متد اجزاء معین و کاربرد آن در طراحی حفاریهای معدنی

*Tqe Finite Element Method

نوشتهٔ :

دکتر داود فرهمند

M. SC. (MIN. ENG.), PH. D.

استادیار دانشکدهٔ علم و صنعت

چکیده :

درعصرحاضر پیچیدگی طراحی ورقابت دربازارهای جهان تحقیق برای دسترسی به متدهای پیشرفته درتجزیه‌وتحلیل ومحاسبه تنشهای ایجاد شده دریک ساخته‌را ایجاب نموده است. درممالک پیشرفته دنیا با برخورداری ازپیشرفتهای شگرفی که در زمینه استفاده ازماشینهای محاسب الکترونیکی که درچند سال اخیر انجام گرفته متدهای ریاضی خای روشهای تجربی را گرفته است یکی‌از متدهای فوق که مورد توجه بیشتر واقع شده و تحقیقات زیادی در آن انجام گرفته است متد اجزاء معین می‌باشد که‌‌ا در صنایع مختلف از قبیل هواپیماسازی، کشتی‌سازی، سدسازی‌وهمچنین طراحی حفاریهای‌زیرزمینی وغیره مورد استفاده قرارگرفته‌است.

دراین مقاله فلسفه متد اجزاء معین بطور ساده و مختصربیان شده است. با توجه باینکه طرح مدل اولین مرحله درکاربرد متدمیباشد وآشنائی کامل به‌آن الزامی است وتاکنون درمقاله‌ای بطول کامل بررسی نشده است دراینجا طرح مدل دوبعدی بطورمفصل مطالعه شده است که صرفاً نتیجه تجربیات نگارنده میباشد وبالاخره درآخرین قسمت باطرح دهها مدل ازمسائل معمول درطراحی حفاریهای معدن کاربرد متدفوق‌مورد بررسی قرارگرفته وتوزیع تنش دراطراف نواحی حفاری شده تعیین گردیده است.

تعریف متد:

متد اجزاء معین بطورخلاصه عبارت است از تجزیه مدل واقعی به اجزاء نسبتاً کوچک با شکل هندسی مثلث، مربع، متوازی‌الاضلاع وغیره در دوبعد وهرم ومکعب وغیره درسه‌بعد، اجزاء درنقاط تقاطع بیکدیگر متصل شده‌اند وبارهای خارجی بوسیله نیروهای وارد به نقاط اتصال مرزی اعمال می‌شود سپس ماتریس مبین ضریب سفتی هرجزء محاسبه شده پس‌از تلفیق با یکدیگر ضریب سفتی مدل معین می‌شود. باداشتن ضریب فوق حل‌مسئله تبدیل به‌حل یکدستگاه معادلات که تعداد آنها دوبرابر تعداد نقاط اتصال است می‌گردد. جوابهای دستگاه فوق تغییرمکان درنقاط فوق‌الذکر است که با استفاده ازآن به سادگی می‌توان تنش‌را نیزمحاسبه نمود. تمام عملیات فوق بوسیله کامپیوتر انجام شده وزمان لازم بستگی‌مستقیم به‌تعداد نقاط اتصال وشرایط مرزی دارد.

تحلیل ریاضی متد:

رابطه بین نیروها درنقاط اتصال یک جزء «e» را میتوان بصورت زیرنوشت:

$$\left[F\right]^{e}=\left[K\right]^{e}\left[\delta\right]+\left[F\right]^{e}_{\varepsilon_\circ}+\left[F\right]^{e}_{\rho}+\left[F\right]^{e}_{\sigma_\circ} \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)مولفه های بردار F عبارتنداز نیروهای ایجاد شده‌درنقاط اتصال جزء e واندیسهای $\varepsilon_\circ$, ρ , $\sigma_\circ$ مبین عامل ایجاد نیروهای فوق می‌باشد که به‌ترتیب عبارتنداز:

– تغییرشکل نسبی اولیه که ممکن است دراثر حرارت یاانقباض ویاتبلور بوجودآید.

– نیروهای داخلی ازقبیل وزن وفشارآب موجود در روزنه های جسم.

– تنش اولیه ازقبیل تکتونیک.

ماتریس $[K]^e$ ضریب سفتی ومولفه های بردار $[\delta]^e$ تغییرمکان درنقاط اتصال جزء e می‌باشد.

اگرفرض کنیم مولفه های بردار [f] تغییرمکان درنقاط جزء e باشد رابطه‌آن با تغییرمکان درنقاط اتصال جزء e بشکل زیرخواهد بود.

$$\left[f\right]=\left[N\right]\left[\delta\right]^{e} \qquad (۲)$$

مولفه‌های بردار N توابعی ازمختصات نقاط اتصال می‌باشد که تابع شکلی خوانده می‌شود. تغییر شکل نسبی درداخل جزء e را میتوان از رابطه زیرمحاسبه کرد.

$$[\varepsilon]=[A]\,[f] \qquad (۳)$$

وقتیکه [A] ماتریس دیفرانسیل است.

درصفحه تنشها رابطه (۳)را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \circ\\ \circ & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} \qquad (٤)$$

u و v مولفه های بردار f درجهت محور x و y می‌باشد.

باترکیب دو رابطه(۳) و (٤) داریم.

$$[\varepsilon[=[A]\,[N]\,[\delta]^e=[B]\,[\delta]^e \qquad (۵)$$

وبالاخره تنش‌را می‌توان از رابطه زیرمحاسبه نمود.

$$[\sigma]=[D]\,([\varepsilon]-[\varepsilon_\circ])+[\sigma_\circ] \qquad (٦)$$

[D] ماتریس‌الاستیته نامیده می‌شود که درضمیمه ٤ برای اجسام‌الاستیک وایزوتوپ تعیین شده است.

فرض کنیم بردار p بامولفه های x و y مبین نیروهای‌داخلی باشد که برواحد حجم وارد می‌شود.

برای تعادل دستگاه یک تغییرمکان فرضی $[d\delta]^e$ درنظر گرفته مقدار کار انجام شده توسط نیروهای داخلی و خارجی‌را معادل یکدیگر قرار می‌دهیم.

$$(d[\delta]^e)^T[F]^e = \text{کارانجام شده بوسیله نیروهای خارجی} \quad (٧)$$

$$(d[\varepsilon])^T[\sigma] - (d[f])^T[p] = \text{کارانجام شده بوسیله نیروی داخلی برواحد حجم} \quad (٨)$$

اگر از روابط (۲و۳) دیفرانسیل گرفته در رابطه(۸) قرار دهیم داشت.

$$(d[\delta]^e)^T([B]^T[\sigma] - [N])^T[p]) = \text{کارانجام‌شده بوسیله نیروهای داخلی برواحد حجم} \quad (٩)$$

بعداز مساوی‌قراردادن کارهای‌داخلی وخارجی‌انجام شده‌دریک‌تغییرمکان فرضی $[d\delta]^e$وجاگذاری $[\varepsilon]$, $[\sigma]$ از روابط (۵و۶)در رابطه(۹) خواهیم خواهیم داشت.

$$[F]^e = \int_v [B]^T[D][B]d(v)[\delta]^e - \int_v [B]^T[D]\,[\varepsilon_0]d(v) + \int [B]^T[\sigma_0]d(v) - \int [N]^T[p]d(v) \quad (١٠)$$

بامقایسه روابط (۱ و ۱۰) خواهیم داشت.

$$[K]^e = \int_v [B]^T[D][B]d(v) \quad (١١)$$

$$[F]^e_\rho = -\int_v [N]^T[p]d(v) \quad (١٢)$$

$$[F]^e_{\varepsilon_0} = -\int_v [B]^T[D][\varepsilon_0]d(v) \quad (١٣)$$

$$[F]^e_{\sigma_0} = \int_v [B]^T[\sigma_0]d(v) \quad (١٤)$$

تنش درهرنقطه‌را می‌توان از رابطه زیرحساب کرد.

$$[\sigma]^e = [D][B][\delta]^e - [D][\varepsilon_0] - [\sigma_0] \quad (١٥)$$

محاسبه ضریت سفتی اجزاء دواعدی

ضریب سفتی عبارت است ازنسبت نیرو به‌تغییرمکان که میتوان آنرا برای اجزاء با اشکال مختلف از رابطه زیرمحاسبه نمود.

$$[K] = \int_s [B]^T[D]\,[B]ds \quad (١٦)$$

در رابطه (۱۶) $[K]$ و $[B]$ و $[D]$ بترتیب عبارتنداز ضریب‌سفتی وضریب شکلی وضریب الاستیکی‌دراجزاء مثلثی‌شکل با فرض ثابت بودن تغییر شکل نسبی ضریب شکلی $[B]$ عدد ثابت خواهد بود درنتیجه رابطه (۱۶)را میتوان بشکل ساده زیرنوشت.

$$[K] = [B]^T[D]\,[B]S \quad (١٧)$$

S عبارت است ازمساحت جزء مثلثی

درضمیمه ۱ و ۲ روش محاسبه ضریب‌شکلی [B] بترتیب برای اجزاء مثلثی وچهارضلعی‌بررسی شده است همچنین درضمیمه ٤ ضریب‌الاستیکی برای اجسام‌الاستیک وایزوترپ تعیین شده است.

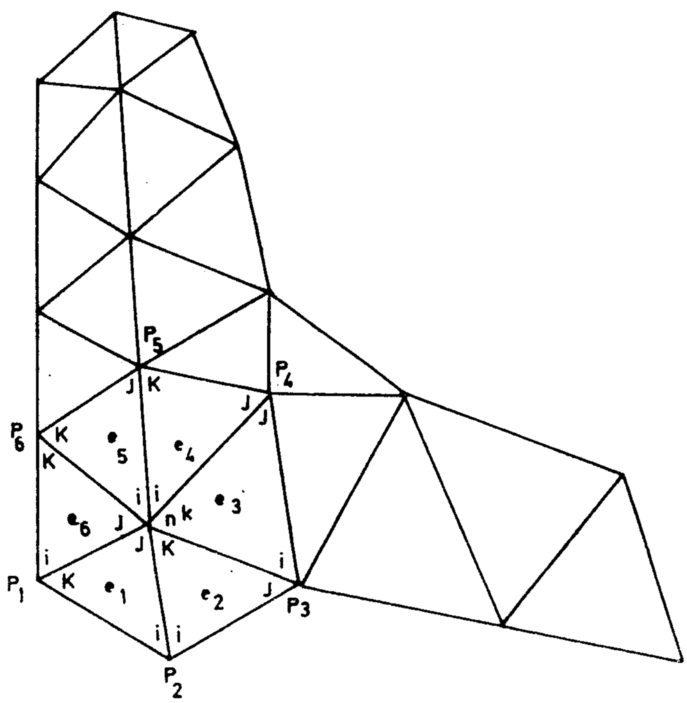
تعیین ضریب سفتی مدل دوبعدی

هریک از مولفه های ماتریس مبین ضریب سفتی مدل را میتوان برحسب ضرایب سفتی اجزاء متشکل مدل از رابطه زیرتعیین نمود.

$$K_{in}=\sum\left[K_{in}\right]^{e} \qquad (۱۸)$$

برای تشکیل ماتریس ضریب سفتی نقاطی‌را که اجزاء مدل بیکدیگرمتصل شده‌اند محاسبه نمود.

مثال: درشکل (۱) نقطه n بوسیله اجزاء e_1 و e_2 و e_3 و e_4 و e_5 و e_6 نقاط p_1 و p_2 و p_3 و p_4 و p_5 و p_6 محصور شده است ضریب سفتی درنقطه n را میتوان بشرح زیرمحاسبه نمود:



شکل ۱- تعین ضریب سفتی نقطه n

ضریب سفتی حاصل‌از نقاط منطبق برنقطه n عبارت است‌از:

$$K_{nn}=K^{e1}_{jj}+K^{e2}_{kk}+K^{e3}_{kk}+K^{e4}_{ii}+K^{e5}_{ii}+K^{e6}_{jj}$$

وضریب سفتی حاصل‌از بقیه نقاط اتصال باستثنای p_1 و p_2 و p_3 و p_4 و p_5 و p_6 برابر صفرمیباشد.

$$K_{np1}=K^{e_1}_{ji}+K^{e_2}_{ki}$$

$$K_{np2}=K_{kj}^{e_2}+K_{ki}^{e_3}$$

$$K_{np3}=K_{kj}^{e_3}+K_{ij}^{e_4}$$

$$K_{np4}=K_{ik}^{e_4}+K_{ij}^{e_5}$$

$$K_{np5}=K_{ik}^{e_5}+K_{jk}^{e_6}$$

$$K_{np6}=K_{ji}^{e_6}+K_{jk}^{e_1}$$

بهمین ترتیب ضریب سفتی‌را برای یک‌یک نقاط میتوان محاسبه نمود.

لازم بتذکراست که روش فوق برای یک مدل متشکل از چندین هزار نقطه اتصال در کامپیوتر بسادگی و باسرعت قابل اجراء بوده است وبه روشهای دیگر که محتاج به حافظه بیشتری است ارجحیت دارد.

فرم محاسبات در کامپیوتر وزمان لازم

نگارنده چهاربرنامه بزبان FoRTRAN IV آماده نموده است. برنامه اول جهت تهیه مدل بوده که اطلاعات ورودی را برای برنامه دوم که وظیفه محاسبات تغییرمکان و تنش درهرنقطه اتصال را دارد روی نوار ضبط مینماید برنامه سوم بااستفاده از نتایج حاصل از برنامه دوم که روی نوار دیگری ضبط شده خطوط هم‌تنش‌را رسم می‌کند وبالاخره‌برنامه‌چهارم درصورت لزوم بااستفاده ازنوار برنامه اول شکل مدل‌را رسم می‌نماید.

در زیربطور مختصرنحوه محاسبات‌را دربرنامه دوم مورد مطالعه قرارمیدهیم.

اطلاعات ورودی لازم برای برنامه دوم که بصورت مختصات نقاطی که اجزاء را بیکدیگر متصل نموده ونقاط متشکل هرجزء وشرایط مرزی که بوسیله برنامه اول‌تهیه شده همراه بامشخصات‌نیروهای اعمال شده بمدل می‌باشد. با استفاده از اطلاعات ورودی فوق کامپیوتر ماتریس ضریب سفتی یک‌یک اجزاء را محاسبه نموده و بااستفاده ازآن ماتریس ضریب‌سفتی مدل راطبق روش ذکرشده تعیین می‌نماید لازم‌بتذکر است که جهت بهره‌گیری هرچه بیشتراز ظرفیت کامپیوتر تنها جمله‌های غیرصفر ماتریس ضریب سفتی مدل درحافظه ماشین ضبط گردیده و بااستفاده از روش Gauss – Sidel iteration سیستم معادلات تعادل حل می‌شود. اگر R_n نیروی خارجی اعمال شده درنقطه n و K_{ni} ضریب سفتی نقطه n و r_i تغییرمکان درنقطه i باشد می‌توان نوشت.

$$R_n=\sum_{i=1,N} K_{ni}r_i \qquad (19)$$

$$R_n=\sum_{i=1,n-1} K_{ni}r_i+K_{nn}r_n+\sum_{i=n+1,N} K_{ni}r_i$$

اگر C شماره تکرارسیکلها باشد خواهیم داشت.

$$r_n^{(c+1)} = K_{nn}^{-1}\left[R_n - \sum_{i=1,n-1} K_{ni}\, r_i^{(c+1)} - \sum_{i=n+1,N} K_{ni}\, r_i^{(c)}\right] \qquad (۲۰)$$

چنانچه از رابطه(۲۰) مشاهده میشود مقدار r درهرسیکل برحسب مقدار r درسیکل قبلی محاسبه میشود و این عمل آنقدر تکرار میشود تاتفاوت r در دوسیکل متوالی از یک مقدار ثابت کوچکتر شود بمنظور آنکه سرعت همگرائی یابعبارت دیگرسرعت حل معادلات زیادتر شود برای محاسبه r تفاضل آنرا در دو سیکل متوالی دریک ضریب β ضرب نموده بمقدار r درسیکل قبلی اضافه مینمائیم اگر $\Delta r_n^{(C)}$ تفاوت بین r در دو سیکل متوالی باشد میتوان نوشت.

$$\Delta r_n^{(c)} = r_n^{(c+1)} - r_n^{(c)} \qquad (۲۱)$$

با جاگذاری $r_n^{(c+1)}$ از رابطه (۲۰) در رابطه (۲۱) خواهیم داشت

$$\Delta r_n^{(c)} = K_{nn}^{-1}\left[R_{nn} - \sum_{i=1,n-1} K_{ni}\, r_i^{(c+1)} - \sum_{i=n,N} K_{ni}\, r_i^{(c)}\right]$$

وبنابراین میتوان نوشت

$$r_n^{(c+1)} = r_n^{(c)} + \beta \Delta r_n^{(c)}$$

ضریب β بستگی بنوع مدل وشرایط بارگذاری دارد ولی ثابت شده است که مقادیر 1.8 تا 1.95 بهترین نتایج را میدهد.

پس از تعیین تغییر مکان درهرنقطه بادقت موردنظر تنش از رابطه (۱۵) محاسبه میگردد تجربه برروی مدلهای مختلف نشان داده است که برنامه فوق بدون ایجاد مسائل همگرائی برای مطالعه مدلهای الاستیک در دوبعد ودرصفحه تنشها بسیار مناسب است درکامپیوتر نوع IBM 7090 زمان لازم برای محاسباترا میتوان از رابطه زیرمحاسبه نمود.

$$\tau = 0.002\, c\, n$$

τ زمان برحسب ثانیه و c تعداد سیکلهای تکراری و n تعداد نقاط اتصال است.

منابع خطا

تمام مراحل درکاربرد متداجزاء معین ازطرح اولیه مدل وفرضیات لازم تامحاسبات آن درکامپیوتر بایستی بادقت‌واحتیاط مورد مطالعه‌قرارگیرد زیرا ممکن است یک‌خطای کوچک دهها هزار برابر شده‌تبدیل به‌یک خطای قابل ملاحظه شود قسمتی‌از منابع خطا عبارتنداز:

— مطالعه جسم بصورت متشکل‌ازاجزاء کوچک بهم چسبیده‌درنقاط اتصال

— فرض یک تابع تقریبی برای مطالعه تغییرشکل نقاط هرجزء بتنهائی،

— انتگراسیون تقریبی،

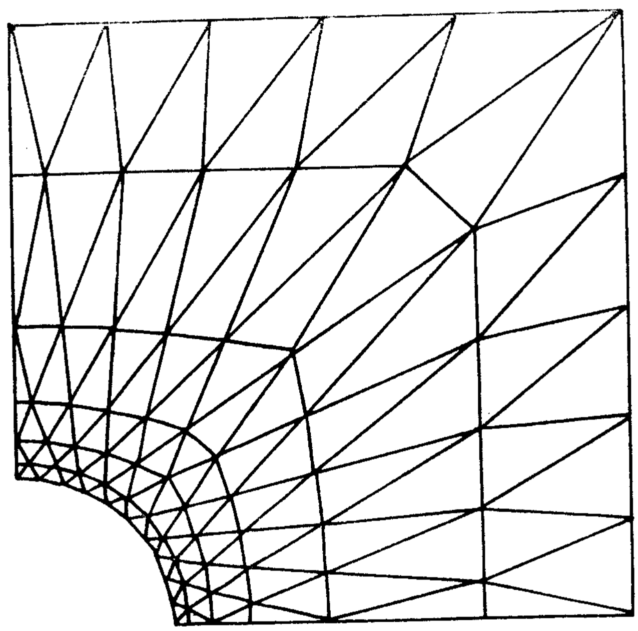
— شکل نیروهای خارجی،

— شکل قرارگرفتن اجزاء،

— نظم قرارگرفتن اجزاء.

قسمتی از موارد فوق دربخش طرح مدل مورد بررسی قرارخواهد گرفت.

بمنظور تعیین حددقت برنامه نوشته شده یک‌صفحه شامل یک‌سوراخ دایره‌ای مطالعه شده است. به‌علت وجوددومحور تقارن‌فقط یک‌چهارم مدل واقعی بررسی شده است شکل (۲). درشکل (۳) نتایج حاصل با استفاده ازمتد اجزاء معین با راه حل دقیق ریاضی (ضمیمه۳) که دراین مورد بخصوص امکان‌پذیر است مقایسه گردیده که نماینده دقت‌برنامه نوشته شده می‌باشد. واضح است که جهت نتایج دقیقتر بازهم میتوان اجزاءرا کوچکتر انتخاب نمود.



شکل ۲ ـ مدل یک چهارم صفحه دارای یک سوراخ دایره‌ای

طرح مدل

اولین و مهمترین مرحله درکاربرد متد اجزاء معین طرح مدل است که بایستی باکمال دقت و با توجه به‌خطای مجاز، مشخصات کامپیوتر در دسترس ونیروهای خارجی طرح گردد بنابراین لازم است‌قبل‌از شروع موارد زیرمشخص گردد.

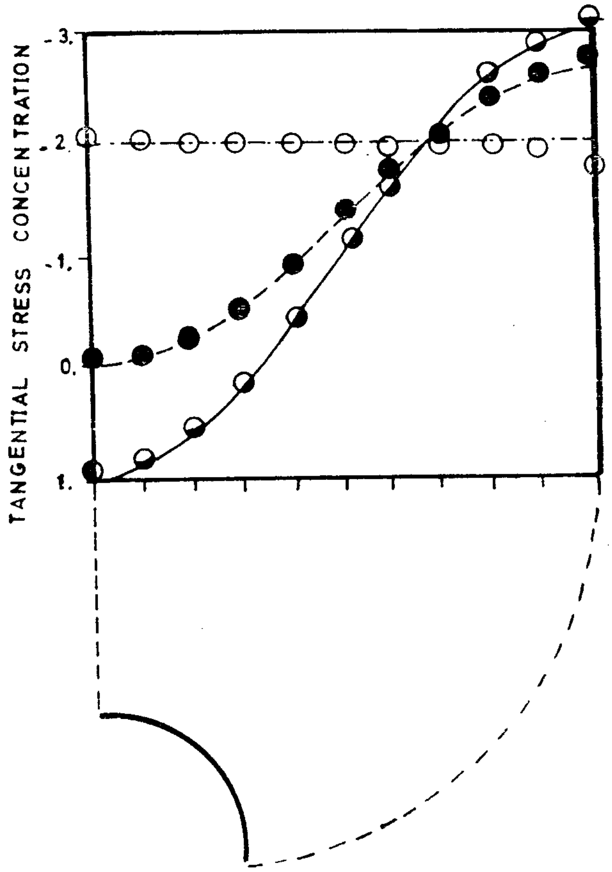
۱ـ شکل اجزاء: شکل اجزاء وتعداد نقاط اتصال یک‌جزء باید باتوجه به ملزمات مسئله وخطای مجاز بطوری که به بهترین شکل ممکن برشرایط حدی مدل واقعی منطبق شود تعیین گردد. تعداد درجات آزادی نقاط اتصال‌نیزبستگی به‌شرائط مدل واقعی‌دارد. یک مدل ممکن است دارای اجزاء بااشکال‌مختلف باشد ساده ترین شکل اجزاء مثلثی با سه‌نقطه اتصال و درجه آزادی دو درهرنقطه است که دارای مزایای زیر است:

— درگیرنشدن باانتگراسیونهای پیچیده ودرنتیجه‌ساده شدن محاسبات وکاهش زمان لازم‌برای‌آن:

— انطباق دقیق وپر کردن حدود مرزی منحنی‌شکل،

— ساده بودن محاسبه ضریب سفتی اجزاء.

هرجزء مثلثی بازاویه داخلی بزرگتراز ۹۰ درجه قابل قبول است ولی بهتراست ازبکاربردن اجزاء مثلثی کوچک بازاویه منفرجه حذر نموده مثلث متساوی‌الاضلاع کمترین خطارا موجب میشود.



شکل ۳ ـ مقایسه راه حل تئوری با متد اجزاء معین

۲ـ اندازه مدل: اندازه مدل بایستی آنقدر بزرگ باشد که نقاط اتصال مرزی تحت تأثیر نواحی با توزیع نامتجانس تنشها قرار نگیرد درعین‌حال باید مسئله اقتصادی بودن را درمدنظر داشت زیرا با بزرگتر شدن مدل تعداد اجزاء زیاد شده ودرنتیجه احتیاج به کامپیوتر باحافظه بیشتربوده وزمان لازم برای‌محاسبات افزایش خواهد یافت.

مناسبترین اندازه مدل‌را باتوجه بهردومسئله دقت وهزینه میتوان بترتیب زیرتعیین نمود:

برای مدل بایک ناحیه تمرکزتنشها مثلاً یک تونل ابعاد مدل را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود.

$$\omega = 4W/S$$

$$h = 4H/S$$

وقتیکه ω و h بترتیب طول وعرض مدل

W و H بترتیب طول وعرض تونل و S مقیاس میباشد.

درصورت وجود چندین ناحیه تمرکز تنشها مثلاً چندین تونل نزدیک بیکدیگر لازم است حدود مرزی مدل حداقل درفاصله‌ای معادل دوبرابر قطرتونل ازمرکز نزدیکترین تونل قرارگیرد.

۳ـ اندازه کوچکترین جزء: یکی‌از طرق کاهش خطای حاصل از مطالعه مدل متشکل از اجزاء کوچک بجای مدل واقعی مخصوصاً درنواحی تمرکزتنشها کوچکتر انتخاب نمودن اجزاء می‌باشد ازآنجائی که دراستفاده ازکامپیوتر یک خط درحقیقت یک نوار باضخامت معین خواهد بود نه یک خط فرضی بدون ضخامت بنابراین کوچک کردن اجزاء دارای حدی بود که کامپیوتر برای‌آن تنظیم شده است.

فرض کنیم کامپیوتر برای دقت اندازه‌گیری تا یک‌هزارم بزرگترین بعد مدل تنظیم شده است در این‌صورت ضخامت خطرا میتوان از رابطه زیرحساب نمود.

$$\tau = 2/1000\ L$$

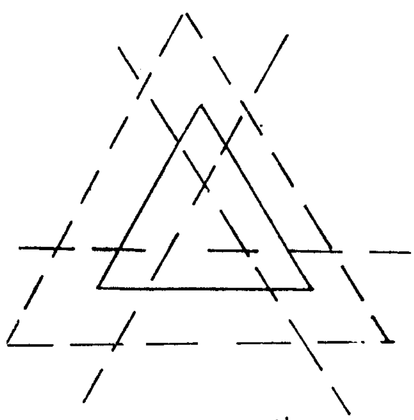
τ ضخامت خط و L بزرگترین بعد مدل می‌باشد.

بنابراین مثلاً درمورد جزء مثلثی‌شکل درصورتیکه یکی‌از رئوس مثلث در داخل نوار ضلع مقابل قرارگیرد جزء فوق درداخل کامپیوتر بدون مفهوم خواهدبود شکل (٤)

حد کوچکترین بعد جزء مثلثی‌را میتوان از رابطه تقریبی زیرتعیین نمود.

$$l > 1/200\ L$$

l کوچکترین بعد جزء مثلثی و L بزرگترین بعد مدل است.



شکل ۴

٤ـ شکل توزیع اجزاء: شکل توزیع اجزاء یکی از فاکتورهای مهم درتعیین درجه دقت میباشد جهت کاهش خطالازم است شماره‌گذاری نقاط اتصال وهمچنین توزیع اجزاء تاحدامکان منظم بوده واجزاء درنواحی باتمرکزتنشها باندازه کافی کوچک انتخاب شوند.

۵ـ نیروهای وارد بر مدل: این قسمت با توجه بمسائل موجود واهمیت‌آن در طراحی حفاریهای معدنی بطورمفصل دربخش بعدی مورد مطالعه قرارگرفته است.

ناتمام

ضمیمه ۱

محاسبه ضریب شکلی اجزاء مثلثی باسه‌نقطه اتصال

بافرض ثابت‌بودن تغییرشکل نسبی اجزاء رابطه خطی تغییرمکان ومختصات هرنقطه جزءرامیکن است بشکل زیرنشان داد.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \qquad (A-1)$$

اگررابطه $(A-1)$ را برای سه‌نقطه اتصال مثلث بنویسیم نتیجه شش معادله باشش مجهول A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و A_5 و A_6 خواهد بود حل‌معادلات فوق وقراردادن نتایج در $(A-1)$ (رابطه تغییرمکان درهر نقطه مثلث برحسب مختصات نقطه مربوطه وتغییرمکان درنقاط اتصال بصورت زیردرخواهد آمد.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 1/2S \begin{bmatrix} AI & \circ & Aj & \circ & AK & \circ \\ \circ & AI & \circ & Aj & \circ & AK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \qquad (A-2)$$

وقتیکه:

$$AI = a_i + b_i X + C_i y$$
$$Aj - a_j + b_j X + C_j y$$
$$AK = a_k + b_k X + C_k y$$

$$a_i = X_j y_k - X_k y_j \qquad a_j = X_k y_i - X_i y_k \qquad a_k = X_k y_i - X_i y_k$$
$$b_i = y_j - y_k \qquad b_j = y_k - y_i \qquad b_k = y_k - y_i$$
$$C_i = X_k - X_j \qquad C_j = X_i - X_k \qquad C_k = X_i - X_k$$

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & X_i & y_i \\ 1 & X_j & y_j \\ 1 & X_k & y_k \end{vmatrix}$$

درصفحه تنشها رابطه تغییرشکل نسبی ومطلق درهرنقطه‌را میتوان بصورت زیرنوشت:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \circ \\ \circ & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad (A-3)$$

با ترکیب روابط (A-۲) و (A-۳) تغییر شکل نسبی در هرنقطه مثلث برحسب تغیرمکان در نقاط اتصال مثلث بصورت زیرخواهد بود.

$$[\varepsilon[= \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} b_i & \circ & b_j & \circ & b_k & \circ \\ \circ & c_i & \circ & c_j & \circ & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_i & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \qquad (A-4)$$

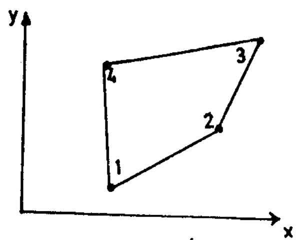
بامقایسه روابط (A—٤) و رابطه (٥)ماتریس [B]عبارت است‌از:

$$[B] = \frac{1}{2S}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}$$

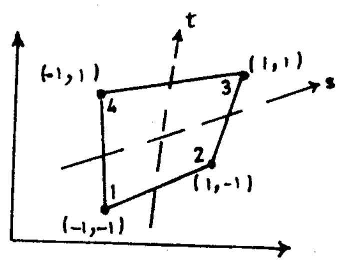
ضمیمه ۲

محاسبه ضریب شکلی اجزاء چهارضلعی باچهارنقطه

درشکل(۱) چهارضلعی بارئوس ۱و۲و۳و٤ در دستگاه مختصات نشان‌داده شده است. محورهای x و y را طوری فرض‌میکنیم که مختصات رئوس چهارضلعی مطابق شکل(۲) باشد.



(B - 1 شکل)



(B - 2 شکل)

رابطه مختصات هرنقطه در داخل چهارضلعی را در دودستگاه مختصات st و xy میتوان بصورت زیرنوشت:

$$x(s,t) = \sum_{i=1,4} h_i x_i$$

$$y(s,t) = \sum_{i=1,4} h_i y_i$$

hi را میتوان ازتوابع زیرتعیین نمود.

$$h_1 = 1/4\ (1-S)\ (1-t)$$
$$h_2 = 1/4\ (1+S)\ (1-t)$$
$$h_3 = 1/4\ (1-s)\ (1+t)$$
$$h_4 = 1/4\ (1+s)\ (1+t)$$

رابطه تغییرمکان‌را در دودستگاه مختصات st و xy میتوان بااستفاده ازانترپولاسیون به‌صورت زیرنوشت.

$$u(s,t) = \sum_{i=1,4} h_i u_i$$

$$v(s,t) = \sum_{i=1,4} h_i v_i$$

ازآنجائیکه تغییرشکل نسبی عبارت است ازمشتق تغییرمکان خواهیم داشت.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1,4} \frac{\partial h_i}{\partial x} u_i$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \sum_{i=1,4} \frac{\partial h_i}{\partial y} v_i$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} u_i + \frac{\partial v}{\partial x} v_i = \sum_{i=1,4} \frac{\partial hi}{\partial y} u_i + \sum_{i=1,4} \frac{\partial h_i}{\partial x} v_i$$

باتوجه بقوانین مشتقات نسبی رابطه مشتقات تابع h در دودستگاه مختصات st و xy بشکل زیراست.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{j^*} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial s} \\ \\ -\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial s} \\ \\ \frac{\partial h}{\partial t} \end{bmatrix}$$

$$j^* = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t}$$

پس از مشتق گیریهای لازم وخلاصه کردن روابط خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \\ \varepsilon_y \\ \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h^4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h^4}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس ضریب شکلی [B] را میتوان بشکل زیر نوشت

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

ضمیمه ۳

راه‌حل تئوری جهت‌محاسبه تغییرمکان وتنش دراطراف یک‌تونل طویل بامقطع دایره

توزیع تنشها وجابجائی درحوالی یک تونل افقی طویل‌را میتوان با مطالعه تنش وتغییرمکان در اطراف یک سوراخ دایروی دریک‌صفحه غیرمحدودتعیین نمود. مسئله فوق اولین بار بوسیله G. KIRCH حل شده‌که نتایج‌آن در زبرداده شده است.

$$\sigma_x=\frac{1}{2}(S_x+S_y)\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{1}{2}(S_x-S_y)\left(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma\theta=\frac{1}{2}(S_x+S_y)\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{1}{2}(S_x-S_y)\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_r\theta=-\frac{1}{2}(S_x-S_y)\left(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

$$u=\frac{1}{E}\left[\left(\frac{S_x+S_y}{2}\right)\left(r+\frac{a^2}{r}\right)+\left(\frac{S_x-S_y}{2}\right)\left(r-\frac{a^4}{r^3}+\frac{4a^2}{r}\right)\cos 2\right]$$

$$-\frac{v}{E}\left[\left(\frac{S_x+S_y}{2}\right)\left(r-\frac{a^2}{r}\right)-\left(\frac{S_x-S_y}{2}\right)\left(r-\frac{a^4}{r^3}\right)\cos 2\theta\right]$$

$$v=\frac{1}{E}\left[-\left(\frac{S_x-S_y}{2}\right)\left(r+\frac{2a^2}{r}+\frac{a^4}{r^3}\right)\sin 2\theta\right]$$

$$-\frac{v}{E}\left[\left(\frac{S_x-S_y}{2}\right)\left(r-\frac{2a^2}{r}+\frac{a^4}{r^3}\right)\sin 2\theta\right]$$

وقتیکه :

a شعاع دایره مقطع

r فاصله شعاعی ازمرکز دایره

S_x فشار افقی

S_y فشار عمودی

u تغییرمکان افقی

v تغییرمکان عمودی

σ_r تنشی مماسی

σ_e تنش شعاعی

$v_{r\theta}$ تنش برشی درصفحه شامل مماسی وشعاع دایره

θ زاویه بین خط واصل نقطه به‌مرکز ومحور افقی

E ضریب الاستسیته

v ضریب پوسین

ضمیمه ٤

تشکیل ماتریس [D] برای اجسام‌الاستیک وایزوتروپ

جسمی‌را ایزوترپ گویند که خواص مکانیکی‌آن درجهات مختلف یکسان باشد.

رابطه تغییرشکل نسبی وتنش‌را درجسم ایزوترپ والاستیک میتوان بصورت زیرنوشت.

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= 1/E\,[\sigma_x - \nu(\sigma - \sigma_z)]\\
\varepsilon_y &= 1/E\,[\sigma_y - \nu(\sigma_z - \sigma_x)]\\
\varepsilon_z &= 1/E\,[\sigma_z - \nu(\sigma_x - \sigma_y)]\\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\,\tau_{xy}\\
\gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\,\tau_{yz}\\
\gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\,\tau_{zx}
\end{aligned}\right\}\quad (D-1)$$

برای حل مسئله در دوبعد یکی‌از دو وضعیت زیر برحسب شرایط مسئله باید فرض شود

۱- مدل منطبق برصفحه تغییرشکل است Plane Strain

دراین مورد لازم است جسم دریک بعد نسبت به‌ابعاد دیگرطویل بوده وشکل هندسی‌وبارگذاری آن بطور محسوسی تغییرننماید (یک تونل افقی در داخل سنگ) بنابراین میتوان گفت تغییرمکان درامتداد بعد فوق‌الذکر برابر صفراست ودرنتیجه خواهیم داشت.

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \qquad (D-2)$$

باجاگذاری رابطه $(D-2)$ در روابط $(D-1)$ وحل‌آن برای σ_x و σ_y و σ_z خواهیم‌داشت.

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)\ (1+2\nu)}\Big[(1-\nu)\ \varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\Big]\\
\sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}\Big[(\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y\Big]\\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\ \gamma_{xy}
\end{aligned}\right\}\quad (D-3)$$

روابط فوق‌را میتوان بشکل زیرخلاصه نمود.

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \Big[D\Big]\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \qquad (G-4)$$

که درآن

$$\Big[D\Big] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0\\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu)\end{bmatrix}$$

۲- مدل منطبق برصفحه تنشها است Plane Stress

دراین مورد یک‌بعد نسبت به دوبعد دیگر خیلی کوچک بوده وهیچگونه بارگذاری‌در روی‌صفحه مدل انجام نشده است (یک صفحه سوراخ‌دار) بنابراین میتوان نوشت.

$$\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0 \qquad (D-6)$$

با جاگذاری رابطه $(D-6)$ در روابط $(D-1)$ و حل آن برای σ_x و σ_y و σ_{xy} ماتریس (D) به صورت زیر

خواهد بود.

$$\left[D\right] = \frac{E}{1-v^2}\begin{bmatrix} 1 & v & \circ \\ v & 1 & \circ \\ \circ & v & (1-v)/2 \end{bmatrix} \qquad (D-7)$$

REFERENCES

1. D. FARAHMAND.
A Study, in two dimensions, of she Stress distribution around Some mining configurations, using the finite element method.
Ph. D. thesis, department of mining engineering university of Strathclyde, GLASGOW.
2. R.W. CLOUGH
The ftnie element method in plane stress analysis. Proc. and ASCE Conference on electronic Computation.
Pittsburgh, September 1960.
3. E.L. WILSON
Frnite element of two dimentional structures, Ph. D. thesis, university of California, 1963.
4. ZIENKIEWICZ
The finite element method in engineeriny Science, McGraw-Hill 1972.