فرمول‌بندی شبکه برای آنالیز سیستمهای نیروی برق

نوشتهٔ

فرخ حبیبی اشرفی

مهندس برق (.MSc) ـ لوس‌آنجلس ـ کالیفرنیا

چکیده :

دراین مقاله خلاصه‌ای از عملیات مقدماتی ماتریسی بمنظور آنالیز سیستم‌های قدرت با استفاده از کامپیوتر عرضه خواهد شد .

مطالب مورد بررسی عبارتند از شبکهٔ پریمتیو ، توپولژی شبکه‌های الکتریکی ، تبدیل مختصات ماتریسهای ادمیتانس شمش و امپدانس شمش ، ماتریسهای امپدانس حلقه و ادمیتانس حلقه و توضیحات تکمیلی .

فرمول‌بندی یک مدل مناسب برای شبکه اولین‌قدم درمطالعه سیستم نیروی برق‌میباشد . این‌مدل بایستی‌مجموعه‌ای از ولتاژهای مربوط به شبکه را با مجموعه دیگری از شدت جریانهای شبکه مرتبط سازد .

معمولاً شبکه هائی که در سیستم نیروی برق بـا آنها سروکار داریم خیلی بزرگ هستند یعنی از صدها و یا شاید از هزاران شاخه تشکیل یافته اند و هنگامیکه شاخه های مختلف شبکه را بمنظور تشکیل دادن مدل کلی سیستم با هم ترکیب میکنیم باده‌ها هزار عملیات جبری مقدماتی مواجه خواهیم شد . چون معمولاً انسان این همه محـاسبات را با وجود صرف مقدار زیـادی وقت بـا دقت نسبتاً ضعیفی انجام میدهد بطوریکه یک اشتباه کافی‌است که تمام محاسبات را بی‌ارزش سازد روی این‌اصل بسیار مهم است که فرمول بندی شبکه بصورتی تهیه گردد که بتوان قسمت‌اعظم این کار را با کامپیوتر انجام داد . باین جهت واضح است که نیازمند به‌ایجاد روشهائی‌هستیم که سیستماتیک بوده وقابلیت استفاده ازکامپیوتر را داشته باشند .

ماهیت جدولی‌ماتریسها بخصوص‌آنها را برای برنامه نویسی کامپیوترهای عددی[1] خیلی مناسب ساخته است بنابراین طبیعی است که بایستی درجستجوی فنون مربوط به فرمول‌بندی ماتریسی شبکه باشیم .

---

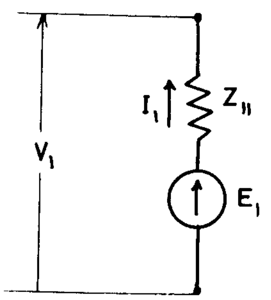
۱ —Digital Computer

ضمناً این روشها لازم‌است درمقابل تغییراتی که درشبکه صورت میگیرد قابلیت انعطاف داشته باشند بطوریکه بتوانیم با صرف حداقل محاسبات منظورمان را برآورده سازیم .

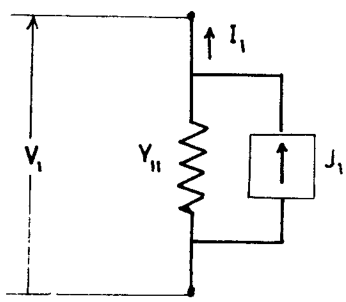
جمله های ماتریس شبکه به‌انتخاب متغیرهای مستقل از هم یعنی شدت جریانها و ولتاژها بستگی دارند و برحسب آنها ممکن است از نوع امپدانس ویا از نوع ادمیتانس باشند .

شبکه پریمیتیو[1]

هرشبکه از مجموعه یک سری شاخه ترکیب شده است . شاخه‌های شبکه ممکن است بیکی از صورتهائی باشند که درشکل (۱) نشان داده شده‌اند .



الف ـ شاخه حاوی نیروی محرکه (مولد ولتاژ)



ب ـ شاخه حاوی مولد جریان

شکل (۱)

معادلات مربوط با شاخه‌هائی که درشکل (۱) نشان داده شده‌اند بترتیب عبارتند از :

$$V_1 = E_1 - Z_{11} I_1 \qquad (۱)$$

$$I_1 = J_1 - Y_{11} V_1 \qquad (۲)$$

البته بدیهی است که اگر بین هریک ازاین شاخه‌ها و شاخه‌های دیگر شبکه ارتباط متقابل[2] وجود داشته باشد به معادله (۱) بایستی $\sum Z_m I$ — و بمعادله (۲) بایستی $\sum Y_m V$ — افزوده گردد . درمعادلات بالا E_1 و J_1 و Z_{11} و Y_{11} مقادیر معلومی هستند که از روی مشخصات شبکه و سیستم تعیین میشوند و V_1 و I_1 مجهول میباشند . بنابراین اگر شبکه‌ای از e شاخه تشکیل شده باشد برای هرشاخه آن میتوان یک معادله بصورت معادله (۱) یا معادله (۲) نوشت که مجموعاً e معادله تشکیل خواهند داد . این معادلات را میتوان بشکل ماتریسی زیر نوشت :

$$V = E - ZI \qquad (۳)$$

$$I = J - YV \qquad (٤)$$

۱ — Primitive Network

۲ — Mutual Coupling

درمعادلات بالا :

$$V=\begin{bmatrix} V \\ V \\ \cdots \\ V_e \end{bmatrix} \quad E=\begin{bmatrix} E \\ E \\ \cdots \\ E_e \end{bmatrix} \quad I=\begin{bmatrix} I \\ I \\ \cdots \\ I_e \end{bmatrix} \quad J=\begin{bmatrix} J \\ J \\ \cdots \\ J_e \end{bmatrix}$$

$$Z=\begin{bmatrix} Z_{11} & & & \\ & Z_{۲۲} & & \\ & & \cdots & \\ & & & Z_{ee} \end{bmatrix} \quad Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & & & \\ & Y_{۲۲} & & \\ & & \cdots & \\ & & & Y_{ee} \end{bmatrix}$$

مجموعه شاخه‌های شبکه بنام شبکه پریمیتیو نامیده میشود که بوسیله معادلات ماتریسی (۳) یا (٤) مشخص میگردد. بطوریکه ملاحظه میشود معادلات (۳) یا (٤) هریک از e معادله تشکیل شده‌اند ولی تعداد مجهولات که عبارتند از شدت جریانهای I و ولتاژهای V مساوی ۲e میباشند بنابراین e معادله لازم دیگر را بایستی از شرایطی که بواسطه بهم پیوستن شاخه‌ها بوجود میآیند بدست آورد تا اینکه سیستم قابل حل کردن باشد. این امر مستلزم دانستن توپولوژی(۱) شبکه است. بحث مفصل توپولوژی شبکه‌های الکتریکی خارج از حدود این مقاله است فقط نکات مختصری از آن که برای مطالب بعدی ضروری است یادآوری میشود.

ملاحظه : درچهار ماتریس V ، E ، I و J در سطرهای اول و دوم باید به ترتیب از بالا به پائین اندیس ۱ و ۲ اضافه شود.

توپولوژی شبکه‌های الکتریکی

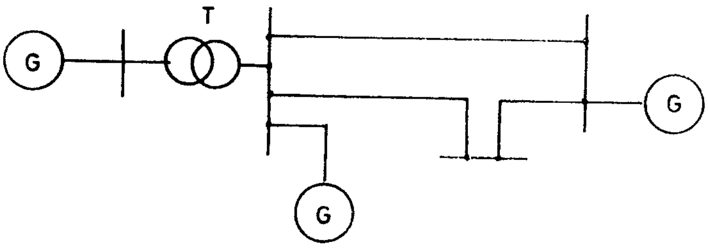
برای اینکه بتوان شکل هندسی شبکه را بیان کرد کافی است که بدون توجه به مشخصات عناصر مختلف شبکه شاخه‌های آنرا با خطوط ساده نشان داد. این خطوط شاخه(۲) وانتهایشان گره(۳) نامیده میشوند. شکل هندسی اتصال شاخه‌های شبکه بهمدیگر گراف(٤) نامیده میشود. اگر بین هردو گره لااقل یک مسیر وجود داشته باشد گراف را متصل(٥) و اگر برای هرشاخه گراف متصل جهتی درنظر بگیریم گراف را جهت‌دار مینامند. درآنالیز سیستمهای نیروی برق معمولاً با گرافهای متصل سروکار خواهیم داشت

۱ — Topology ۲ — Element ۳ — Node

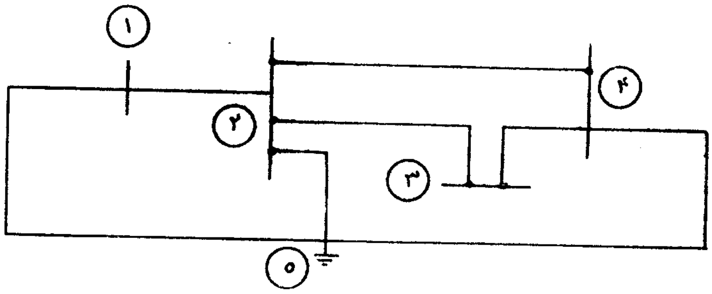
٤ — Graph ٥ — Connected graph

چون استفاده از روش نسبت بواحد[1] ارتباط مغناطیسی را که درمدار معادل ترانسفورماتورها وجود دارد حذف مینماید .

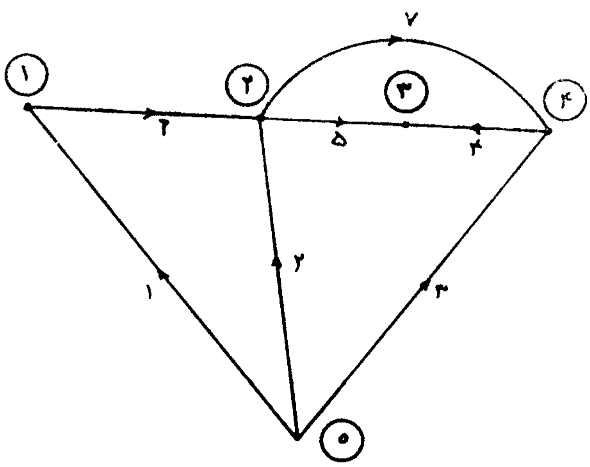
درشکل (۲) یک نمونه سیستم نیروی برق و گراف جهت‌دار مربوط به آن نشان‌داده شده است که بمنظور تسهیل درامر مطالعه و آنالیز تمام گره‌ها وشاخه های گراف شماره گذاری شده‌اند. معمولاً درسیستم نیروی برق گره‌ها را شمش[2] مینامند وشمش‌مشترك تمام مولدها را با شماره ۵ مشخص کرده و آنرا شمش مبناء[3] میخوانند .



الف ـ دیاگرام تک خطی سیستم نیروی برق



ب ـ مدار معادل



پ ـ گراف جهت دار سیستم بالا

شکل (۲)

۱ — Per unit method　　۲ — Bus　　۳ — Reference bus

کمترین تعداد شاخه‌هائی راکه برای وصل کردن تمام گره‌ها لازم هستند شاخه‌های اصلی[1] و بقیه شاخه‌ها را شاخه‌های رابط[2] مینامند . اگر تعداد گره‌های گراف n باشد تعداد شاخه‌های اصلی b از رابطه زیر تعیین میشوند :

$$b=n-1 \qquad (5)$$

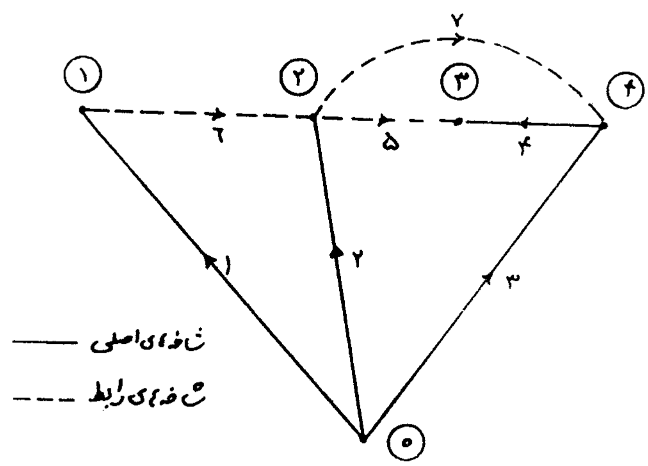
و اگر تعداد کل شاخه‌ها e باشد تعداد شاخه‌های رابطه l از رابطه زیر تعیین میشوند :

$$l=e-b$$

که با استفاده از رابطه (۵) بصورت زیر درمیآید :

$$l=e-n+1 \qquad (6)$$

درشکل (۳) شاخه‌های اصلی و شاخه‌های رابطه گراف شکل (۲ پ) نشان داده شده‌اند .



شکل (۳)

بسهولت دیده میشود که اگر بشاخه‌های اصلی یک شاخه رابط افزوده گردد یک مسیر بسته که حلقه[3] نامیده میشود بدست میآید و بهمین ترتیب افزودن شاخه‌های رابط بعدی نیز هریک بنوبه خود حلقه‌های دیگری بوجود میآورند. حلقه‌هائی که فقط دارای یک شاخه رابط هستند ، از هم مستقل بوده و بهمین‌جهت حلقه‌های اصلی[4] نامیده میشوند بنابراین تعدادحلقه‌های‌اصلی‌مساوی تعداد شاخه‌های رابط است که با استفاده از رابطه (۶) تعیین میشوند .

تبدیل مختصات[5]

تبدیل مختصات یا متغیرها یکی از فنون بسیار مفیدی است که در ریاضیات بکار برده میشود و بکمک آن میتوان‌معادله سیستم را بشکل ساده‌تری درآورده وبسهولت‌حل کرد سپس درصورت لزوم باتبدیل

۱ — Branch　　۲ — Link　　۳ — Loop
۴ — Basic loops　　۵ — Transformation of coordinates

عکس میتوان به حالت قبلی برگشت . بعنوان مثال معادله مربوط به شبکه پریمیتیو درحالتیکه عناصرش با امپدانس مشخص شده باشند از روی معادله (۳) عبارتست از :

$$V=E-ZI \qquad (۷)$$

و همانطوریکه قبلاً نیز گفته شد درمعادله بالا تعدادمجهولات یعنی V و I دو برابر تعداد معادلات هستند و برای حل آن لازم است از شرایطی که بواسطه بهم پیوستن شاخه‌ها بهمدیگر بوجود میآیند استفاده نمائیم (قوانین کیرشهف) . اکنون اگر با بکار بردن تبدیل مناسبی موجب شویم که در دستگاه مختصات جدید تعداد مجهولات کمتر شوند دراین صورت معادله سیستم دراین دستگاه مختصات جدید خیلی آسانتر حل خواهد شد .

فرض میکنیم که توپولوژی شبکه بطورکامل بوسیله ماتریس C بیان میشود و بخواهیم ولتاژ شاخه‌ها برطبق رابطه زیر بیک سری ولتاژ دیگر تبدیل گردند :

$$V'=CV \qquad (۸)$$

در رابطه بالا V' ولتاژهای جدیدی هستند که پس از تبدیل بدست میآیند . ضمناً علاوه بر رابطه (۸) طریقه تبدیل شدت جریانها نیز بایستی ذکر شود و معمولاً این طریقه عبارتست از ثابت باقی‌ماندن توان در دستگاههای مختصات قدیم و جدید .

معادله توان شبکه پریمیتیو عبارتست از :

$$P=V_t I^*$$

که درآن ماتریس V_t وارونه ماتریس V و ماتریس I^* مزدوج موهومی ماتریس I میباشند . بنابراین با مساوی هم قرار دادن توان شبکه پریمیتیو و توان شبکه در دستگاه مختصات جدید قانون تبدیل شدت جریانها را میتوان بدست آورد :

$$P=P'$$

$$V_t I^*=V'_t I'^*$$

از رابطه (۸) نتیجه میشود که $V'_t=V_t C_t$ و اگر آنرا بجای V'_t در رابطه بالا قرار دهیم :

$$V_t I^*=V_t C_t I'^*$$

$$I^*=C_t I'^*$$

$$I=C_t^* I' \qquad (۹)$$

باین‌ترتیب معادلات (۸) و (۹) تعیین مینمایند کـه V و I را چگونه بایستی به V' و I' تبدیل نمود .

اکنون‌معادله شبکه دردستگاه مختصات جدید را میتوان بسهولت از روی معادله شبکه پریمیتیو بدست‌آورد:

$$V' = CV = CE - (CZC_t^*)\, I'$$

$$V' = E' - Z' I' \qquad (۱۰)$$

که درآن $E' = CE$ و $Z' = CZC_t^*$ میباشند .

اکنون اگر ماتریس C را طوری انتخاب کرده باشیم که $V' = CV = o$ باشد دراین‌صورت‌معادله (۱۰) بصورت زیر خلاصه خواهد شد :

$$E' = Z' I' \qquad (۱۱)$$

بسهولت دیده میشود که درمعادله (۱۱) فقط شدت جریانهای جدید یعنی I' مجهول است و بآسانی آنها را میتوان محاسبه کرد :

$$I' = (Z')^{-1} E'$$

بالاخره با استفاده از رابطه (۹) ابتدا شدت جریانهای قدیمی I و سپس بکمک رابطه (۷) ولتاژهای قدیمی V محاسبه خواهند شد .

عین همین تفاسیر را میتوان برای حالتیکه عناصر شبکه پریمیتیو با ادمیتانس مشخص شده باشند نیز بیان کرد با این تفاوت که دراینجا ابتدا قانون تبدیل شدت جریانها را بایستی بعبارت زیر تعریف کرد :

$$I' = CI \qquad (۱۲)$$

سپس با استفاده از تعریف تساوی توان در دوحالت قانون تبدیل V را میتوان بدست آورد :

$$P = P'$$

$$V_t I^* = V'_t I'^*$$

$$V_t I^* = V'_t C^* I^*$$

$$V_t = V_t' C^*$$

$$V = C_t^* V' \qquad (۱۳)$$

و معادله شبکه در دستگاه مختصات جدید از روی معادله (٤) مربوط به شبکه پریمیتیو بدست خواهد آمد :

$$I' = CI = CJ - (CYC_t^*) V'$$

$$I' = J' - Y'V' \qquad (۱٤)$$

که درآن $J' = CJ$ و $Y' = CYC_t^*$ میباشند .

دراینجا ماتریس C طوری انتخاب میشود که $I'=CI=o$ باشد دراین صورت معادله (۱۴) بصورت زیر خلاصه خواهد شد :

$$J'=Y'V' \qquad (۱۵)$$

چون در معادله بالا فقط ولتاژهای V' مجهول هستند بنابراین بآسانی قابل محاسبه هستند :

$$V'=(Y')^{-1}J'$$

و بالاخره با استفاده ازفرمولهای (۱۳) و (۴) ابتدا ولتاژهای قدیمی V و سپس شدت جریانهای قدیمی I محاسبه خواهند شد .

بطورخلاصه دیده میشود که بکمک ماتریس تبدیل C معادلات شبکه پریمیتیو را که e معادله با $2e$ مجهول بودند (e تعداد شاخه های شبکه است) به k معادله با k مجهول (k عبارتست ازتعدادسطرهای ماتریس C) تبدیل نمودیم . اکنون چون معادله شبکه درمختصات جدید قابل حل است ابتدا متغیرهای جدید را محاسبه نموده و سپس بکمک معادلات تبدیل و معادله شبکه پریمیتیو ولتاژها و شدت جریانهای شاخه ها تعیین مینمائیم .

تعداد سطرهای ماتریس C ممکن است مساوی ویا کمتر از تعداد شاخه های شبکه باشد . تعداد سطرها به شکل شبکه وروشی که برای تشریح توپولوژی شبکه بکار رفته بستگی دارد ولی درهرحال تعداد آن بایستی درست باندازه تعداد متغیرهای مستقلی که برای حل شبکه لازم هستند باشد .

این نوع تبدیلات را میتوان هرچند بار که لازم باشد تکرار نمود وکماکان همان قوانین قبلی برای آنها نیز بکار میرود اما بایستی تبدیل را فقط وقتی بکار برد که ازآن فایده‌ای حاصل شود . بعنوان مثال فرض شود که سیستم بصورت $E'=Z'I'$ فرمول‌بندی شده باشد . حل این معادله مستقیماً از معکوس کردن ماتریس Z' بدست میآید اما اگر Z' ماتریس بزرگی باشد معکوس کردن آن ممکن‌است بنوبه خود مشکل بزرگی باشد بنابراین متغیرهای شبکه را یکبار دیگر بمتغیرهای دیگری تبدیل میکنیم :

$$E''=C'E'$$

$$I'=C'^{*}_{t}I''$$

$$E''=Z''I''$$

بطوریکه $Z''=C'Z'C'^{*}_{t}$ است . دراینحالت بازهم شدت جریانهای I'' پس از معکوس کردن ماتریس Z'' تعیین خواهد شد اما فقط اگر معکوس کردن Z'' خیلی آسانتر صورت بگیرد از عمل تبدیلی که انجام داده‌ایم بهره گرفته‌ایم بنابراین لم کار درمشخص کردن ماتریس C' است بطوریکه نتیجه مطلوب عاید گردد .

نظر باینکه درفرمول‌بندی اصلی $E'=Z'I'$ امکان‌پذیر است لذا میتوان‌مجهولات شبکه‌را محاسبه کرد بنابراین تعداد متغیرها درحالت تبدیل یافته بایستی‌مساوی تعدادمتغیرها ازفرمول‌بندی‌اصلی باشد روی این اصل هیچ محدودیتی برای ماتریس C' وجود نخواهد داشت مگر اینکه بایستی یک ماتریس مربع و غیرخاص[۱] باشد . ضمناً $C'E'$ نمیتواندمساوی صفر باشد چون این‌امر منتهی به یک ماتریس صفر[۲] برای Z'' خواهد شد . یک نمونه ازاین نوع تبدیل روش مؤلفه های متقارن است که درآن E' و I' و Z' مبین مقادیر مربوط به فازها و E'' و I'' و Z'' بیان کننده مقادیر مربوط بمؤلفه ها هستند و بطوریکه میدانیم برای شبکه های متعادل معکوس کردن Z'' (ماتریس امپدانس مؤلفه ها) خیلی آسانتر از معکوس کردن Z' (ماتریس امپدانس فازها) است[۳] .

یکی از نکات مهم مربوط به تبدیل متغیرها دراین است که چون پس از تبدیل معادله شبکه پریمیتیو تعداد متغیرها کمتر میشود بنابراین‌ماتریس تبدیل مربع نبوده ونمیتواند معکوس داشته باشد روی همین اصل قانون ثابت ماندن توان برای بدست آوردن معادلات جدید مطلقاً الزامی است . اما چون در تبدیلات بعدی همیشه با ماتریسهای مربع که دارای معکوس هستند سروکار داریم امکان دارد که بجای استفاده از قانون ثابت ماندن توان ، برای هردوی ولتاژها و شدت جریانها یک نوع قانون تبدیل تعیین کنیم و شکلی را که معادله توان بدست خواهدآورد بهمان‌صورت بکار ببریم . بعنوان مثال سیستمی‌بصورت $V_p=Z_pI_p$ درنظر بگیرید که درآن p معرف مقادیر فازی یعنی a و b و c باشد . باشد . با بکار بردن تبدیل $V_s=CV_p$ که درآن s معرف مقادیر مربوط بمؤلفه های ۱ و ۲ و ۰ است و با درنظرگرفتن ثابت ماندن توان یعنی $I_p=C_t^*I_s$ نتیجه میشود که :

$$V_s=(CZ_pC_t^*)I_s \tag{۱۶}$$

اما چون C یک ماتریس غیرخاص است بنابراین C^{-1} موجود بوده و اگر تبدیل را بصورت :

$$I_s=CI_p \quad \text{و} \quad V_s=CV_p$$

تعریف کنیم دراینصورت :

$$V_s=(CZ_pC^{-1})I_s \tag{۱۷}$$

و اگر قرار باشد معادلات (۱۶) و (۱۷) معادل هم باشند نتیجه میشود که :

$$C^{-1}=C_t^*$$

---

۱ — Non-singular ۲ — Null matrix

۳ — رجوع شود به : « روش مؤلفه های‌متقارن وکاربردآن درآنالیز سیستمهای سه فاز نامتعادل » نوشته فرخ حبیبی اشرفی ، نشریه دانشکده فنی ، دوره دوم شماره ۲۵ ، اسفند ماه ۱۳۵۱ ، صفحات ۱۸۸-۱۶۴ .

بعنوان مثال تبدیل مؤلفه های متقارن را درنظر میگیریم . شکل کلاسیک این تبدیل عبارتست از :

$$C=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

و از روی آن نتیجه میشود که :

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a^2 & a & 1\\ a & a^2 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad C_t^*=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a^2 & a & 1\\ a & a^2 & 1\end{bmatrix}$$

بوضوح دیده میشود که $C_t^* \neq C^{-1}$ است بنابراین تبدیل مؤلفه های متقارن کلاسیک برطبق قانون ثابت باقی‌ماندن توان صورت نمیگیرد[1] . بهمین جهت دربیشتر منابعی که با تئوری تبدیلات سروکار دارند تبدیل مؤلفه های متقارن را طوری درنظر میگیرند که شرط $C_t^*=C^{-1}$ برقرار باشد دراین‌صورت ماتریس تبدیل مؤلفه های متقارن عبارت خواهد بود از :

$$C=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

نهایتاً بایستی توجه شود که بهیچ‌وجه لزومی نیست تبدیل را باین صورت که تا کنون بکار رفته بکار برد بلکه این الزام فقط بخاطر متحدالشکل کردن تئوری تبدیلات بوده و امکان میدهد مستقیماً از قضایائی که بدست آمده‌اند استفاده کرد . تفسیرهائی نظیر آنچه که درمورد تبدیل مؤلفه های متقارن گفته شده است را میتوان درمورد تبدیلهای (α , β , o) و (d , q , o) نیز تکرار نمود .

---

۱ — فرمول توان درتبدیل مؤلفه های متقارن عبارتست از :

$$V_a I_a^* + V_b I_b^* + V_c I_c^* = 3(V_1 I_1^* + V_2 I_2^* + V_o I_o^*)$$

وجود عدد ۳ باعث از بین رفتن تغییرناپذیری شکل توان شده است .

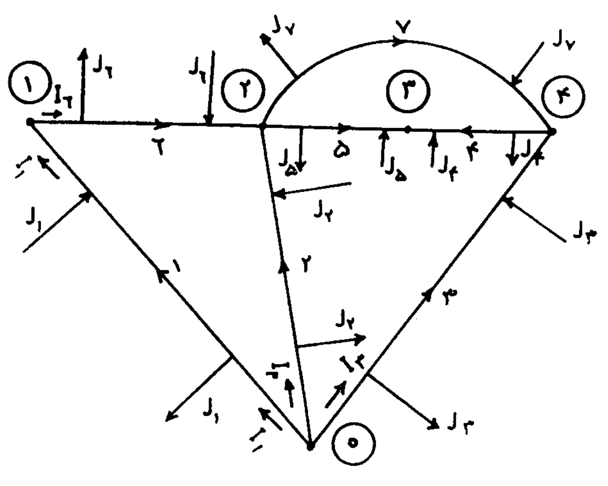
ماتریسهای ادمیتانس شمش و امپدانس شمش[1]

قبلاً دیدیم که مشخصات الکتریکی هریک از شاخه های شبکه را بآسانی میتوان باماتریس شبکه پریمیتیو نشان داد اما با وجودیکه این ماتریس مشخصات هریک ازشاخه را بطور کامل بیان میکند هیچگونه اطلاعی از نحوه اتصال شاخه ها بهمدیگر درآن گنجانده نشده است بنابراین لازم است که ماتریس شبکه پریمیتو را به ماتریس دیگری که طرزکار شبکه بهم پیوسته را ارائه میکند تبدیل کنیم. شکل این ماتریس شبکه به دستگاه مقایسه ای[2] که برای تحلیل شبکه انتخاب کرده‌ایم بستگی پیدا خواهد کرد . دستگاه مقایسه معمولاً شمش یا حلقه انتخاب میشود . در دستگاه مقایسه شمش متغیرها عبارتند از ولتاژهای گرهی[3] و شدت جریانهای گرهی[4] و در دستگاه مقایسه حلقه متغیرها ولتاژهای حلقه و شدت جریانهای حلقه هستند .

اکنون برای اینکه ماتریس شبکه را در دستگاه مقایسه شمش بدست آوریم ازمعادله (٤) شبکه پریمیتو که بشکل ادمیتانس نوشته شده است شروع میکنیم :

$$I=J-YV \qquad (١٨)$$

میدانیم برای اینکه معادله بالا را بتوانیم بآسانی حل کنیم بهتر است آنرا بدستگاه مقایسه دیگری ببریم که حاصلضرب ماتریس تبدیل در شدت جریان I مساوی صفر شود . برای این منظور میتوانیم از قانون شدت جریان کیرشهف درمورد گره‌ها استفاده کنیم . بعنوان مثال شبکه شکل (٢) را انتخاب کرده و موضوع را بوسیله آن دنبال خواهیم کرد . ضمناً برای اینکه حالت کاملاً کلی را درنظرگرفته باشیم فرض میکنیم که درتمام شاخه های شبکه شکل (٢) مولد جریان وجود داشته باشد (شکل ٤) .



شکل ٤ ـ شبکه شکل ٢ درحالتیکه درتمام شاخه های آن مولد جریان وجود داشته باشد

---

١ — Bus admittance and bus impedance matrices

٢ — Reference frame

٣ — Nodal voltages

٤ — Nodal currents

معمولاً جهت‌های روی گراف بعنوان جهت شدت‌جریان شاخه‌ها درنظر گرفته میشود حال اگر قانون شدت جریان کیرشهف را درمورد گره‌های شکل (٤) بکار ببریم معادلات زیر بدست خواهند آمد :

$$\begin{array}{ll} (\text{گره } 0) & I_1+I_2+I_3=0 \\ (\text{گره } 1) & -I_1+I_6=0 \\ (\text{گره } 2) & -I_2+I_5-I_6+I_7=0 \\ (\text{گره } 3) & -I_4-I_5=0 \\ (\text{گره } 4) & -I_3+I_4-I_7=0 \end{array} \qquad (19)$$

معادله بالا را میتوان بصورت ماتریسی زیر نوشت :

$$\begin{array}{cc} & \text{شاخه‌ها} \\ & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \text{گره‌ها} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & & & & \\ -1 & & & & & 1 & \\ & -1 & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & -1 & -1 & & \\ & & -1 & 1 & & & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = 0 \qquad (20)$$

یا اینکه بطور خلاصه :

$$A_a I = 0 \qquad (21)$$

ملاحظه میکنیم ماتریس تبدیل A_a همان‌خاصیتی‌را دارد که درجستجوی آن هستیم . ماتریس A_a ماتریس ورود شاخه به گره[1] نامیده میشود که دارای e ستون (تعداد شاخه‌های شبکه) و n سطر (تعداد گره‌های شبکه) بوده و جمله‌های آن بطور سیستماتیک بشرح زیر تعیین میشوند :

$a_{ij}=0$ اگر شاخه j به گره i وصل نشود .

$a_{ij}=1$ اگر شاخه j به گره i وصل شده و جهتش بسمت خارج گره i باشد .

$a_{ij}=-1$ اگر شاخه j به گره i وصل شده و جهتش بسمت گره i باشد .

---

1 —Element-node incidence matrix

درهرستون ماتریس A_a فقط دوجمله غیرصفر وجود دارد و مجموع جمله‌های هرستون بایستی مساوی صفر باشد . ضمناً اگر توجه کنیم می‌بینیم که مجموع جمله‌های هرچهار سطری که انتخاب کنیم مساوی سطر پنجم باعلامت مخالفش است بنابراین نتیجه میگیریم که تمام سطرها ازهم مستقل نیستند واطلاعات مربوط به یکی ازسطرها اضافی میباشد . معمولاً سطر مربوط به شمش مبنا حذف شده و ماتریس حاصله ماتریس ورود شاخه به شمش[1] نامیده میشود و آنرا با A نشان میدهیم :

شاخه‌ها

A = گره‌ها

	۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷
۱	-۱					۱	
۲		-۱			۱	-۱	۱
۳				-۱	-۱		
۴			-۱	۱			-۱

(۲۲)

ضمناً با توجه به معادلات (۹ ۱) نتیجه میشود :

$$AI = 0 \qquad (۲۳)$$

بنابراین اگر ماتریس A را بعنوان ماتریس تبدیل انتخاب کنیم باتوجه برابطه (۳ ۱) ولتاژهای قدیمی بتوسط زیر بولتاژهای جدید تبدیل میشوند :

$$V = A_t{}^* V' \qquad (۲٤)$$

اگر ماتریس A را درطرفین معادله (۸ ۱) ضرب کنیم نتیجه میشود :

$$AI = AJ - AYA_t{}^* V' \qquad (۲۵)$$

ولی چون باتوجه برابطه (۲۳) شدت جریانهای جدید $I' = AI = 0$ هستند بنابراین :

$$AJ = (AYA_t{}^*)V' \qquad (۲٦)$$

و یا اینکه :

$$J' = Y'V' \qquad (۲۷)$$

تاکنون بیشتر به ریاضیات عمل تبدیل توجه داشته‌ایم و هیچگونه تعبیر فیزیکی برای متغیرهای جدید قائل نشده‌ایم . درواقع میتوان سیستم را بدون اینکه لزومی به تعبیر فیزیکی آن باشد حل کرد ولی برای اینکه بتوانیم J' و Y' را مستقیماً از روی مشخصات شبکه تعیین کنیم لازم است مفهوم فیزیکی برای

۱ — Bus incidence matrix

متغیرهای جدید تعیین کنیم . برای این منظور مجدداً به شکل (٤) مراجعه میکنیم .

حاصل‌ضرب AJ عبارتست از :

$$J' = A\,J = \begin{bmatrix} -1 & & & & & 1 & \\ & -1 & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & -1 & -1 & & \\ & & -1 & 1 & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \\ J_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 + J_6 \\ -J_2 + J_5 - J_6 + J_7 \\ -J_4 - J_5 \\ -J_3 + J_4 - J_7 \end{bmatrix}$$

با توجه به‌جهت مثبتی که درشکل (۱ ب) برای مولدهای جریان (جهت J_1) درنظرگرفته‌ایم دیده میشود که J' با علامت مخالف جمع شدت جریانهائی است که به چهارشمش مستقل از هم ۱ و ۲ و ۳ و ٤ وارد میشوند . ضمناً :

$$Y' = A Y A_t^{*} = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_1 + Y_6 & -Y_6 & & \\ -Y_6 & Y_2 + Y_5 + Y_6 + Y_7 & -Y_5 & -Y_7 \\ & -Y_5 & Y_4 + Y_5 & -Y_4 \\ & -Y_7 & -Y_4 & Y_3 + Y_4 + Y_7 \end{bmatrix} \end{array}$$

برای تعیین مفهوم V' از رابطه تبدیل (٢٤) استفاده میکنیم :

$$V = A_t^{*} V' = \begin{bmatrix} -V'_1 \\ -V'_2 \\ -V'_4 \\ -V'_3 + V'_4 \\ +V'_2 - V'_3 \\ V'_1 - V'_2 \\ V'_2 - V'_4 \end{bmatrix}$$

از عبارت بالا نتیجه میشود که :

$$V'_1 = -V_1$$
$$V'_2 = -V_2$$
$$V'_3 = -V_3 - V_4$$
$$V'_4 = -V_3$$

یعنی ولتاژهای جدید مساوی ولتاژ شمش ها نسبت شمش مبنا با علامت مخالف هستند .

نظر باینکه رابطه (۲۷) را بصورت زیر نیز میتوانیم بنویسیم :

$$(-J') = Y'(-V') \qquad (۲۸)$$

دراین‌صورت $(-J')$ مساوی شدت‌جریانهائی‌است که به‌شمش‌های ۱ و ۲ و ۳ و ٤ واردمیشوند و $(-V')$ مساوی ولتاژ شمش ها نسبت به شمش مبنا میباشد وچون درآنالیز سیستمهای نیروی برق معمولاً از معادله بشکل رابطـه (۲۸) استفاده میگردد بهمین جهت آنرا بصورت زیر که مفهوم فیزیکی متغیرهای جدید درآن کاملاً نمایان هستند مینویسند :

$$I_{bus} = Y_{bus} V_{bus} \qquad (۲۹)$$

که درآن :

$$I_{bus} = -J' = -AJ$$
$$Y_{bus} = Y' = AYA_t^* \qquad (۳۰)$$
$$V_{bus} = -V'$$

بنابراین I_{bus} شدت جریانهائی هستند که به شمش های مستقل شبکـه (یعنی تمام شمش ها غیر از شمش مبنا) وارد میشونـد و V_{bus} ولتاژ شمش ها نسبت به شمش مبنا هستند . Y_{bus} را نیز بجـای اینکـه بطور ریاضی از حاصلضرب AYA_t^* محاسبه کنیم میتوان مستقیماً از روی مشخصات شبکـه نوشت چون از روی ماتریس مربوط به Y' بسهولت دیده میشود درحالتیکه بین شاخه های شبکه ارتباط متقابل[1] وجود نداشته باشد جملات قطر (جملات Y_{ii}) مساوی مجموع ادمیتانس شاخه هائی هستند که به شمش i وصل شده‌اند وجملات غیر قطر (جملات Y_{ij}) با علامت منفی مساوی‌مجموع ادمیتانس هائی هستند که بین شمش های i و j وصل شده‌اند.

معادله (۲۹) راکه درمبحث شبکه های الکتریکی بنام معادلات ولتاژ گرهی[2] خوانده میشوند در آنالیز سیستم نیروی برق فرمول بندی Y_{bus} مینامند . معادله مزبور را میتوان بشکل امپدانس نیز نوشت:

---

۱ — Mutual ۲ — Node voltage formulation

$$V_{bus} = Z_{bus} I_{bus} \qquad (۳۱)$$

دراین‌صورت :

$$Z_{bus} = Y_{bus}^{-1} = (AYA_t^*)^{-1} \qquad (۳۲)$$

Y_{bus} و Z_{bus} بترتیب ماتریس ادمیتانس شمش و ماتریس امپدانس شمش نامیده میشوند .

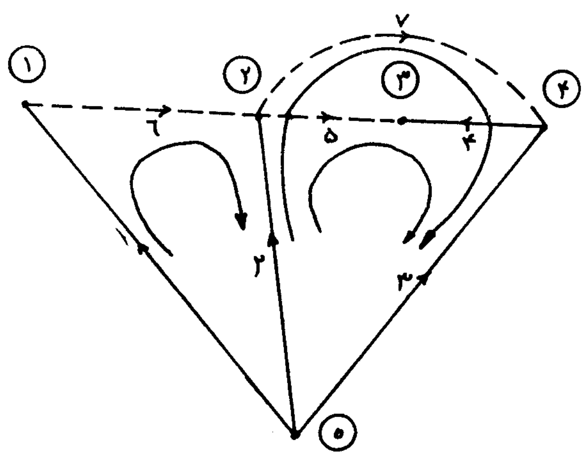
ماتریسهای امپدانس حلقه و ادمیتانس حلقه[1]

اکنون دستگاه مقایسه دیگری که متغیرهای آن ولتاژهای حلقه و شدت جریانهای حلقه هستند درنظر میگیریم . برای اینکه متغیرهای شبکه پریمیتیو را باین دستگاه مقایسه جدید تبدیل کنیم از معادله (۳) شبکه پریمیتیو که بشکل امپدانس نوشته شده است شروع میکنیم :

$$V = E - ZI \qquad (۳۳)$$

میدانیم برای اینکه معادله بالا را بتوانیم بآسانی حل کنیم بهتر است در دستگاه مقایسه جدید حاصلضرب ماتریس تبدیل در ولتاژ V مساوی‌صفر شود . برای این‌منظور میتوانیم از قانون ولتاژ کیرشهف درمدارهای بسته استفاده کنیم . بعنوان مثال مجدداً شبکه شکل (۲) را انتخاب کرده وموضوع را بوسیله آن دنبال خواهیم کرد .

برای اینکه معادلاتی که بدست میآیند کاملاً از هم مستقل باشند بایستی ابتدا حلقه‌های اصلی شبکه را مشخص کنیم . قبلاً درقسمت توپولوژی شبکه توضیح داده شد حلقه‌هائی که فقط دارای یک شاخه رابطه هستند ازهم مستقل بوده و حلقه‌های اصلی نامیده میشوند . در شکل (۵) حلقه‌های اصلی شبکه شکل(۲) نشان‌داده شده‌اند ومعمولاً هرحلقه‌اصلی با همان شماره شاخه رابطی که‌درآن قراردارد نام‌گذاری میشود .



شکل (۵)

1 —Loop impedance and loop admittance matrices.

اگر جهت‌های روی گراف را بعنوان جهت مثبت ولتاژ شاخه‌ها فرض کرده و قانون ولتاژ کیرشهف را برای حلقه‌های اصلی بکار ببریم معادلات زیر بدست خواهند آمد :

$$
\begin{aligned}
&V_1 - V_2 + V_6 = 0 \\
&V_2 - V_3 - V_4 + V_5 = 0 \\
&V_2 - V_3 + V_7 = 0
\end{aligned}
\qquad (۳٤)
$$

معادلات بالا را میتوان بصورت ماتریسی زیر نوشت :

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{شاخه‌ها} \\
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\text{حلقه‌های اصلی}\ \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & 1 & \\ & 1 & -1 & -1 & 1 & & \\ & 1 & -1 & & & & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} = 0 \qquad (۳٥)
$$

یا اینکه بطور خلاصه :

$$BV = 0 \qquad (۳٦)$$

ملاحظه میکنیم ماتریس تبدیل B همان‌خاصیتی را دارد که درجستجوی آن هستیم . ماتریس B ماتریس مدار[1] نامیده میشود که دارای e ستون (تعداد شاخه‌های شبکه) و b سطر (تعداد شاخه‌های رابطه) بوده و جمله‌های آن بطور سیستماتیک بشرح زیر تعیین میشوند :

$b_{ij} = 0$ اگر شاخه j درحلقه i قرار نداشته باشد .

$b_{ij} = 1$ اگر شاخه j درحلقه i قرار داشته و با آن هم‌جهت باشد .

$b_{ij} = -1$ اگر شاخه j درحلقه i قرار داشته و درجهت مخالف آن باشد .

بنابراین اگر ماتریس B را بعنوان‌ماتریس‌تبدیل‌انتخاب کنیم باتوجه برابطه(۹) شدت جریانهای قدیمی بتوسط رابطه زیر به شدت جریانهای جدید تبدیل میشوند :

$$I = B_t * I' \qquad (۳۷)$$

۱ — Circuit matrix

اگر ماتریس B را درطرفین معادله (۳۳) ضرب کنیم نتیجه میشود :

$$BV = BE - BZB_t^* I \qquad (۳۸)$$

ولی چون با توجه برابطه (۳۶) ولتاژهای جدید $V' = BV = 0$ هستند بنابراین ·

$$BE = (BZB_t^*) I' \qquad (۳۹)$$

یا اینکه :

$$E' = Z' I' \qquad (٤۰)$$

که درآن

$$E' = BE$$

$$Z' = BZB_t^*$$

حال لازم است مفهوم فیزیکی متغیرهای جدید را تعیین کنیم ، حاصلضرب BE عبارتست از :

$$E' = BE = \begin{array}{|c|}\hline E_1 - E_2 + E_6 \\ \hline E_2 - E_3 - E_4 + E_5 \\ \hline E_2 - E_3 + E_7 \\ \hline \end{array}$$

بسادگی دیده میشود که E' مساوی مجموع نیروهای محرکه الکتریکی درهریک ازحلقه هاست. بهمین ترتیب، با بررسی معادله (۳۷) نتیجه میشود که شدت جریان جدید عبارتند از شدت جریانهای حلقه .

ماتریس Z' نیز عبارتست از :

$$Z' = BZB_t^* = \begin{array}{|c|c|c|}\hline Z_1 + Z_2 + Z_6 & -Z_2 & -Z_2 \\ \hline -Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 & Z_2 + Z_3 \\ \hline -Z_2 & Z_2 + Z_3 & Z_2 + Z_3 + Z_7 \\ \hline \end{array}$$

از روی عبارت بالا بسهولت دیده میشود درحالتیکه بین شاخه های شبکه ارتباط متقابل وجود نداشته باشد ماتریس Z' را میتوان مستقیماً از روی مشخصات مدار نوشت چون جملات قطر عبارتنداز مجموع امپدانسهای هرحلقه و جملات غیرقطر عبارتند از امپدانسهای مشترك بین دوحلقه که اگر جهت دوحلقه همسوی باشند علامت امپدانس مشترك مثبت خواهد بود ولی اگر دوحلقه درجهتهای مخالف باشند علامت امپدانس مشترك منفی خواهد بود .

بخاطراینکه مفهوم فیزیکی متغیرهای معادله (٤۰) بوضوع دیده شوند درآنالیز سیستمهای نیروی برق این معادله معمولاً بصورت زیر نوشته میشود :

$$E_{loop}=Z_{loop}\,I_{loop} \qquad (٤١)$$

که درآن :

$$E_{loop}=E'=BE$$

$$Z_{loop}=Z'=BZ\,B_t^*$$

$$I_{loop}=I'$$

درمعادله بالا Z_{loop} را ماتریس امپدانس حلقه[1] مینامند . ضمناً معادله (٤١) را بصورت زیر هم میتوان نوشت :

$$I_{loop}=Y_{loop}\,E_{loop} \qquad (٤٢)$$

که درآن :

$$Y_{loop}=Z_{loop}^{-1}=(BZB_t^*)^{-1}$$

Z_{loop} و Y_{loop} بترتیب ماتریس امپدانس حلقه و ماتریس ادمیتانس حلقه نامیده میشوند . ضمناً معادله (٤١) درآنالیز سیستمهای نیروی برق فرمول بندی Z_{loop} خوانده میشود .

توضیحات تکمیلی

ملاحظه شد که مدل ریاضی شبکه را توانستیم دردستگاههای شمش وحلقه بوسیله معادلات(٢٩) یا (٣١) و (٤١) یا (٤٢) فرمول‌بندی نمائیم . بدیهی است که فرمول‌بندی های فوق‌الذکر تنها فرمول‌بندی‌هائی نیستند که میتوان برای شبکه های نیروی برق بدست آورد ولی اساسی‌ترین و متداول‌ترین آنها میباشند . هریک از فرمول‌بندی مزبور برای مطالعه و تحلیل موضوع بخصوص مناسب‌تر هستند ، مثلاً برای محاسبات اتصال کوتاه بیشتر از فرمول‌بندی Z_{bus} استفاده میشود درصورتیکه برای محاسبات پایداری فرمول‌بندی Y_{bus} بهتر است و بالاخره محاسبات توزیع بار درشبکه[2] تمام فرمول‌بندی‌های Y_{bus} و Z_{bus} و Z_{loop} و Y_{loop} بکار میروند .

اگر شبکه نسبتاً بزرگ باشد دراین‌صورت محاسبه Y_{bus} از فرمول (٣٠) قسمت بزرگی از حافظه کامپیوتررا اشغال‌خواهد کردواگر بخواهیم Z_{bus} را نیز ازمعکوس کردن Y_{bus} بدست بیاوریم دراینصورت مشکلات مربوط به معکوس کردن یک ماتریس خیلی بزرگ نیز بمشکل قبلی افزوده میگردد . بهمین‌جهت روشهای محاسباتی مخصوصی[3] ارائه شده‌اند که مستقیماً از روی مشخصات شبکه ، بدون‌اینکه نیازی به عملیات تبدیل ومعکوس کردن ماتریس باشد، میتوان Z_{bus} را محاسبه کرد . عموماً این روشها براساس تعاریفی که برای جمله های ماتریس امپدانس یا ادمیتانس بدست میآید بنا نهاده شده‌اند . مثلاً برای محاسبه جمله های ماتریس Z_{bus} ابتدا معادله ماتریسی (٣١) را بصورت گسترده زیر مینویسیم :

---

١ — Loop impedance matrix　　٢ — Load fludy study　　٣ — Algorithms

$$\begin{bmatrix} V_{1} \\ V_{2} \\ V_{3} \\ \cdots \\ V_{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2m} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & Z_{m3} & \cdots & Z_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1} \\ I_{2} \\ I_{3} \\ \cdots \\ I_{m} \end{bmatrix} \qquad (۴۳)$$

حال اگر تمام مولدهای جریان شبکه را بازکنیم و فقط به شمش شماره ۱ شدت جریان واحد وارد کرده واز شمش مبنا برگردانیم دراین‌صورت :

$$I_{1} = 1$$
$$I_{2} = I_{3} = \cdots = I_{m} = 0 \qquad (۴۴)$$

که پس از قراردادن مقادیر شدت جریان از روابط (۴۴) درمعادله (۴۳) نتیجه میشود :

$$\begin{aligned} V_{1} &= Z_{11} \\ V_{2} &= Z_{21} \\ V_{3} &= Z_{31} \\ &\cdots \\ V_{m} &= Z_{m1} \end{aligned} \qquad (۴۵)$$

بهمین‌ترتیب اگر مجدداً تمام مولدهای‌جریان شبکه‌را بازکرده واین بار فقط به شمش شماره ۲ شدت جریان واحد وارد کرده و از شمش مبنا بازگردانیم دراینصورت :

$$I_{2} = 1$$
$$I_{1} = I_{3} = \cdots = I_{m} = 0 \qquad (۴۶)$$

و پس از قراردادن مقادیر شدت جریان از روابط (۴۶) درمعادله (۴۳) نتیجه میشود :

$$\begin{aligned} V_{1} &= Z_{12} \\ V_{2} &= Z_{22} \\ V_{3} &= Z_{32} \\ &\cdots \\ V_{m} &= Z_{m2} \end{aligned} \qquad (۴۷)$$

بنابراین بطورکلی میتوانیم بگوئیم که اگر فقط به شمش شماره j شدت جریان واحد وارد کرده و از شمش

مبنا بازگردانیم جمله های ماتریس امپدانس شمش عبارت خواهند بود از :

$$Z_{jj} = V_j$$

$$Z_{jk} = Z_{kj} = V_k \qquad (٤٨)$$

در روابط بالا V_j عبارتست از ولتاژ شمش j و V_k عبارتست از ولتاژ شمش k ، و باین ترتیب تمام جمله های ماتریس امپدانس را میتوان بآسانی و مستقیماً محاسبه کرد .

با استفاده از تعاریفی که بوسیله معادلات (٤٨) بیان شده‌اند روشهائی برای محاسبه جمله های ماتریس امپدانس ابداع شده‌اند که قابل برنامه نویسی برای کامپیوتر هستند و ضمناً صرفه‌جوئی لازم ازلحاظ اشغال حافظه کامپیوتر و مدت زمان محاسبات نیز حاصل میشود .

فهرست منابع

REFERENCES

1. G. Kron, «Tensor Analysis of Networks», John Wiley & Sons, Inc., New York, 1939.
2. P. Le Corbeiller, «*M*atrix Analysis of Electric Networks», John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950.
3. L. V. Bewley, «Tensvr Analysis of Electric Circuits and Machines», The Ronald Press Co., New York, 1961.
4. G. W. Stagg and A. H. El-Abiad, «Computer Methods in Power System Analysis», Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1968.