کاربرد قضیه هامیلتن ـ کیلی در محاسبه تابع اکسپنانسیل ماتریسی

نوشته: هاشم مهرآذین
دانشیار دانشکده فنی

چکیده:

در بررسی زیر پس از ذکر قضیه ی همیلتن ـ کیلی [1] و یادآوری روش معمولی محاسبه ی تابع اکسپنانسیل (نمائی) ماتریسی، ابتدا ثابت می‌کنیم که هرچند جمله ای درجه n ام که بیش از n ریشه داشته باشد متحد با صفر است. سپس با استفاده از آن ثابت میکنیم که حاصل جمع n چند جمله ای لاگرانژ از درجه $n-1$ که با ضرائب خاصی تعریف شده باشند برابر ۱ است و این نتیجه را همراه با قضیه همیلتن ـ کیلی برای اثبات یک روش محاسبه تابع اکسپنانسیل ماتریسی وقتی مقادیر خاص ماتریس از یکدیگر متمایزند بکار می‌بریم. بالاخره مطلب را با ذکر یک مثال عددی و حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به پایان می‌رسانیم.

۱ـ مقدمه:

بسیاری از مسائل فیزیک، مکانیک، ساختمان و بطور کلی مهندسی و برنامه ریزی به یک دستگاه معادلات جبری یا معادلات دیفرانسیل خطی منجر می‌شوند. جدیدترین روش متداول برای حل این دستگاه ها به خصوص اگر تعداد معادلات زیاد باشد و به برنامه‌نویسی رایانه ای نیاز پیدا شود روش ماتریسی است. حل دستگاه های معادلات جبری محاسبه ماتریس معکوس را ایجاب می‌کند و حل دستگاه های معادلات دیفرانسیل در عین حال مستلزم محاسبه ی تابع اکسپنانسیل ماتریسی و ماتریس معکوس است. به این دلیل در اینجا سعی شده است که با استفاده از قضیه همیلتن ـ کیلی روش ساده‌ای برای محاسبه تابع اکسپنانسیل ماتریسی ارائه شود.

ناگفته نماند که اثبات ناقصی از این روش در یکی از منابع ذکر شده در پایان وجود دارد ولی در اینجا سعی شده است که ضمن کامل کردن این اثبات با ذکر یک مثال مطلب تا آنجا که ممکن است قابل استفاده گردد.

برای این منظور فرض می‌کنیم که A یک ماتریس مربع $n \times n$ یعنی دارای n خط و n ستون باشد می‌خواهیم در حالت خاصی که A دارای n مقدار خاص (یا مقدار مختص) متمایز از یکدیگر است روشی را برای محاسبه e^{At} ارائه دهیم. e^{At} را اکسپنانسیل ماتریسی می‌نامیم و در آن e عدد اولر و t یک متغییر حقیقی است.

۲ـ یادآوری قضیه همیلتن ـ کیلی:

می‌دانیم که اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد چندجمله‌ای مشخصه آن که چند جمله ای مقادیر خاص نیز نامیده می‌شود عبارت است از: $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ که در آن $P(\lambda)$ یک چندجمله ای درجه n ام برحسب λ است که از بسط دترمینان ماتریس $A-\lambda I$ بدست می‌آید. در اینجا I ماتریس واحد $n \times n$ است.

به راحتی می‌توان توجه کرد که $P(\lambda)$ یک چندجمله ای به

1- Hamilton - Keyley

صورت زیر است :

$$P(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

می‌دانیم که برای پیدا کردن مقادیر خاص ماتریس A معادله $P(\lambda)=0$ را حل می‌کنند و n مقدار خاص را که ممکن است بعضی از آنها تکراری باشند پیدا می‌کنند .

قضیه همیلتن ـ کیلی ثابت می‌کندکه ماتریس A خود نیز در معادله مقادیرخاص صدق میکند به عبارت دیگر هر ماتریس A ریشه معادله ی مشخصه ی خودش است .

$$P(A)=(-1)^nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots\ldots+a_1A+a_0I=0 \qquad (۲۰۲)$$

حال اگر a_0I را نگهداریم و بقیه جملات را به‌طرف دیگر رابطه ببریم و طرفین رابطه بدست‌آمده را در $\frac{1}{a_0}A^{-1}$ ضرب کنیم پیدا می‌کنیم .

$$A^{-1}=\frac{-1}{a_0}\quad(-1)^nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I \qquad (۲۰۳)$$

که بکار بردن آن برای محاسبه‌ی ماتریس معکوس چنانکه در یک مثال خواهیم دید بسیارآسان تراز محاسبه ماتریس‌معکوس به روش متداول است .

۳ـ محاسبه e^{At} به روش معمولی :

e^{At} را به صورت زیر تعریف میکنند .

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^kt^k}{k!} \qquad (۳۰۱)$$

وقتی مقادیر خاص ماتریس A از یکدیگر متمایزنــد می‌دانیم که همواره یک ماتریس معکوس پذیر B وجود دارد به طوریکه ماتریس $C=BAB^{-1}$ شکل قطری داشته باشد و عناصر قطر اصلی آن n مقدار خاص $\lambda_1,\lambda_2..\lambda_n$ باشند .

دراین صورت اگر توجه کنیم که

$$A=B^{-1}CB$$

و

$$A^2=(B^{-1}CB)(B^{-1}CB)=B^{-1}C^2B$$

وبهمین ترتیب

$$A^k=B^{-1}C^kB$$

و همچنین اگرتوجه کنیم که C^k هم برای تمام مقادیر k یک ماتریس قطری است که عناصر قطر اصلی آن $\lambda_1^k,\lambda_2^k\ldots\lambda_n^k$ هستند به آسانی می‌توان نتیجه گرفت که e^{At} به شکل زیر در می‌آید .

$$e^{At}=B^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1t} & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2t} & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & e^{\lambda_nt} \end{pmatrix}B$$

پس دراین حالت محاسبه e^{At} به محاسبه ماتریس B و ماتریس معکوس آن منجر می‌شود که معمولا" محاسبه آنها بخصوص برای $n\geq 4$ بسیار طولانی و دشوار است .

حال قبل از این‌که به ذکر روش ساده تری بپردازیم ابتدالم مزبوررا ثابت می‌کنیم .

۴ـ لم مربوط به خواص چند جمله ای ها :

هرچند جمله ای درجه n ام که بیش از n ریشه حقیقی یا مختلط داشته باشدمتحد با ۰ است. برای اثبات فرض کنیم که K(x) یک چند جمله ای درجه n ام از x باشد که بازای بیش از n مقدار x مثلا" برای n+1 مقدار یا بیشتر برابر صفر شود. اگر لم را برای n+1 مقدار ثابت‌کنیم بطریق اولی برای بیشتر از n+1 مقدار هم صادق است .

حال اگر چند جمله‌ای درجه n ام K(x) بـرای n+1 مقدار x صفر شود دو حالت ممکن است اتفاق بیافتدیا تمام مقادیر x از هم متمایز باشند و یا بعضی از آنها تکراری باشند . ابتدا فرض میکنیم که همه‌ی ریشه های چند جمله‌ای از یکدیگر متمایز باشند . دراین صورت اگر روابط مربوط بـه این ریشه‌هارابنویسیم دستگاه n+1 معادله ی n+1 مجهولی زیر نتیجه می‌شود :

$$x_1^na_n+x_1^{n-1}a_{n-1}+\ldots\ldots\ldots+x_1a_1+a_0=0$$

$$x_2^na_n+x_2^{n-1}a_{n-1}+\ldots\ldots\ldots+x_2a_1+a_0=0$$

$$x_{n+1}^na_n+x_{n+1}^{n-1}a_{n-1}+\ldots\ldots+x_{n+1}a_1+a_0=0$$

دترمینان‌ضرائب دستگاه فوق عبارت است از :

$$V_n=\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots\dots\dots\dots & x_1 & 1\\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots\dots\dots\dots & x_2 & 1\\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots\dots\dots\dots & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix}$$

اگرجای سطرها و ستون ها را در دترمینان فوق‌عوض کنیم ملاحظه می‌کنیم که V_nیک دترمینان وان درموند است و بنابراین مقدار آن به‌آسانی قابل محاسبه بوده و برابر است با :

$$V_n=\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

حال چون بنابه‌فرض مقادیر x_iها همه از هم متمایزند مقدار دترمینان مخالف صفر است اما $V_n\neq 0$ ایجاب می‌کند که تنها جواب دستگاه $a_o=a_1=\dots\dots\dots\dots=a_{n+1}=0$ باشد یعنی چند جمله ای متحد با صفر است و به این‌ترتیب لم در حالت اول ثابت می‌شود . حال اگر چند جمله ای دارای $n+1$ ریشه باشد به طوری که pریشه آن تکراری و به ترتیب‌از مرتبه های r_1 و $r_2,\dots,r_p$ باشند می‌توان نوشت

$$K(x)=(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\dots\dots(x-x_p)^{r_p}Q(x)$$

که درآن $Q(x)$ یک چند جمله ای از درجه $n-(r_1+r_2+\dots\dots+r_p)$ است که دارای $n-(r_1+r_2+\dots\dots\dots+r_p)+1$ ریشه متمایز است اگر استدلال فوق را در مورد $Q(x)$بکار ببریم نتیجه می‌گیریم که $Q(x)$ و بنابراین $K(x)$متحد باصفرند .

۵ ـ محاسبه e^{At} به روش ساده تر

اگر Aیک ماتریس $n\times n$ باشد می‌خواهیم ثابت کنیم که در حالتی که مقادیر خاص ماتریس A از یکدیگر متمایز باشند e^{tA} را می‌توان از رابطه ی زیر نیز بدست آورد :

$$e^{tA}=\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t}L_k(A) \qquad (۵۰۱)$$

که درآن λ_kها مقادیر خاص ماتریس A و $L_k(A)$یک چند جمله‌ای ماتریسی از درجه n ـ۱ است که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید :

$$L_k(A)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{A-\lambda_j I}{\lambda_k-\lambda_j} \qquad k=1\ 2,\dots.n \qquad (۵۰۲)$$

قبل از اثبات این مطلب ابتدا ثابت می‌کنیم

$$\sum_{k=o}^{n} L_k(A)=I$$

که درآن I_n ماتریس واحد $n\times n$است .

۱ـ۵ ـ اثبات رابطه ی مربوط به حاصل جمع $\sum L_k(A)$

برای اثبات رابطه ماتریسی فوق ابتداثابت‌می‌کنیم که اگر $L_k(x)$ هاچند جمله ای های درجه ۱ـ n می‌باشند که به صورت زیر تعریف شده اند :

(۵۰۳)

$$L_k(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

به طوری که $x_1,x_2,\dots\dots x_n$ ،n مقدار متمایز از یکدیگر باشند رابطه ی

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(x)=1 \qquad (۵۰۴)$$

در مورد آنها برقرار است .

برای اثبات این رابطه ابتدا توجه کنیم که همواره رابطه ی زیر برقرار است .

$$L_k(x_i)=\begin{cases}0 & i\neq k\\ 1 & i=k\end{cases}$$

زیرا

$$L_k(x_i)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{x_i-x_j}{x_k-x_j}$$

و چون j تمام مقادیر از ۱تا nرا بجز kاختیار می‌کند پس یکبار هم مقدار i را اختیار می‌کند یعنی x_jبرابر x_iمی‌شود و در این صورت کسر مربوط برابر صفر شده و حاصلضرب ۱ـ n جمله یعنی $L_k(x_i)$ برابر صفر می‌شود .

بهمین ترتیب در مورد $L_k(x_k)$ ملاحظه می‌کنیم که

۱ـ n کسر برابر واحد درهم ضرب می‌شوند و بنابراین حاصل آنها ۱ می‌شود.

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(x_i)=1$$

پس همواره رابطه برای مقادیر $i=1,2,\ldots\ldots n$ برقرار است. زیرا در این حاصل جمع همه $L_k(x_i)$ ها صفرند جزوقتی $i=k$ است یعنی $L_k(x_k)$ که برابر است با یک.

به علاوه اگر با توجه به اینکه چند جمله های $L_k(x)$ هریک حاصلضرب $n-1$ دو جمله ای درجه اول از x و بنابراین از درجه $n-1$ هستند چند جمله ای

$$R(x)=\sum_{k=1}^{n} L_k(x)-1$$

را در نظر بگیریم $R(x)$ یک چند جمله ای از درجه $n-1$ است که در n نقطه ی $x_1, x_2,\ldots\ldots x_n$ صفرمی‌شود پس بنا به لم قبل متحد باصفر است و بنابراین رابطه

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(x)=1$$

برای تمام مقادیر x برقرار است.

حال رابطه‌ی

$$L_k(A)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{A-\lambda_j I}{\lambda_k-\lambda_j}$$

را در نظر می‌گیریم. چون بنا به فرض مقادیر خاص ماتریس A از یکدیگرمتمایزند پس یک ماتریس معکوس پذیر B وجود دارد به طوریکه $A=B^{-1}CB$ و C یک ماتریس قطری به صورت زیر باشد.

$$C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0\\ 0 & \lambda_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0\\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\lambda_n\end{pmatrix}$$

دراین صورت با توجه به اینکه در ضرب ماتریس‌ها، ماتریس I خاصیت جابجایی پذیری دارد و بعلاوه رابطه ی $I=B^{-1}IB$ همواره برقرار است می‌توان نوشت:

$$L_k(A)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{B^{-1}CB-\lambda_j B^{-1}IB}{\lambda_k-\lambda_j}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}B^{-1}\frac{C-\lambda_j I}{\lambda_k-\lambda_j}B$$

به عبارت دیگر

$$L_k(A)=(B^{-1})^{n-1}\left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{C-\lambda_j I}{\lambda_k-\lambda_j}\right]B^{n-1}$$

پس

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(A)=(B^{-1})^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{C-\lambda_j I}{\lambda_k-\lambda_j}\right)B^{n-1}$$

حال اگرعبارت داخل پرانتز طرف دوم را به صورت گسترش یافته بنویسیم خواهیم داشت.

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(A)=(B^{-1})^{n-1}\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=0}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\lambda_1-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j} & 0\cdots\cdots\cdots 0\\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\ \sum\limits_{k=0}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\lambda_n-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}\end{bmatrix}B^{n-1}$$

اما اگر در رابطه ۲ـ۵ـ۱ که قبلا" ثابت کردیم به جای x_j و x_k به ترتیب λ_j λ_k و به جای x به ترتیب λ_1 $\lambda_2\ldots\ldots\lambda_n$ قرار دهیم ملاحظه می‌کنیم که مقدار هریک از عناصر قطر اصلی ماتریس فوق برابر ۱ است به عبارت دیگر ماتریس گسترش یافته بالا چیزی جز ماتریس I نیست یعنی

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(A)=(B^{-1})^{n-1}IB^{n-1} \qquad (۵ـ۵)$$

وبنابراین رابطه‌ی مورد نظر ثابت می‌شود.

۲ـ۵ ـ اثبات رابطه ی مربوط به محاسبه e^{tA}

برای محاسبه e^{tA} تابع ماتریسی F را به صورت

$$F(t)=\sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k}L_k(A) \qquad (۵ـ۶)$$

تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که $F(t)$ چیزی جز e^{tA} نیست.

ابتداثابت کنیم که $F(t)$ در معادله ی دیفرانسیل $F'(t)=AF(t)$ با شرط اولیه $F(0)=I$ صدق می‌کند. اگر از $F(t)$ مشتق بگیریم و مقدار $AF(t)$ را تشکیل دهیم تفاضل آنها به صورت

$$AF(t)-F'(t)=\sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k}(A-\lambda_k I)L_k(A)$$

نشان داده می‌شود . اما

$$(A-\lambda_k I)L_k(A) = \left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\right]\left[\prod_{j=1}^{n} A-\lambda_j I\right]$$

اگر حاصلضرب اول‌را که مقدار ثابتی است a بنامیم و توجه کنیم‌که حاصلضرب دوم چیزی جز تجزیه ی معادله ی مشخصه یعنی $P(A)$ به عوامل اول نیست پیدا می‌کنیم .

$$(A-\lambda_k I)L_k(A) = a(-1)^n P(A)$$

اما با توجه به رابطه ی (۲۰۲) $P(A)=0$

برای تمام مقادیر k رابطه ی $(A-\lambda_k I)L_k(A)=0$ برقرار است و از آن نتیجه می‌شود که $F(t)$ در معادله ی $F'(t)=AF(t)$ صدق می‌کند .

از طرف دیگر $F(0)=\sum_{K=1}^{n} L_k(A)$ وبنابراین با توجه به رابطه‌ی (۵۰۵) رابطه $F(0)=I$ برقرار است .

پس $F(t)$ در دوشرط $F'(t)=AF(t)$ و $F(0)=I$ صدق میکندحال ثابت کنیم که $F(t)$ برابر e^{tA} است برای این منظور تابع $G(t)=e^{-tA}F(t)$ را درنظرمی‌گیریم اگر از آن مشتق بگیریم پیدا می‌کنیم .

$$G'(t)=e^{-tA}F'(t)-Ae^{-tA}F(t)=e^{-tA}AF(t)-Ae^{-tA}F(t)$$

عبارت فوق مساوی صفر است .

زیرا e^{-tA} باهرتوانی از ماتریس A در ضرب مستقل ازترتیب است پس $G(t)$ یک مقدار ثابت است به عبارت دیگر $G(t)=G(0)$

از طرف دیگر $G(0)=F(0)=I$

به عبارت دیگر $e^{-tA}F(t)=I$

یعنی $F(t)=e^{tA}$ و به این ترتیب رابطه ۵۰۱ ثابت می‌شود یعنی

$$e^{tA}=\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t}L_k(A)$$

۶ـ مثال عددی :

به عنوان مثال فرض‌می‌کنیم که A یک ماتریس ۴×۴ به صورت زیر باشد .

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 3\\ -1 & -3 & 3 & 2\\ 2 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

دراین صورت می‌خواهیم با توجه به آنچه گفته شد A^{-1} و e^{tA} را حساب کنیم :

۱ـ۶ـ محاسبه ماتریس معکوس

قبل از محاسبه A^{-1} ابتدا نشان دهیم که قضیه همیلتن ـ کیلی در مورد این ماتریس صادق است برای این منظور ابتدا مقادیر خاص آن را حساب می‌کنیم .

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4-\lambda & 1 & 3\\ -1 & -3 & 3-\lambda & 2\\ 2 & 5 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

اگراین دترمینان را نسبت به سطر اول بسط دهیم پیدا می‌کنیم .

$$P(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^3-3\lambda^2-26\lambda+78)+(\lambda-1)(\lambda-3)$$

حال اگر توجه کنیم که معادله درجه سوم داخل پرانتز نیز یک ریشه برابر۳دارد $P(\lambda)$ به صورت زیر نیز نوشته‌می‌شود :

$$P(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda^2-25)$$

بنابراین مقادیر خاص ماتریس عبارتند از :

$$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=3 \quad \lambda_3=5 \;,\; \lambda_4=-5$$

$P(\lambda)$ را به صورت چند جمله ای زیر هم می‌توان نوشت :

$$P(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3-22\lambda^2+100\lambda-25$$

از طرف دیگر توان های دوم ، سوم و چهارم ماتریس A به صورت زیرند :

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 & 2\\ 5 & 28 & 4 & 2\\ 0 & -11 & 3 & -11\\ -5 & 3 & 8 & 29 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & -14 & 7 & -9\\ 5 & 110 & 43 & 84\\ -25 & -108 & 9 & 17\\ 45 & 133 & -7 & -91 \end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix} -25 & -122 & 16 & 8\\ 130 & 751 & 160 & 80\\ 0 & -374 & -123 & -374\\ -130 & 98 & 248 & 749 \end{pmatrix}$$

به راحتی می‌توان ملاحظه کرد که رابطه

$$P(A)=A^4-4A^3-22A^2+100A-75=I=0$$

برقرار است و بنابراین درستی قضیه همیلتن ـ کیلی در این مثال تحقیق می‌شود.

به علاوه از رابطه (۲۰۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$A^{-1}=\frac{1}{75}(A^3-4A^2-22A+100\,I)$$

که پس از محاسبه بدست می‌آوریم:

$$A^{-1}=\frac{1}{75}\begin{pmatrix}78 & -2 & -31 & 17\\ -15 & 10 & 5 & 10\\ -3 & 2 & 31 & 17\\ 21 & 11 & -17 & -19\end{pmatrix}$$

۲ـ۶ـ محاسبه ی e^{tA}:

برای محاسبه ی e^{tA} ابتدا $L_k(A)$ را برای k از ۱ تا ۴ حساب می‌کنیم.

$$L_1(A)=\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}\times\frac{A-\lambda_3 I}{\lambda_1-\lambda_2}\times\frac{A-\lambda_4 I}{\lambda_1-\lambda_4}=$$

$$\frac{A-3I}{1-3}\times\frac{A-5I}{1-5}\times\frac{A+5I}{1+5}$$

و یا بالاخره

$$L_1(A)=\frac{1}{48}(A-3I)(A-5I)(A+5I)$$

$$L_1(A)=\frac{1}{48}(A^3-3A^2-25A+75I)$$

که پس از محاسبه به صورت

$$L_1(A)=\begin{pmatrix}\frac{25}{24} & \frac{-5}{48} & \frac{-5}{8} & \frac{-5}{16}\\ \frac{-5}{24} & \frac{1}{48} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{5}{24} & \frac{-1}{48} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{16}\end{pmatrix}$$

درمی‌آید.

بهمین ترتیب $L_2(A)$ از رابطه

$$L_2(A)=\frac{A-I}{3-1}\times\frac{A-5I}{3-5}\times\frac{A+5I}{3+5}=\frac{-1}{32}(A^3-A^2-25A+25I)$$

بدست می‌آید که نتیجه‌ی آن پس از محاسبه عبارت است از:

$$L_2(A)=\begin{pmatrix}0 & \frac{11}{32} & \frac{11}{16} & \frac{11}{32}\\ 0 & \frac{-7}{32} & \frac{-7}{16} & \frac{-7}{32}\\ 0 & \frac{11}{16} & \frac{11}{8} & \frac{11}{16}\\ 0 & \frac{-5}{32} & \frac{-5}{16} & \frac{-5}{32}\end{pmatrix}$$

$L_3(A)$ نیز از رابطه ی زیر بدست می‌آید:

$$L_3(A)=\frac{A-I}{5-1}\times\frac{A-3I}{5-3}\times\frac{A+5I}{5+5}=\frac{1}{80}(A^3+A^2-17A+15I)$$

که مقدار آن پس از محاسبه برابر است با:

$$L_3(A)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{40} & \frac{-17}{80} & \frac{-3}{40} & \frac{-7}{80}\\ \frac{1}{8} & \frac{17}{16} & \frac{3}{8} & \frac{7}{16}\\ \frac{-1}{10} & \frac{-17}{20} & \frac{-3}{10} & \frac{-7}{20}\\ \frac{3}{40} & \frac{51}{80} & \frac{9}{40} & \frac{21}{80}\end{pmatrix}$$

و بالاخره $L_4(A)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$L_4(A)=\frac{A-I}{-5-1}\times\frac{A-3I}{-5-3}\times\frac{A-5I}{-5-5}=\frac{-1}{480}(A^3-9A^2+23A-15I)$$

و یا

$$L_4(A)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{60} & \frac{-13}{480} & \frac{1}{80} & \frac{9}{160}\\ \frac{1}{12} & \frac{13}{96} & \frac{-1}{16} & \frac{-9}{32}\\ \frac{1}{10} & \frac{13}{80} & \frac{-3}{40} & \frac{-27}{80}\\ \frac{-17}{60} & \frac{-221}{480} & \frac{17}{80} & \frac{153}{160}\end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \frac{25}{24}e^{t} - \frac{1}{40}e^{5t} - \frac{1}{60}e^{-5t} & \frac{-5}{48}e^{t} + \frac{11}{32}e^{3t} - \frac{17}{80}e \\ \frac{-5}{24}e^{t} + \frac{1}{8}e^{5t} + \frac{1}{12}e^{-5t} & \frac{1}{48}e^{t} - \frac{7}{32}e^{3t} + \frac{17}{16}e \\ \frac{-1}{10}e^{5t} + \frac{1}{10}e^{-5t} & \frac{11}{16}e^{3t} - \frac{17}{20}e^{5t} + \frac{13}{80} \\ \frac{5}{24}e^{t} + \frac{3}{40}e^{5t} - \frac{17}{60}e^{-5t} & \frac{-1}{48}e^{t} - \frac{5}{32}e^{3t} + \frac{51}{80} \end{bmatrix}$$

۷ـ کاربرد رابطه در حل یک دستگاه معـــــادلات دیفرانسیل

حال فرض کنیم که بخواهیم دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی زیر را حل کنیم :

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_3 \\
y_2' &= 4y_2 + y_3 + 3y_4 \\
y_3' &= -y_1 - 3y_2 + 3y_3 + 2y_4 \\
y_4' &= 2y_1 + 5y_2 - y_3 - 4y_4
\end{aligned}
$$

به طوریکه شرائط اولیه $y_4(0)=1$ ، $y_3(0)=-1$ ، $y_2(0)=-2$ $y_1(0)=1$ برقرار باشند . قبل از حل این دستگاه ابتـــــدا یادآوری می‌کنیم که اگر در حالت کلی دستگاه $y'=Ay$ که درآن $y=y(t)$ یک بردار با n مولفه $y_1,\dots\dots y_n$ و A یـــک ماتریس $n\times n$ و y' مشتق y است مفروض باشد و بخواهیم y را طوری پیدا کنیم که در شرط اولیه $y(0)=B$ صدق کند . تنها جواب این دستگاه بافرض اینکه B خود یک بردار دارای n موءلفه است به صورت $y=e^{tA}B$ می‌باشد .

حال در مورد دستگاه بالا توجه می‌کنیم که ماتریس ضرائب چیزی جز ماتریس مفروض A در ۶ نیست بنابرایـــن تنها جواب دستگاه که در شرائط اولیه داده شده صدق کنــد عبارت است از :

$$
y=e^{tA}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{pmatrix}
$$

که پس از انجام عملیات به صورت زیر بدست می‌آید :

$$
y_1=\frac{5}{4}e^{t}-\frac{11}{16}e^{3t}+\frac{3}{10}e^{5t}+\frac{11}{80}e^{-5t}
$$

$$
y_2=\frac{-1}{4}e^{t}+\frac{7}{16}e^{3t}-\frac{3}{2}e^{5t}-\frac{11}{16}e^{-5t}
$$

$$
y_3=-\frac{-11}{8}e^{3t}+\frac{6}{5}e^{5t}-\frac{33}{40}e^{-5t}
$$

$$
y_4=\frac{1}{4}e^{t}+\frac{5}{16}e^{3t}-\frac{9}{10}e^{5t}+\frac{187}{80}e^{-5t}
$$

که شرایط اولیه در مورد آنها صادق اند :

فهرست منابع

1) TOM M. APOSTOL CALCULUS. **Volume** I. Ed. Blaisdell Publishing Company 1967
2) TOM M. APOSTOL CALCULUS Volume II. Ed Blaisdell Publishing Company 1969
3) Analyse numérique linéaire. Noël Gastinel Ed Hermann 1966
4) Calcul matricel et tensoriel, A Kaufmann et M. Denis Papin 1960
5) Mathématiques Générales Pisot-Zamanski Ed Dunod 1959
6) The theory of ordinary diffential equations J.C. Burkhill Ed Alan Jeffrey I.T. Adamson. 1961.