آلگوریتم حذف، گاوس و تعمیم تبدیل ستاره به مثلث

دکتر حسین محسنی
دانشیار دانشکده فنی ــ دانشگاه تهران

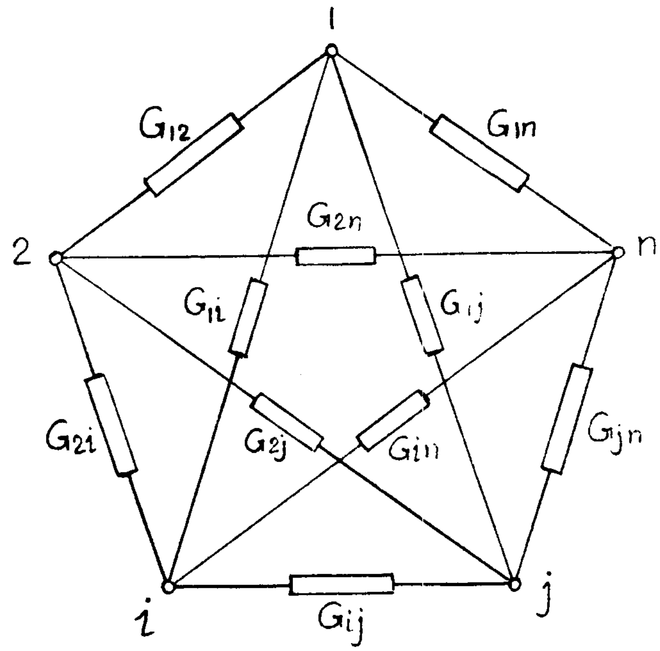
چکیده:

باتبدیل ستاره به مثلث می‌توان با حذف نقطهٔ مرکز ستاره حل مساله مدارهای الکتریکی را در بسیاری از موارد ساده کرد .در تعمیم این تبدیل می‌توان یک یا چند گره ازیک مدارالکتریکی را حذف کرد . در مقالهٔ /۱/ رابطهٔ این‌تبدیــل به دست آورده شده است .

در مقالهٔ زیر ارتباط این تبدیل را با آلگوریتم حذف گاوس نشان می‌دهیم و خواهیم دید که چگونه حذف یک مجهول در چندمعادلهٔ چند مجهولی مربوط به یک مدار الکتریکی‌به معنی حذف یک گره از آن مدار الکتریکی است . همچنین ارتباط این مساله با تجزیهٔ ماتریس‌ادمیتانس به ماتریسهای مثلثی نشان داده می‌شود .

۱ ــ روابط مدار الکتریکی

یک مدار الکتریکی شامل n گروه را مطابق شکل (۱) در نظرمی‌گیریم . بین‌گرهها مقاومتهائی قرا ر دارند . مقاومت بین دو گره i و j با Rij وعکس‌آن با



شکل ۱ : مدار الکتریکی با n گره

$Gij=1/Rij$ نشان داده می‌شود . برای گرههای ۱ تا n می‌توان نوشت :

$$I_1 = (U_1-U_2)\ G_{12} + (U_1-U_i)G_{1i} + (U_1-U_j)\ G_{1j} + (U_1-U_n)\ G_{1n}$$

$$I_2 = (U_2-U_1)\ G_{12} + (U_2-U_i)\ G_{2i} + (U_2-U_j)\ G_{2j} + (U_2-U_n)\ G_{2n}$$

$$I_i = (U_i-U_1)\ G_{1i} + (U_i-U_2)\ G_{2i} + (U_i-U_j)\ G_{ij} + (U_i-U_n)\ G_{in} \qquad (1)$$

$$I_j = (U_j-U_1)\ G_{1j} + (U_j-U_2)\ G_{2j} + (U_j-U_i)\ G_{ij} + (U_j-U_n)\ G_{jn}$$

$$I_n = (U_n-U_1)\ G_{1n} + (U_n-U_2)\ G_{2n} + (U_n-U_i)\ G_{in} + (U_n-U_j)\ G_{jn}$$

ویا

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_i \\ I_j \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma G_1 & -G_{12} & -G_{1i} & -G_{1j} & -G_{1n} \\ -G_{12} & \Sigma G_2 & -G_{2i} & -G_{2j} & -G_{2n} \\ -G_{1i} & -G_{2i} & \Sigma G_i & -G_{ij} & -G_{in} \\ -G_{1j} & -G_{2j} & -G_{ij} & \Sigma G_j & -G_{jn} \\ -G_{1n} & -G_{2n} & -G_{in} & -G_{jn} & \Sigma G_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_i \\ U_j \\ U_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

یعنی

$$I = Gu \qquad (۳)$$

۲ ـ مشخصات ماتریس G

جزء G_{ij} از ماتریس G رسانائی بین دو گره i و j است. جزء G_{ij} که به صورت ΣG_i نوشته شده است مجموع رسانائیهائی است که بهگرهشماره i وصل اند. U_1 تا U_n پتانسیل گرههای ۱ تا n از مدار است. I_1 تا I_n جریانهای واردشونده بهگرههای ۱ تا n از طریق دیگر قسمتهای مدار است که در شکل ۱ در نظر گرفته نشده اند.

ماتریس G خواص جالبی دارد. از جمله اینکه یک ماتریس متقارن است. زیرا $G_{ij} = G_{ji}$ دیگر آنکه مجموع اجزاء هر سطر وهرستون آن صفر است. ولذا یک ماتریس ویژه (۱) است. اگر n، تعدادسطر و ستون ماتریس G باشد رتبهء (۲) آن $n-1$ است. یعنی باید یک سطر و یک ستون آن را حذف کرد تا ماتریس باقی ماندهناویژهباشد. این به معنی آن است کهازشبکه بایدحداقل پتانسیل یک گره مشخص باشد تابتوان پتانسیلگرههایدیگر را بهدست آورد. صورت درجه دو (۳) ماتریس G همیشه یک عدد حقیقی مثبت است. به عبارت دیگر ماتریس G یک ماتریس معین مثبت است.

۳ ـ حذف یک گره از مدار

تبدیل ستاره بهمثلث به معنی حذف یک (یا چند گره) ازمدار است. البته حذف یک گره به شرطی ممکن است که آن گره فقط به مقاومتهائی که در بالا در نظر گرفته شد متصل باشد و مثلا "به یک منبع ولتاژیاجریان متصل نباشد.

1) singular 2) Rank 3) Quadratic Form

به‌بیان دیگر حذف یک گره به شرطی ممکن است که مجموع جریانهای وارد شونده به آن گره مطابق رابطهٔ (۱) برابر صفر باشد. مثلا " اگر I_i در رابطهٔ (۱) صفر باشد می‌توان گره i را حذف کرد.

پس از حذف این‌گره، یک‌مدار معادل برای مداراصلی به دست می‌آید. روش محاسبه اجزاء مدار معادل در مقالهٔ /۱/ آورده شده است.

در اینجانشان داده می‌شود که چگونه حذف یک مجهول مطابق آلگوریتم‌حذف گاوس به همان نتیجه می‌رسد.

از روابط (۱)، پتانسیل U_i را حذف می‌کنیم‌والبته در نظر می‌گیریم که I_i برابر صفر است.

$$U_i = \frac{G_{1i}U_1+G_{2i}U_2+G_{ii}U_i+G_{in}U_n}{\Sigma G_i} \qquad (۴)$$

باقرارداد‌ن u_i در رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
I_1 &= +(\Sigma G_1 - \tfrac{G_{1i}^2}{\Sigma G_i})U_1 - (G_{12} + \tfrac{G_{1i}G_{2i}}{\Sigma G_i})U_2 - \\
&\quad -(G_{1j} + \tfrac{G_{1i}G_{ii}}{\Sigma G_i})U_j - (G_{1n} + \tfrac{G_{1i}G_{in}}{\Sigma G_i})U_n \\
I_2 &= -(G_{12} + \tfrac{G_{1i}G_{2i}}{\Sigma G_i})U_1 + (\Sigma G_2 - \tfrac{G_{2i}^2}{\Sigma G_i})U_2 - \\
&\quad -(G_{2j} + \tfrac{G_{2i}G_{ii}}{\Sigma G_i})U_j - (G_{2n} + \tfrac{G_{2i}G_{in}}{\Sigma G_i})U_n \\
I_j &= -(G_{1j} + \tfrac{G_{1i}G_{ii}}{\Sigma G_i})U_1 - (G_{2j} + \tfrac{G_{2i}G_{ii}}{\Sigma G_i})U_2 + \\
&\quad +(\Sigma G_j - \tfrac{G_{ii}^2}{\Sigma G_i})U_j - (G_{jn} + \tfrac{G_{ii}G_{in}}{\Sigma G_i})U_n \\
I_n &= -(G_{1n} + \tfrac{G_{1i}G_{in}}{\Sigma G_i})U_1 - (G_{2n} + \tfrac{G_{2i}G_{in}}{\Sigma G_i})U_2 - \\
&\quad -(G_{jn} + \tfrac{G_{ii}G_{in}}{\Sigma G_i})U_j + (\Sigma G_n - \tfrac{G_{in}^2}{\Sigma G_i})U_n
\end{aligned} \qquad (۵)$$

که در آن $\Sigma Gi = \sum_{k=1}^{n} G_{ik}$ می‌باشد.

روابط (۵) را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت:

$$\overset{*}{I} = \overset{**}{G}\overset{}{u} \qquad (۶)$$

در روابط (۳) و (۶)، اجزاء I و $\overset{*}{I}$ همچنین u و $\overset{*}{u}$ یکی هستند. با این تفاوت که در $\overset{*}{I}$ و $\overset{*}{u}$ به ترتیب I_i و u_i دیگر وجود ندارند.

با داشتن روابط (۵) می‌توان مداری شامل $n-1$ گره (۱ تا n بدون i) یافت‌که‌برای آن مدار، روابط (۵) صادق باشند. برای این کار کافی است بین دو گره l و k از مدار، رسانائی G^*_{kl} را قرار داد. و طبق روابط (۵) داریم:

$$G^*_{kl} = G_{kl} + \frac{G_{ik}\ G_{il}}{\Sigma G_i} \qquad (۷)$$

پس با حذف یک گره از مدار الکتریکی، رسانائی بین دیگر گرهها طبق رابطهٔ (۷)، تعیین‌می‌شود که با نتیجهٔ به‌دست آمده در مقالهٔ /۱/ مطابقت دارد.

۴ ــ تجزیه ماتریس ادمیتانس به ماتریسهای مثلثی

ماتریس ادمیتانس از رابطهٔ (۲) را می‌توان به دو ماتریس مثلثی تجزیه کردونوشت /۲/:

$$G=CB \qquad (۸)$$

که در آن ماتریسهای C و B مثلثی وبه شکل زیرند.

$$B = \begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1i} & \cdots & b_{1n} \\
0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2i} & \cdots & b_{2n} \\
0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3i} & \cdots & b_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & b_{ii} & \cdots & b_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{nn}
\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
c_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
c_{31} & c_{32} & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{ni} & \cdots & 1
\end{pmatrix}$$

اجزاء هرستون وهرسطر ماتریسهای B و C متناوبا " از روابط زیربه دست می‌آیند / ۲ /

$$B_{ik} = G_{ik} - C_{i1}B_{1k} - C_{i2}B_{2k} - \dots - C_{i,i-1}B_{i-1,k} \qquad (۹)$$

$$C_{ki} = (G_{ki} - C_{k1}B_{1i} - C_{k2}B_{2i} - \dots - C_{k,i-1}B_{i-1,i})/B_{ii} \qquad (۱۰)$$

به‌دلیل متقارن بودن ماتریس G می‌توان نوشت /۲/ :

$$C_{Ki} = B_{ik}/B_{ii} \qquad (۱۱)$$

سطراول ماتریس B ، همان سطر اول ماتریس G است .ستون اول ماتریس C از رابطه (۱۰) به صورت زیر به دست می‌آید :

$$C_{k1} = (G_{k1}/B_{11}) \qquad (۱۲)$$

وچون B_{11}، همان ΣG_1 یعنی $\Sigma G_1 = \sum_{i=2}^{n} G1i$ است می‌توان نوشت :

$$G_{k1} = (-G_{k1}/\Sigma G_1) \quad ;K=1,2,\dots,n \qquad (۱۳)$$

سطر دوم ماتریس B از رابطه (۹) به صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$B_{k2} = G_{k2} + C_{21}\, B_{1k} \qquad (۱۴)$$

که با توجه به رابطه (۱۰)

$$B_{k2} = G_{k2} + \frac{G_{21}G_{1k}}{\Sigma G_1} \qquad (۱۵)$$

مقایسه رابطه (۱۵) با (۷) نشان می‌دهد که اجزاء سطر دوم ماتریس B یعنی B_{k2} ادمیتانس بین گره ۲ و گره K است اگر گره ۱ حذف شده باشد . برای محاسبه جزء قطر سطر دوم باید نوشت :

$$B_{22} = G_{22} + \frac{G_{21}\, G_{12}}{G_{11}} \qquad (۱۶)$$

که با توجه به مساوی بودن G_{12} و G_{21} می‌توان نوشت :

$$B_{22} = -\Sigma G_2 + \frac{G_{12}^2}{G_1} \qquad (۱۷)$$

حال بدون آنکه ستون دوم ماتریس C محاسبه شود می‌توان قسمتی از محاسبات سطرهای سوم تا nام ماتریس B را انجام داد . یعنی نوشت :

$$\breve{B}_{ik} = G_{ik} - C_{i1}\, B_{1k} \qquad (۱۸)$$

$\breve{B}_{ik}$ البته مساوی B_{ik} نیست ، بلکه در مورد آن قسمتی از محاسبه انجام شده است . از رابطه (۱۸) و (۱۳) ، مقدار $\breve{B}_{ik}$ برحسب اجزاء ماتریس G به‌دست می‌آید :

$$\breve{B}_{ik} = G_{ik} + \frac{G_{i1}\, G_{1k}}{\Sigma G_1} \qquad (۱۹)$$

و جزء قطری سطر i به صورت زیر است :

$$\breve{B}_{ii} = G_{ii} + \frac{G_{1i}^2}{\Sigma G_1} \qquad (۲۰)$$

بااین محاسبه ، مقادیر ادمیتانس بین نقاط ۲ تا n از مدار پس از حذف گره ۱ به دست می‌آید .

ماتریس $\breve{B}$ راکه به این ترتیب به دست آمده است می‌توان تغییرشکل داد . به این صورت که سطر و ستون اول آن را کنار گذاشت واجزاء صفر (زیرقطر) آن را از اجزاء بالای قطر به ترتیبی نوشت که یک ماتریس متقارن به‌دست آید . یعنی نوشت $\breve{B}_{1k} = \breve{B}_{ki}$. این ماتریس که با علامت $\breve{G}$ مشخص می‌شود ماتریس ادمیتانس مدار است اگر گره شماره ۱ حذف شده باشد . با ماتریس $\breve{G}$ می‌توان به ترتیب بالا رفتار کرد وهرتعداد ازگرههای آزاد شبکه راحذف کرد . سرانجام فقط گرههای غیرآزاد شبکه باقی می‌مانند . این گرهها آنهائی هستند که به یک منبع یا به مدار الکتریکی دیگری که در این محاسبه ها منظور نشده‌اند وصل اند .

۵ ــ مثال

یک مدار الکتریکی شامل ۱۲ مقاومت و ۸ گره به صورت یک مکعب متصل شده‌اند (شکل ۲). مقدار مقاومت اندازه‌گیری شده بین دوگوشهٔ روبروی این مکعب چه مقداراست. ۰/۴/۰

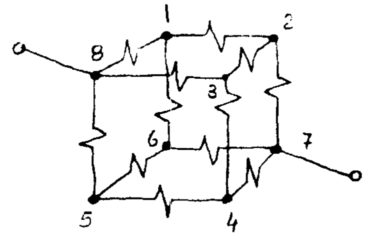
برنامهٔ کامپیوتری به‌منظور حذف گرههای آزاد شبکه با استفاده‌از رابطه (۱۹) تهیه شده است.

در این مثال از ۸ گره، ۶ گره حذف می‌شوند ماتریس ادمیتانس ۲ گره ویک شاخهٔ باقیمانده به صورت زیراست.

$$\left[\begin{array}{c|c} 1.2 & -1.2 \\ \hline -1.2 & 1.2 \end{array}\right]$$

ادمیتانس‌بین ۲گره باقی‌مانده‌برابر ۱/۲ زیمنس‌است.

(هر مقاومت برابر ۱ اهم است)



شکل ۲:

۶ ــ معانی فیزیکی اجزاء ماتریسهای مثلثی

به این ترتیب به سادگی مشخص می‌شود که منفی جزء B_{ik} از ماتریس B، مقدار ادمیتانس بین دو نقطهٔ j و k است (K>i) اگر نقاط ۱ تا ۱ ــ i به‌کمک تعمیم ستاره به مثلث حذف شده باشند.

منفی جزء C_{ki} ازماتریس C، نسبت ادمیتانس بین نقاط k و i به مجموع ادمیتانسهای متصل به نقطهٔ i است اگر نقاط ۱ تا i-1 حذف شده باشند. اگر به جای ماتریس ادمیتانس، ماتریس‌اندوکتانس به ماتریسهای مثلثی

```
10  REM PURPUSE : TO ELIMINATE
20  REM "NH" NODES OF AN ELECT.
30  REM CIRCUIT WITH "N" NODES.
40  REM "G": THE UPPER PART OF
50  REM SYM. ADMITTANCE MATRIX
60 REM IS STORED ROWWISE IN A
70  REM N (N+1)/2 STORAGE.
80 REM AFTER ELIMINATION OF
90  REM EACH NODE, THE NEW ADM
95  REM IT. MATRIX IS PRINTED.
96  REM AT THE END THE TRIANG
97  REM ULAR MATRIX B IS STOR
98  REM ED ROWWISE IN "G".
99  REM--------------------
120  DIM G(1000)
130 INPUT "N , NH ",N,NH
140 K=N*(N+1)*. 5
150 FOR I=1 TO K
160 READ G(I)
170 NEXT I
180 DATA 3,-1, 0, 0, 0,-1, 0,-1
190 DATA     3,-1, 0, 0, 0,-1, 0
200 DATA        3,-1, 0, 0, 0,-1
210 DATA           3,-1, 0,-1, 0
220 DATA              3,-1, 0,-1
230 DATA                 3,-1, 0
240 DATA                    3, 0
250 DATA                       3
260 JK=0
270 LD=1
280 FOR L=1 TO NH
290 D=1!/G(LD)
300 NL=N-L
310 M=L*N-(L-1)*L*.5
320 L1=L+1
330 JJ=0
340 FOR J=L1 T O N
350 JJ=JJ+1
360 A=G(LD+JJ)
370 K=M+1
380 M=M+NL
390 II=J-L1
400 FOR I=K TO M
410 II=II+1
420 G(I)=G(I)-G(LD+II)*A*D
430 PRINT G(I),
440 NEXT I
450 PRINT " "
460 NL=NL-1
470 NEXT J
480 PRINT "-----"
490 LD=LD+N-L+1
500 NEXT L
510 STOP
520 END
```

تجزیه شود جزء B_{ik} ،$(K>i)$ اندوکتانس متقابل بیــــن پیچکهای i و k است و B_{ii} ، خوداندوکتانس پیچک i است اگر پیچکهای ۱ تا i-۱ اتصال کوتاه شده باشند . ضریب C_{ki} نسبت تبدیل بین پیچکهای i و k است اگر پیچکهای ۱ تا i-۱ اتصال کوتاه شده باشندواین مطلب در /۳/ نشان داده شده است .

فهرست منابع :

۱- تعمیم تبدیل ستاره به مثلث : دکتر پرویز جبه دار مارالانی ، مجله دانشکده فنی شماره ۴۶، سال ۱۳۶۴ .

2- Zurmuehl, R. ; Matrizen, Eine Darstellung fuer die Ingeneure Springer Verlag Berlin Heidelberg Goettingen

3- Mohseni, H. ; Physikalische Bedeutung der Elemente der matrixfaktoren, die durch Dreieckfaktorisierung der Induktivitaetsmatrix entstehen Elektrotechnik and Maschincnbau E&M 7/1979 Wien

4- Skilling H.H. ,'Electric Networks Wieley New york 1974

تشکر وقدردانی :

این مقاله باکمک مالی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه تهران تهیه گردیده است .

نویسنده از دفتر طرحهای تحقیقاتی دانشگاه تهران صمیمانه تشکر می‌نماید .