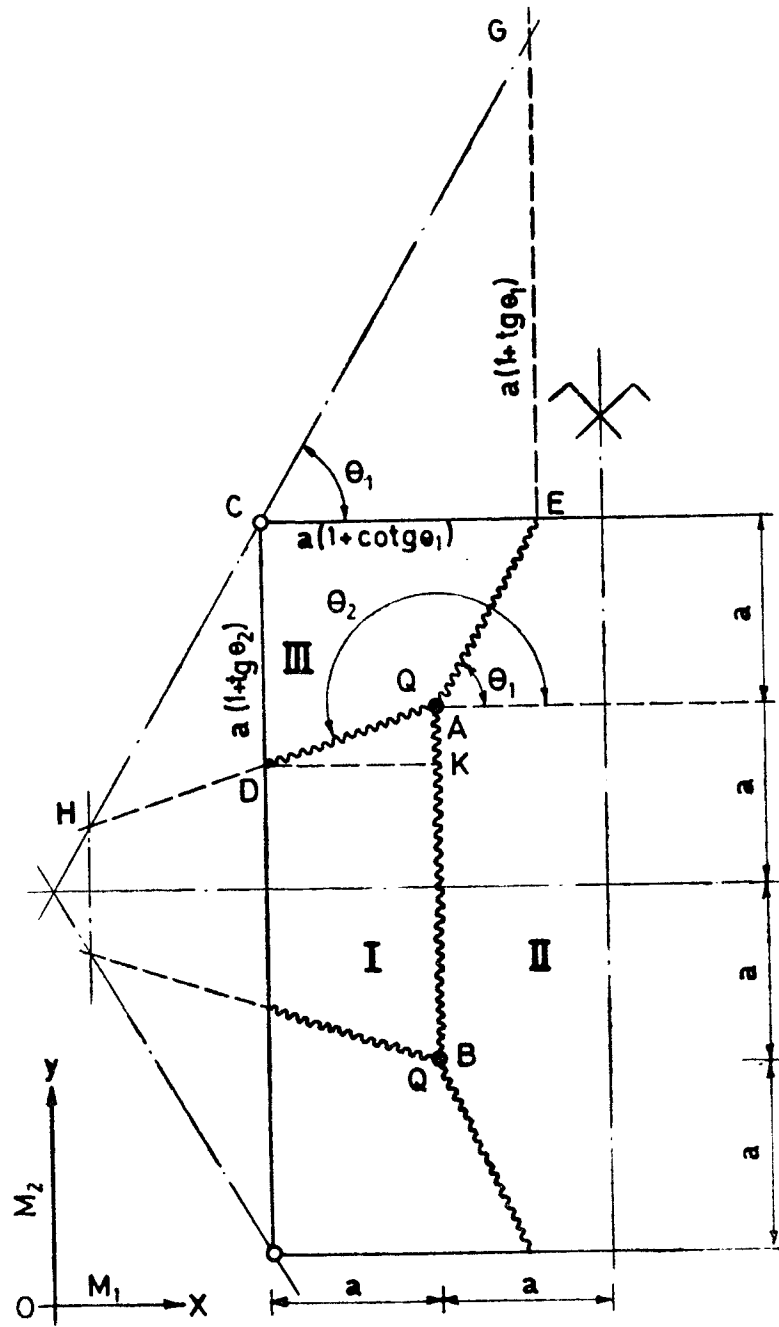
$$\varphi_{y3} = \frac{1}{CE} = \frac{1}{a(1 + \operatorname{Cotg}\theta_1)} = \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)}$$

Connaissant φ_{x3} , il est facile de déterminer le déplacement du point D :

$$\delta D = \delta E \cdot \frac{CD}{GE} = 1 \cdot \frac{a(1 + \operatorname{tg}\theta_2)}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)}$$

enfin :

$$\delta D = \frac{1 + \operatorname{tg}\theta_2}{1 + \operatorname{tg}\theta_1}$$



Fig(IX-XIV)

Ayant trouvé δD nous pouvons déterminer φ_{y1} :

$$\varphi_{y1} = \frac{\delta K - \delta D}{DK} = \frac{1 - \frac{1 + \operatorname{tg}\theta_2}{1 + \operatorname{tg}\theta_1}}{a}$$

$$\varphi_{y1} = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)}$$

Il va de soi que :

$$\varphi_{x_1} = \varphi_{x_2} = \varphi_{y_2} = 0$$

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires à l'établissement de l'équation du travail (pour un quart de dalle) :

$$\begin{aligned} Q \cdot l = & a(1 - \operatorname{tg}\theta_2)M_2 \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)} + a(1 + \operatorname{Cotg}\theta_1)M_1 \frac{1}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)} + \\ & + a(1 + \operatorname{tg}\theta_2)M_2 \frac{\operatorname{tg}\theta_2}{a(1 + \operatorname{tg}\theta_1)} \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{Q}{M_1} = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}^2\theta_2 + \operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2}{1 + \operatorname{tg}\theta_1} \lambda + \operatorname{Cotg}\theta_1$$

$$\frac{Q}{M_1} = \frac{2\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}^2\theta_2}{1 + \operatorname{tg}\theta_1} \lambda + \operatorname{Cotg}\theta_1$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{Q}{M_1} \right) = \frac{-\frac{1}{\operatorname{Cos}^2\theta_2} + 2\operatorname{tg}\theta_2 \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\theta_2}}{1 + \operatorname{tg}\theta_1} \lambda = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{Q}{M_1} \right) = \frac{(1 - 2\operatorname{tg}\theta_2) \frac{-\lambda}{\operatorname{Cos}^2\theta_2}}{1 + \operatorname{tg}\theta_1} = 0$$

Comme $\lambda \neq 0$, $\operatorname{Cos}^2\theta_2 \neq 0$ et $1 + \operatorname{tg}\theta_1 \neq \infty$ nous pouvons écrire :

$$1 - 2\operatorname{tg}\theta_2 = 0$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{1}{2}$$

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

et d'après la figure (IX—XIV) :

$$\theta_2 = \pi + \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}$$

De même

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{Q}{M_1} \right) = \frac{(1 + \operatorname{tg} \theta_1) \frac{2}{\operatorname{Cos}^2 \theta_1} - (2 \operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg}^2 \theta_2) \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \theta_1}}{(1 + \operatorname{tg} \theta_1)^2} \lambda + \frac{-\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \theta_1}}{\operatorname{tg}^2 \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{Q}{M_1} \right) = \frac{(2 + \operatorname{tg} \theta_2 - 2 \operatorname{tg}^2 \theta_2) \lambda}{(1 + \operatorname{tg} \theta_1)^2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_1} = 0$$

En remplaçant $\operatorname{tg} \theta_2$ par $\frac{1}{2}$ on trouve :

$$\frac{\frac{9}{4} \lambda}{(1 + \operatorname{tg} \theta_1)^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_1} = \operatorname{Cotg}^2 \theta_1$$

$$2.25 \lambda = (\operatorname{Cotg} \theta_1 + 1)^2 = (\operatorname{Cotg}^2 \theta_1 + 2 \operatorname{Cotg} \theta_1 + 1)$$

$$\operatorname{Cotg}^2 \theta_1 + 2 \operatorname{Cotg} \theta_1 + 1 - 2.25 \lambda = 0$$

$$\operatorname{Cotg} \theta_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 1 + 2.25 \lambda}}{1}$$

$$\operatorname{Cotg} \theta_1 = 1.5 \sqrt{\lambda} - 1$$

$$\theta_1 = \operatorname{Arc} \operatorname{Cotg} (1.5 \sqrt{\lambda} - 1)$$

Pour calculer la charge de rupture il suffit d'introduire les valeurs de θ_1 et θ_2 dans l'équation du travail :

$$\frac{Q}{M_1} = \frac{\left(\frac{2}{1.5 \sqrt{\lambda} - 1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \lambda}{1 + \frac{1}{1.5 \sqrt{\lambda} - 1}} + 1.5 \sqrt{\lambda} - 1$$

$$\frac{Q}{M_1} = \frac{2 - \frac{1.5 \sqrt{\lambda}}{4} + \frac{1}{4}}{1.5 \sqrt{\lambda} - 1 + 1} \lambda + 1.5 \sqrt{\lambda} - 1$$

$$\frac{Q}{M_1} = 1.5 \sqrt{\lambda} - 0.25 \lambda + 1.5 \sqrt{\lambda} - 1$$

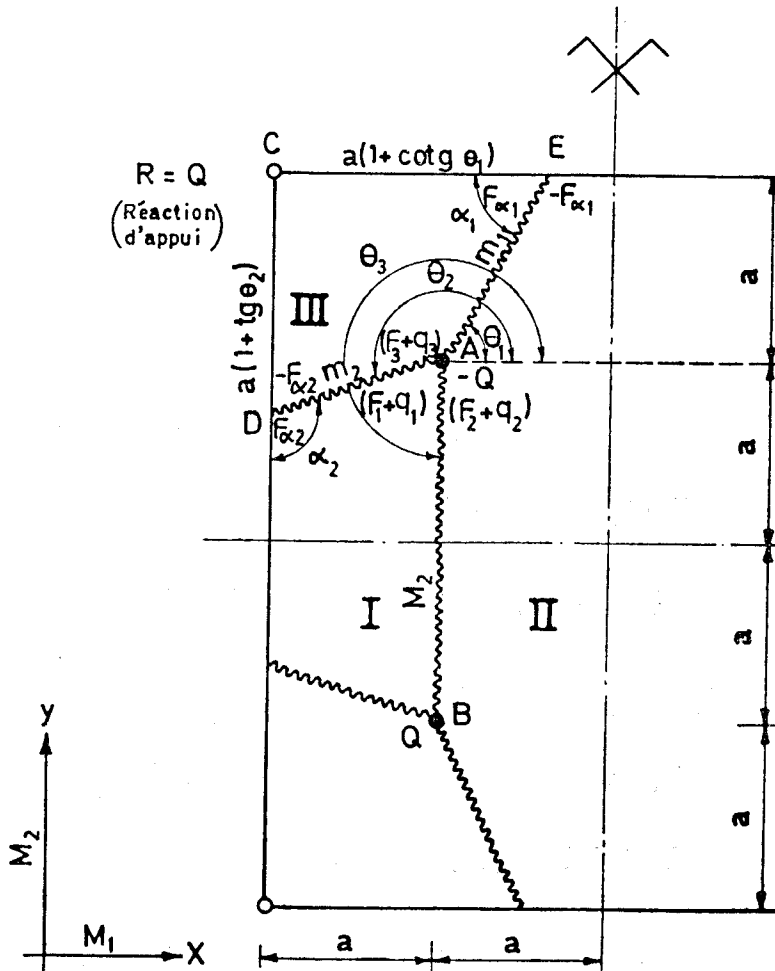
$$\boxed{Q = (-0.25 \lambda + 3 \sqrt{\lambda} - 1) M_1}$$

9.2- Méthode d'équilibre

Pour appliquer cette méthode il faut calculer tous d'abord les forces de bord et les forces nodales.

D'après la figure (IX—XV), au point E, nous avons

$$\beta = 0^\circ \quad \text{et} \quad \alpha = \theta = \theta_1$$



Fig(IV-XV)

et nous pouvons appliquer la formule (VIII-23) qui donne :

$$F_{\alpha 1} = -M_1 \text{Cotg} \theta_1 [1 + (1 - \lambda) \text{Sin}^2 \theta_1]$$

De même au point D, nous avons :

$$\beta = 90^\circ$$

$$\theta = \theta_2$$

$$\alpha_2 = \theta_2 - \frac{\pi}{2}$$

et nous pouvons appliquer la formule (VIII-24) :

$$F_{\alpha_2} = -M_1 \operatorname{tg} \theta_2 [-\lambda + (1 - \lambda) \operatorname{Cos}^2 \theta_2]$$

D'autre part, par symétrie

$$\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$$

d'où :

$$\operatorname{Sin} \theta_3 = -1$$

$$\operatorname{Cos} \theta_3 = 0$$

$$\operatorname{Cotg} \theta_3 = 0$$

et application des formules (VI-5), (VI-6) et (VI-7) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = M_1(1 - \lambda)[(\operatorname{Sin}^2 \theta_1 - \operatorname{Sin}^2 \theta_2) \operatorname{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) + \\ \quad + (\operatorname{Sin}^2 \theta_1 - 1) \operatorname{Cotg} \left(\theta_1 - \frac{3\pi}{4} \right) + 2 \operatorname{Sin} \theta_2 \operatorname{Cos} \theta_2] \\ F_2 = M_1(1 - \lambda)[(\operatorname{Sin}^2 \theta_2 - 1) \operatorname{Cotg} \left(\frac{3\pi}{4} - \theta_2 \right) + \\ \quad + (\operatorname{Sin}^2 \theta_2 - \operatorname{Sin}^2 \theta_1) \operatorname{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) - 2 \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Cos} \theta_1] \\ F_3 = M_1(1 - \lambda)[(1 - \operatorname{Sin}^2 \theta_1) \operatorname{Cotg} \left(\theta_1 - \frac{3\pi}{4} \right) + \\ \quad + (1 - \operatorname{Sin}^2 \theta_2) \operatorname{Cotg} \left(\frac{3\pi}{4} - \theta_2 \right) - 2 \operatorname{Sin} \theta_2 \operatorname{Cos} \theta_2 + \\ \quad + 2 \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Cos} \theta_1] \end{array} \right.$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = M_1(1 - \lambda)[(\operatorname{Sin}^2 \theta_1 - \operatorname{Sin}^2 \theta_2) \operatorname{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) - \operatorname{Cos}^2 \theta_1 (-\operatorname{tg} \theta_1) + 2 \operatorname{Sin} \theta_2 \operatorname{Cos} \theta_2] \\ F_2 = M_1(1 - \lambda)[- \operatorname{Cos}^2 \theta_2 \operatorname{tg} \theta_2 + (\operatorname{Sin}^2 \theta_2 - \operatorname{Sin}^2 \theta_1) \operatorname{Cotg}(\theta_2 - \theta_1) - 2 \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Cos} \theta_1] \\ F_3 = M_1(1 - \lambda)[\operatorname{Cos}^2 \theta_1 (-\operatorname{tg} \theta_1) + \operatorname{Cos}^2 \theta_2 \operatorname{tg} \theta_2 - 2 \operatorname{Sin} \theta_2 \operatorname{Cos} \theta_2 + 2 \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Cos} \theta_1] \end{array} \right.$$

Ou bien :

$$\begin{cases} F_1 = M_1(1 - \lambda)[(\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2)\cotg(\theta_2 - \theta_1) + \sin\theta_1\cos\theta_1 + 2\sin\theta_2\cos\theta_2] \\ F_2 = M_1(1 - \lambda)[(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1)\cotg(\theta_2 - \theta_1) - 2\sin\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_2] \\ F_3 = M_1(1 - \lambda)[\sin\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_2] \end{cases}$$

Une fois les forces nodales et les forces de bord calculées, nous pouvons, en étudiant l'équilibre des différentes parties de dalle, établir les équations nécessaires pour déterminer les paramètres et la charge de rupture :

$$\begin{array}{l} \text{(moment par rapport} \\ \text{à AB, partie I)} \\ \text{(moment par rapport} \\ \text{à CD, partie III)} \\ \text{(moment par rapport} \\ \text{à CE, partie III)} \\ \text{(équilibre des forces} \\ \text{partie III)} \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} M_2 - m_2 \operatorname{tg}\theta_2 - F_{\alpha 2} = 0 \\ m_1 - m_2 \operatorname{tg}\theta_2 + F_{\alpha 1}(1 + \operatorname{Cotg}\theta_1) + (F_3 + q_3 - q_3) = 0 \\ m_1 \operatorname{Cotg}\theta_1 + m_2 - F_{\alpha 2}(1 + \operatorname{tg}\theta_2) + (F_3 + q_3 - q_3) = 0 \\ R - F_{\alpha 2} + F_{\alpha 1} + (F_3 + q_3 - q_3) = 0 \end{array} \right.$$

De l'équation (1) résulte :

$$\lambda M_1 - M_1(\cos^2\theta_2 + \lambda \sin^2\theta_2) \operatorname{tg}\theta_2 + M_1 \operatorname{tg}\theta_2[-\lambda + (1 - \lambda)\cos^2\theta_2] = 0$$

$$\lambda - \operatorname{tg}\theta_2(\cos^2\theta_2 + \lambda \sin^2\theta_2 + \lambda - \cos^2\theta_2 + \lambda \cos^2\theta_2) = 0$$

$$\lambda - \operatorname{tg}\theta_2(\lambda + \lambda) = \lambda - 2\lambda \operatorname{tg}\theta_2 = 0$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}, \quad \sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

et d'après la figure :

$$\theta_2 = \pi + \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}$$

Prenons maintenant les relations (2) et (3)

$$(2) \quad \begin{cases} m_1 + \frac{m_2}{2} + F_{\alpha 1}(1 + \text{Cotg}\theta_1) + (F_3 + q_3 - q_3) = 0 \\ (3) \quad \begin{cases} m_1 \text{Cotg}\theta_1 + m_2 - F_{\alpha 2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + (F_3 + q_3 - q_3) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

En diminuant (3) de (2) on trouve :

$$m_1(1 - \text{Cotg}\theta_1) - \frac{m_2}{2} + F_{\alpha 1}(1 + \text{Cotg}\theta_1) + 1.5F_{\alpha 2} = 0$$

En remplaçant $m_1, m_2, F_{\alpha 1}$ et $F_{\alpha 2}$ par leurs valeurs et en substituant $\frac{1}{2}$ à $\text{tg}\theta_2$ on peut écrire successivement :

$$M_1(\text{Cos}^2\theta_1 + \lambda \text{Sin}^2\theta_1)(1 - \text{Cotg}\theta_1) - \frac{M_1}{2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\lambda}{5} \right) -$$

$$-M_1 \text{Cotg}\theta_1 [1 + (1 - \lambda) \text{Sin}^2\theta_1] (1 + \text{Cotg}\theta_1) - 0.75 M_1 \left[-\lambda + \frac{4}{5} (1 - \lambda) \right] = 0$$

$$\text{Cotg}^2\theta_1 [1 + (1 - \lambda) \text{Sin}^2\theta_1] + \text{Cotg}\theta_1 [\text{Cos}^2\theta_1 + \lambda \text{Sin}^2\theta_1 + 1 + \text{Sin}^2\theta_1 -$$

$$-\lambda \text{Sin}^2\theta_1] + [-\text{Cos}^2\theta_1 - \lambda \text{Sin}^2\theta_1 + 0.4 + 0.1\lambda - 0.75\lambda + 0.6 - 0.6\lambda] = 0$$

$$\text{Cotg}^2\theta_1 [1 + (1 - \lambda) \text{Sin}^2\theta_1] + 2\text{Cotg}\theta_1 + [(1 - \lambda) \text{Sin}^2\theta_1 - 1.25\lambda] = 0$$

$$\text{Cotg}^2\theta_1 + 2\text{Cotg}\theta_1 + (1 - \lambda) \text{Cos}^2\theta_1 + (1 - \lambda) \text{Sin}^2\theta_1 - 1.25\lambda = 0$$

$$\text{Cotg}^2\theta_1 + 2\text{Cotg}\theta_1 + 1 - \lambda - 1.25\lambda = 0$$

$$\text{Cotg}\theta_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 1 + 2.25\lambda}}{1}$$

$$\text{Cotg}\theta_1 = 1.5\sqrt{\lambda} - 1$$

d'où :

$$\theta_1 = \text{Arc Cotg}(1.5\sqrt{\lambda} - 1)$$

Ayant trouvé θ_1 on peut calculer aisément la charge de rupture. Des deux relations (3) et (4) résulte :

$$Q = R = F_{\alpha 2} - F_{\alpha 1} + m_1 \text{Cotg}\theta_1 + m_2 - F_{\alpha 2} - F_{\alpha 2} \text{tg}\theta_2$$

En remplaçant $m_1, m_2, F_{\alpha 1}$ et $F_{\alpha 2}$ par leurs valeurs on peut écrire successivement :

$$Q = M_1 \text{Cotg}\theta_1 [1 + (1 - \lambda) \text{Sin}^2\theta_1] + M_1 \text{Cotg}\theta_1 [\text{Cos}^2\theta_1 + \lambda \text{Sin}^2\theta_1] +$$

$$+ M_1 (\text{Cos}^2\theta_2 + \lambda \text{Sin}^2\theta_2) + M_1 \text{tg}^2\theta_2 [-\lambda + (1 - \lambda) \text{Cos}^2\theta_2]$$

$$Q = M_1 \text{Cotg}\theta_1 [1 + \text{Sin}^2\theta_1 - \lambda \text{Sin}^2\theta_1 + \text{Cos}^2\theta_1 + \lambda \text{Sin}^2\theta_1] + \\ + M_1 [\text{Cos}^2\theta_2 + \lambda \text{Sin}^2\theta_2 - \lambda \text{tg}^2\theta_2 + \text{Sin}^2\theta_2 - \lambda \text{Sin}^2\theta_2]$$

$$Q = 2M_1 \text{Cotg}\theta_1 + M_1 (1 - \lambda \text{tg}^2\theta_2)$$

$$Q = 2M_1 (1.5 \sqrt{\lambda} - 1) + M_1 \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)$$

$$Q = M_1 (3 \sqrt{\lambda} - 2 + 1 - 0.25\lambda)$$

$$Q = M_1 (-0.25\lambda + 3\sqrt{\lambda} - 1)$$

On constate que les deux méthodes conduisent au même résultat. (Pour la vérification expérimentale de cet exemple voir le Bulletin d'Information № 44 du C.E.B.).

10- CONCLUSION

De cette étude on peut conclure que, pour étudier les problèmes concernant les dalles en béton armé, on peut utiliser aussi bien la méthode d'équilibre que la méthode des travaux virtuels et qu'il n'y a aucune condition spéciale à respecter dans l'application de la méthode d'équilibre.

Il faut toutefois remarquer que pour les dalles simples à un seul panneau la méthode des travaux virtuels est plus avantageuse car, l'établissement de l'équation du travail permet de résoudre plus rapidement le problème. Mais pour les dalles continues à plusieurs panneaux, l'établissement de l'équation du travail est laborieux tandis que l'étude de l'équilibre de chaque partie de dalle ne présente aucune difficulté. Il est donc préférable, dans ce cas, d'utiliser la méthode d'équilibre qui permet d'établir plus facilement les équations nécessaires pour déterminer les paramètres.

Pour les dalles à plusieurs panneaux le nombre d'équations risque d'être relativement élevé et, pour résoudre le système il pourra être nécessaire de faire appel aux ordinateurs.