نحوهٔ تغییرات مجذورفرکانس (ω^2)
در فاصلهٔ بین مودهای طبیعی

عبدالحمید حنانه* ــ منصور نیکخواه بهرامی **

چکیده :

برای یک سیستم ارتعاشی می‌توان نشان دادکه ω^2 درمودهای طبیعی ارتعاش دارای نقطه ایستا (وبه عبارت دیگراکسترمم) است و بجز مسئلهٔ ذکر شده که تغییرات ω^2 در همسایگی هر یک از مودهای طبیعی ناچیز می‌باشد،دربارهٔ نحوهٔ تغییرات ω^2 در فاصلهٔ بین مودهای طبیعی چیزی بیان نشده . ادعای Rayleigh مبنی براینکه در هر سیستم ارتعاشی ، ω^2 در اولین مود طبیعی دارای کوچکترین مقدار ممکن خود است (مینیمم مطلق) توسط Bickley,Temple اثبات گردیده و به این معنا است که‌مودهای مقید (ودیگر مودهای‌طبیعی) ،دارای فرکانسی‌بزرگتر از اولین فرکانس طبیعی هستند .همچنین می‌توان‌نشان‌داد که در سیستمهای با تعداد محدودی درجهٔ آزادی ، بزرگترین فرکانس قابل دسترسی ، آخرین فرکانس طبیعی است و فرکانس مودهای‌مقید (ودیگرمودهای طبیعی) از بزرگترین فرکانس طبیعی ، کوچکترند . نهایتاً " می‌توان گفت که کلیهٔ حالات ارتعاشی یک سیستم با تعداد درجات آزادی محدود دارای فرکانسی مابین اولین وآخرین فرکانس طبیعی آن سیستم خواهند بود . در بارهٔ رفتار تابع ω^2 درغیر از مودهای‌طبیعی (فاصلهٔ بین مودهای طبیعی) نمی‌توان چیزی افزود مگر آنکه نحوهٔ تغییرات شکل مود سیستم‌ارتعاشی به‌وضوح معین‌شود .دراین‌مبحث ،تمهیدی‌بکارگرفته‌شده که درآن تابع شکل مود بطور هموار و یکنواختی‌با تغییر یک پارامتر ظاهری p از یک مود طبیعی به‌مود طبیعی دیگری تغییر حالت دهد ، به این ترتیب می‌توان ω^2 را به صورت تابعی از متغیر p درهرمحدودهٔ موردنظری‌در فاصلهٔ بین مودهارسم نموده ورفتار آن را بررسی کرد . در ادامهٔ بحث ، مسئله‌برای‌حالت ارتعاشات عرضی (خمشی) یک تیر با شرایط مرزی متفاوت بیان شده است . که برای دیگر موارد نیز قابل بررسی است .

تحلیل ریاضی مسئله :

معادلهٔ حرکت برای‌ارتعاشات عرضی یک تیربه‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل زیراست ،که درآن $w(x)$ شکل موداست :

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(X)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right]-\omega^2 m(x)\,w(x)=o$$

در این رابطه ،EI ضریب صلبیت خمشی و m ،جرم بر واحد طول تیر ، به‌صورت‌توابعی‌از x بیان شده‌اند که اگر در سراسر تیر مقداری ثابت داشته باشند . خواهیم داشت :

$$EI\frac{d^4}{dx^4}w(x)-\omega^2 mw(x)=o$$

در مقایسه با شکل کلی مسئلهٔ مقدار مشخصه : $L[w]=\lambda M[w]$ دیده می‌شود که عملگرهای L و M عبارت‌اند از :

$$L=EI\frac{d^4}{dx^4}\quad ,\quad M=m$$

رابطهٔ نسبت‌ریلی درحالت کلی به‌صورت زیراست که درآن S ناحیه‌ای است‌که معادلهٔ مشخصه درآن برقرار است (تمام طول تیر) :

$$R(w)=\frac{\int_S w\,L[W]ds}{\int_S w\,M[W]ds}=\frac{A(w)}{B(w)}=\omega^2$$

با قراردادن شکل مودطبیعی w_n به جای w ، فرکانس‌طبیعی ω_n^2 به دست می‌آید . واز قرار دادن هرشکل مودمقیدی ، فرکانس آن مود مقید حاصل می‌شود .

بنابراین برای ارتعاشات خمشی خواهیم داشت :

$$R(w)=\omega^2=\frac{\int_o^L EIw(x)\,w^{IV}(x)\,dx}{\int_o^L mw^2(x)\,dx}=\frac{EI\int_o^L w(x)\,w^{IV}(x)\,dx}{m\int_o^L w^2(x)\,dx}$$

و پس از انتگرالگیری از طریق جزء به جزء داریم :

---

* دانشجوی فوق لیسانس دانشکده فنی ــ گروه مهندسی مکانیک

** استاد دانشکده فنی ــ گروه مهندسی مکانیک

$$R(w)=\omega^2=\frac{EI\int_0^L (w''(x))^2dx}{m\int_0^L w^2(x)\,dx}$$

اینک تابع کلی شکل مود را برحسب شکل مودهای طبیعی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w(x)=\sum_{i=1}^{n} w_i(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k) \qquad (1)$$

که شبیه به رابطهٔ درونیابی (انترپولاسیون) لاگرانژ است، به این صورت که هرگاه به جای متغیر مستقل p، عددی طبیعی $(1,2,\dots,n)$ که معرف یک مود طبیعی است قرار گیرد، شکل مود به صورت زیر درخواهد آمد که ضریبی از شکل مود طبیعی با همان شماره است.

$$w(x)=w_i(x)\prod_{\substack{k=1\\K\neq i}}^{n}(i-k)$$ (عدد طبیعی مابین n, 1) $p=i$

توجه شود که تساوی p و i ضرایب دیگرمودها را صفر می‌کند. استفاده ازاین رابطه‌درنسبت ریلی به‌ازای $p=i$، فرکانس طبیعی ω_i^2 را می‌دهد زیرا مجذور ضریب اضافی $\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(i-k)$ از صورت و مخرج می‌شود.

اگر از خود رابطهٔ درونیابی لاگرانژ استفاده کنیم:

$$w(x)=\sum_{i=1}^{n} w_i(x)\frac{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(i-k)} \qquad (2)$$

به ازای $p=i$ خواهیم داشت: $w(x)=w_i(x)$

که دقیقاً "همان شکل مودطبیعی سیستم‌است واگرچه استفادهٔ این رابطه در نسبت ریلی به ازای $p=i$ بازهم ω_i^2 راخواهد داد اما تفاوت این دو روش وقتی ظاهر می‌شود که P عددی طبیعی نباشد، در این صورت $w(x)$، ترکیب خطی از شکل مودهای طبیعی با ضرایبی متفاوت است ودیگرمقادیر نسبت ریلی به ازای دو روش برابر نخواهدبود، در بارهٔ نحوهٔ تفاوت این دو روش بحث خواهد شد.

با در دست داشتن $w(x)$ می‌توان مقادیر $A(w)$ و $B(w)$ راحساب کرد:

$$A(w)=EI\int_0^L (w''(x))^2dx$$

$$B(w)=m\int_0^L (w(x))^2dx \qquad R(w)=\omega^2=\frac{A(w)}{B(w)}$$

$$w(x)=\sum_{i=1}^{n} w_i(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k) \qquad w''(x)=\sum_{i=1}^{n} w_i''(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)$$

$$\begin{cases} A(w)=EI\int_0^L \left\{\sum_{i=1}^{n} w_i''(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)\right\}^2dx \\ B(w)=m\int_0^L \left\{\sum_{i=1}^{n} w_i(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)\right\}^2dx \end{cases}$$

اما ازشرط تعامد برای مسئله مقدار مشخصهٔ عام داریم:

$$w_i(x)\,M\left[w_j(x)\right]ds=m\int_0^L w_i(x)\,w_j(x)\,dx=0 \qquad i\neq j$$

$$w_i(x)\,L\left[w_j(x)\right]d_s=EI\int_0^L w_i(x)\frac{d^4w_j(x)}{dx^4}dx=0 \qquad i\neq j$$

و با انتگرالگیری جزء به‌جزء به دست می‌آید

$$EI\int_0^L w_i''(x)\,w_j''(x)\,dx=0 \qquad i\neq j$$

بنابراین درعبارات $A(w)$ و $B(w)$ تنها توانهای دوم $W_i(x)$ و $w_i''(x)$ باقی می‌مانند. بنابراین.

$$\begin{cases} A(w)=EI\sum_{i=1}^{n}\int_0^L (w_i''(x))^2\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)^2dx \\ B(w)=m\sum_{i=1}^{n}\int_0^L (w_i(x))^2\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)^2dx \end{cases}$$

حال باقی می‌ماند تعیین توابع شکل مودهای طبیعـــــی $w_i(x)$، برای ابتدا و انتهای تیر ، شرایط مرزی گوناگونی می‌توان در نظر گرفت .مانند : درگیر (Clamped) لولا شـــده (Hinged) هدایت‌شده (Guided) وآزاد (Free) ، برای هریک از دوسرتیر می‌توان هر یک از این چهـار حالت رااختیارکرد که باترکیب آنها و حذف حالات تکراری ، ۱۰ حالت ممکن خواهد شد ، برای چنین تیرهایی که تحت ارتعاش خمشی قراردارند فرض می‌کنیم :

$$\begin{cases} w_i(x) = A\cos(\beta_i x) & \text{(a)} \quad \text{تیردوسرآزاد} \\ w_i(x) = A\sin(\beta_i x) & \text{(b)} \quad \text{بقیهٔ حالات} \end{cases}$$

می‌دانیم‌که‌رابطهٔ (b) برای حالت درسرلولا (H-H) صحیح ودقیق‌بوده وداریم :

$$w_i(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}}\sin(\beta_i x) \quad \text{و} \quad \beta_i = \frac{i\pi}{L}$$

که توابع $w_i(x)$ نسبت به اپراتور M، (m یا جرم بر واحد طول)نرمالیزه شده‌اند .رابطهٔ (b) برای‌حالات‌دوسرهدایت شده (H-H) ویک سرلولاویک سرهدایت‌شده (H-G) نیـز دقیق است ،امابرای بقیهٔ حالتها ، روابط (a) و (b) دقیق نبوده و تقریبی است . به ویژه برای $i<3$ برای حالات (F-G) , (C-G) , (F-H) , (C-H) شکل‌مود فرض شده از رابطهٔ (b) ، حتی شرط تعامد مودهای طبیعی را برآورده نمی‌کند .مهذا چون به یک تحلیل‌کیفی پرداخته‌ایم ، فعلا " خود رامجازبه استفاده‌ازاین روابط دانسته ودرانتها عواقب آن‌را بررسی می‌کنیم‌شکل مودهای واقعی ودقیق درموارد فوق پیچیده بوده وکاربرد آنها در نسبت ریلی ، مستلزم استفادهٔ گسترده‌ای ازروشهای‌عددی است ، که بررسی کاملتر به فرصت بعدی موکول می‌شود دراینجا تنها به عنوان مثال ، شکل‌مود طبیعـی برای حالت (C-F) رادرنظرمی‌گیریم :

$$w_i(x) = \frac{1}{2C}\Big[M(\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x)) + N(\cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x))\Big]$$

که در آن :

$$M = \cosh(\beta_i L) + \cos(\beta_i L)$$

$$N = \sinh(\beta_i L) + \sin(\beta_i L)$$

$$C = \sin(\beta_i L)\cosh(\beta_i L) - \cos(\beta_i L)\sinh(\beta_i L)$$

دیده می‌شود که حل تحلیلی برای محاسبهٔ A(w) و B(w) چندان ساده نخواهد بود .یادآوری‌می‌شودکه در این مبحث از حرکت جسم صلب تیر که برای آن $\omega=0$ است به عنــوان اولین فرکانس طبیعی ،صرف نظر نموده و کوچکترین فرکانس غیر صفر را فرکانس طبیعی مود اول در نظر می‌گیریم .

حال به محاسبات ریاضی می‌پردازیم :

$$\begin{cases} w_i^2(x) = A^2\cos^2(\beta_i x) \\ w_i^2(x) = A^2\sin^2(\beta_i x) \end{cases} \quad \begin{cases} w_i''^2(x) = A^2\beta_i^4\cos^2(\beta_i x) & \text{(F-F)} \\ w_i''^2(x) = A^2\beta_i^4\sin^2(\beta_i x) & \text{بقیهٔ حالتها} \end{cases}$$

الف) حالت تیردوسر آزاد (F-F) :

$$A(w) = EI\sum_{i=1}^{n}\int_0^L \Big\{A^2\beta_i^4\cos^2(\beta_i x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)^2\Big\}dx$$

$$A(w) = EIA^2\sum_{i=1}^{n}\beta_i^4\Big(\int_0^L\cos^2(\beta_i x)dx\Big)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)^2$$

$$B(w) = mA^2\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_0^L\cos^2(\beta_i x)dx\Big)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)^2$$

ب) دربقیهٔ حالات ،برای A(w) و B(w) شبیه همین‌روابط به‌دست می‌آید فقط به جای $\cos^2(\beta_i X)$ باید $\sin^2(\beta_i X)$ قراردارد ، اما از طرفی

$$\sin^2(\beta_i x) = \frac{1-\cos(2\beta_i x)}{2} \quad \text{و} \quad \cos^2(\beta_i x) = \frac{1+\cos(2\beta_i x)}{2}$$

و به‌طور کلی می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} A(w) = \Big[\sum_{i=1}^{n}\beta_i^4 S_i\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)^2\Big]EIA^2 \\ B(w) = \Big[\sum_{i=1}^{n}S_i\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p-k)^2\Big]mA^2 \end{cases}$$

که درآنها :

$$S_i = \int_0^L\Big[\frac{1\pm\cos(2\beta_i x)}{2}\Big]dx$$

علامت مثبت برای حالت (F-F) وعلامت منفی برای بقیهٔ حالتهاست. حال تعریف می‌کنیم :

$$\beta i=\frac{\alpha_i \pi}{L} \Rightarrow \alpha i=\frac{\beta_i L}{\pi}$$

$$S_i=\left[\frac{x}{2} \pm \frac{\sin(2\beta_i x)}{4\beta_i}\right]_o^L=\left[\frac{L}{2} \pm \frac{\sin(2\beta_i L)}{4\beta_i}\right] \Longrightarrow$$

$$Si=\left[\frac{L}{2} \pm \frac{\sin(2\pi\alpha_i)}{4\pi\alpha_i/L}\right]=\frac{L}{2}\left[1\pm \frac{\sin(2\pi\alpha_i)}{2\pi\alpha_i}\right]=\frac{L}{2}T_i$$

$$\omega^2(p)=\frac{A(w)}{B(w)}=\frac{EIA^2L/2}{mA^2L/2}\;\frac{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i^4 T_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n}(p-k)^2)}{\sum_{i=1}^{n}(T_i \prod_{K=1, K\neq i}^{n}(p-k)^2)}$$

$$\Longrightarrow \omega^2(p)=\frac{EI}{m}\frac{\pi^4}{L^4}\;\frac{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^4 T_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n}(p-k)^2)}{\sum_{i=1}^{n}(T_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n}(p-k)^2)}$$

فرکانس طبیعی i ام : $\omega_i=(\beta_i L)^2\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}=\beta i^2\sqrt{\frac{EI}{m}}$

$$\Longrightarrow \omega_i^2=\beta_i^4\frac{EI}{m}=\alpha_i^4\frac{\pi^4}{L^4}\frac{EI}{m}$$

$$\Longrightarrow \omega_1^2=\alpha_1^2\frac{\pi^4}{L^4}\times\frac{EI}{m} \Longrightarrow \frac{\pi^4}{L^4}\frac{EI}{m}=\frac{\omega_1^2}{\alpha_1^4}$$

$$\frac{\omega^2(p)}{\omega_1^2}=\frac{1}{\alpha_1^4}\;\frac{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^4 T_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n}(p-k)^2)}{\sum_{i=1}^{n}(T_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n}(p-k)^2)} \quad A$$

$$\alpha_i=\frac{\beta_i L}{\pi}$$

$$T_i=\left[1\pm\frac{\sin(2\pi\alpha_i)}{2\pi\alpha_i}\right]=\left[1\pm\frac{t_i}{2\pi\alpha_i}\right]$$

علامت مثبت برای حالت (F-F) و منفی برای بقیهٔ حالات است.

و اگراز رابطهٔ درونیابی لاگرانژ استفاده کنیم باطی همین مسیر خواهیم داشت :

$$\frac{\omega^2(p)}{\omega_1^2}=\frac{1}{\alpha_1^4}\;\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^4 T_i \frac{\Pi(p-k)^2}{\pi(i-x)^2}}{\sum_{i=1}^{n}T_i\frac{\Pi(p-k)^2}{\Pi(i-k)^2}} \quad (B)$$

$$\left(\left(\Pi\equiv\prod_{k=1, k\neq i}^{n}\right)\right)$$

با استفاده از جدول توابع مشخصهٔ مودهای ارتعاشی تیرهاو حذف حالات حرکت جسم صلب با فرکانس $\omega=0$ که در موارد (F-F) , (F-G) , (G-C) و (F-H) وجـــود دارد، برای α_i و $\beta_i L$ به جای i, مقدار i+1 را منظـور می‌کنیم و ۱۰ حالت مختلف به 5 حالت تقلیل می‌یابد و خواهیم داشت : (علامت * برای شکل مودهای دقیق است)

Boundary condition	$\beta_i l$	α_i	[illegible]	t_i
-F) & (C-C)	$\frac{2i+1}{2}\pi$	$\frac{2i+1}{2}$	3/2	0
-G) & (C-G)	$\frac{4i-1}{4}\pi$	$\frac{4i-1}{4}$	3/4	-1
-H) & (C-H)	$\frac{4i+1}{4}\pi$	$\frac{4i+1}{4}$	5/4	+1
-G)* & (H-H)*	$i\pi$	i	1	0
-H)* & (C-F)	$\frac{2i-1}{2}\pi$	$\frac{2i-1}{2}$	1/2	0

: exact

ممکن است این سئوال پیش آید که چرا رابطهٔ درونیابی لاگرانژ مستقیما " برای مجذور فرکانسهای طبیعی استفاده نمی‌شود به این صورت که :

$$\frac{\omega^2(p)}{\omega_1^2}=\frac{1}{\omega_1^2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\prod_{k=1, k\neq i}^{n}\frac{(p-k)}{(p-i)} \quad (C)$$

مجددا " این روش به ازای مقادیر اعداد طبیعـی برای p ، یعنی P=i مجذور فرکانس طبیعی همان شماره یعنـی همان ω_i^2 را به دست می‌دهد، ولی بازتفاوت در اعداد غیر صحیح برای p واست.

درنمودارهای (1) تا (4) ، منحنی توابع $\omega^2(p)$ برای حالت (H-H) یا (G-G) بااستفاده ازروابط (A) تا (C) رسم شده که در آنها : $\alpha_1=1\;\alpha_i=i\;\;t_i=o \Rightarrow T_i=1$

در نمودارهای (5) و (6) منحنی توابع $\omega^2(p)$ برای همهٔ حالتها با استفاده از روابط (A) رسم شده .

کلیه نمودارها در صفحه مختصات P-Y و $P-\log_{10}Y$ برای فاصلهٔ $0.5<p<6.5$ رسم شده که در آن: $y=\frac{\omega^2(p)}{\omega_1^2}$ می‌باشد .

باید دانست که تنها 5 مود اول در نظر گرفته شده است بنابراین شکل مود سیستم ارتعاشی پیوسته (تیر) برحسب مختصات 5 نقطهٔ معین از آن بیان شده و واضح است که شکل مود ششم به بعد نمی‌تواند برحسب مختصات 5 نقطه از تیر بیان شود وفرکانس طبیعی پنجم ، بزرگترین فرکانس طبیعی خواهد بود ، به بیان دیگر یک سیستم پیوسته به سیستمی مجزابا 5 درجهٔ آزادی تقریب شده است ، فرض n=5 برای همهٔ نمودارها برقرارست زیرا نامحدود فرض کردن n (یعنی آنچه در واقعیت وجود دارد) محاسبات را غیر ممکن می‌سازد .

نتایج به دست آمده:

الف ، نمودارهای (1) تا (4)

۱ ــ منحنی A که از درونیابی "شبه لاگرانژ" بین شکل مودهای طبیعی حاصل شده ، انتظارهای ما را برآورده می‌سازد ، درمود اول یک مینیمم مطلق ، ودر مود آخر یک ماکزیمم مطلق وجود دارد و درسایر مودهای طبیعی مینیمم نسبی داریم ونتیجتا "در تمام مودهای طبیعی اکسترمم وجود دارد و ω^2 دارای نقطهٔ ایستاست .

۲ ــ منحنی B که از درونیابی "لاگرانژ " بین شکل مودهای طبیعی حاصل شده در مودچهارم دارای یک ماکزیمم است ، پس این طریق ، روشی مناسب برای مدلسازی رفتار تابع ω^2 دربین مودهای طبیعی نیست .

۳ ــ درونیابی لاگرانژبین مجذور فرکانسهای طبیعی ، اگرچه قسمتی از یک منحنی درجهٔ چهاراست ، اما بخشی هموار واکیدا "یکنوابوده وشامل هیچ اکسترممی نیست ،بنابراین این روش به هیچ وجه برای مدلسازی مناسب نخواهد بود .

ب ، نمودارهای (5) , (6) :

1 ــ منحنیهای مربوط به هر 5 حالت با استفاده از رابطهٔ A رسم شده که درهمهٔ موارد با انتظارات ما سازگار است و فرض روابط (a) و (b) برای شکل مودهای طبیعی به عنوان فرضهای تقریبی چندان غیر معقول نبوده و قابل قبول است .

۲) نکتهٔ قابل توجه آنست که هرچه از مود طبیعی اول دورمی‌شویم ،شکل منحنی در نقاط اکسترمم ، از یک مینیمم کاملا "مشخص، بتدریج به‌سمت یک ماکزیمم ، میل می‌کند (تغییر تدریجی مقدارمشتق دوم تابع $\frac{\omega^2(p)}{\omega_1^2}$ از یک مقدار مثبت به صفر و سپس به‌یک مقدار منفی در نقاط اکسترمم) ، بطوری‌که در حوالی مود چهارم (ماقبل آخر) . شکل منحنی به‌یک پله یا نقطهٔ عطف در منحنی $y=x^3$ شباهت دارد ، در صورتی‌که درمودپنجم ،کاملا "یک ماکزیمم مشاهده‌می‌شود .

نهایتا "بایدگفت‌که عدد **p** معرف میزان مقید بودن سیستم است ، که وقتی یک عدد طبیعی باشد ، یعنی p=i آنگاه سیستم مقید نبوده‌وارتعاش آن درمودطبیعی‌صورت می‌گیرد ودر حوالی هر مود طبیعی (مگر آخرین مود طبیعی که مسئله برعکس است) فرکانس ارتعاش سیستم مقید از فرکانس طبیعی همان مودارتعاشی سیستم بزرگتر است .

فهرست منابع :

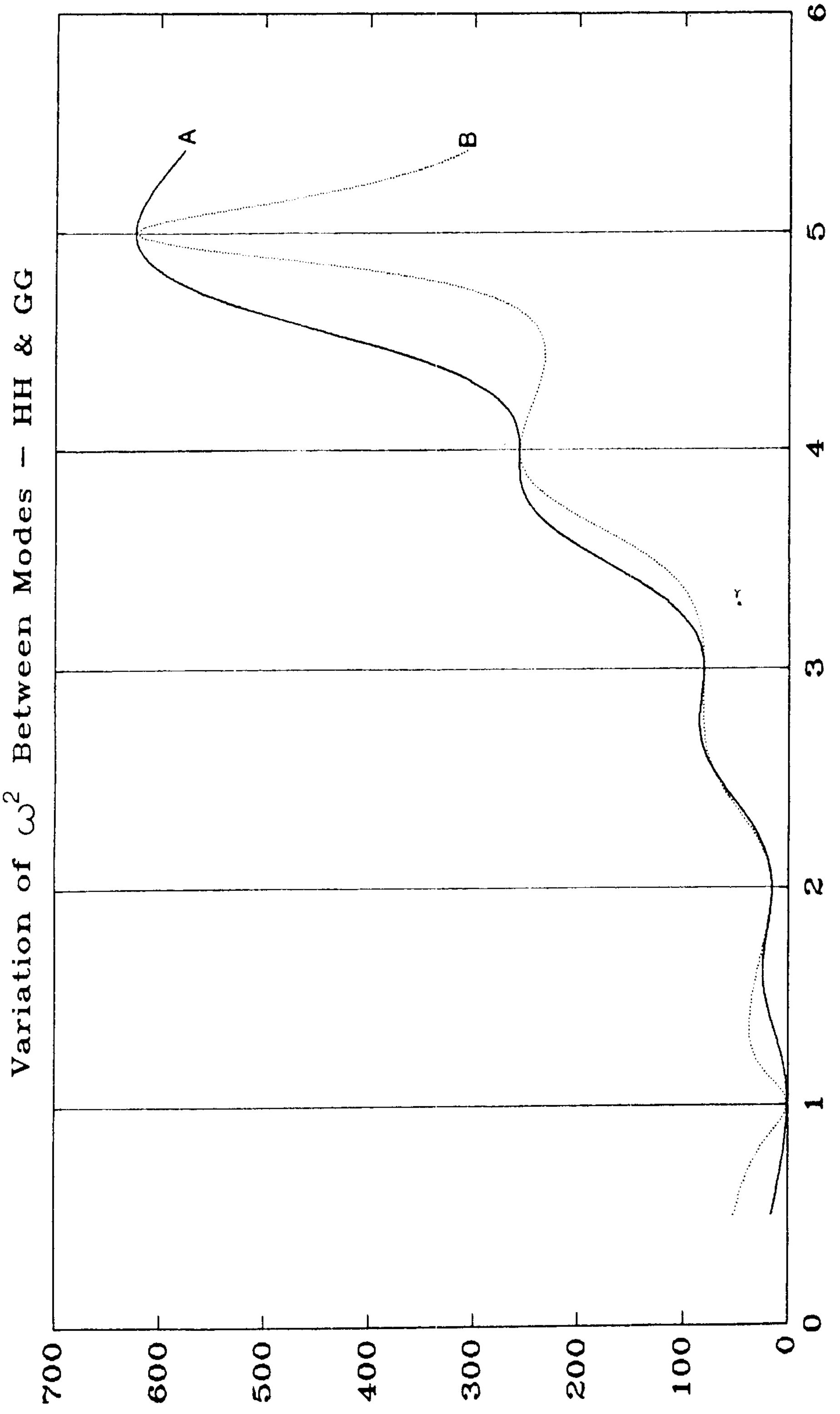
1) Lord Rayleigh:"The Theory of Sounds, "Dover publication Inc., New York,1945.

2) Temple,G.and W.G. Bickley: "Rayliegh's principle and its Applications to Engineering,"Dover publication Inc., New York, 1956.

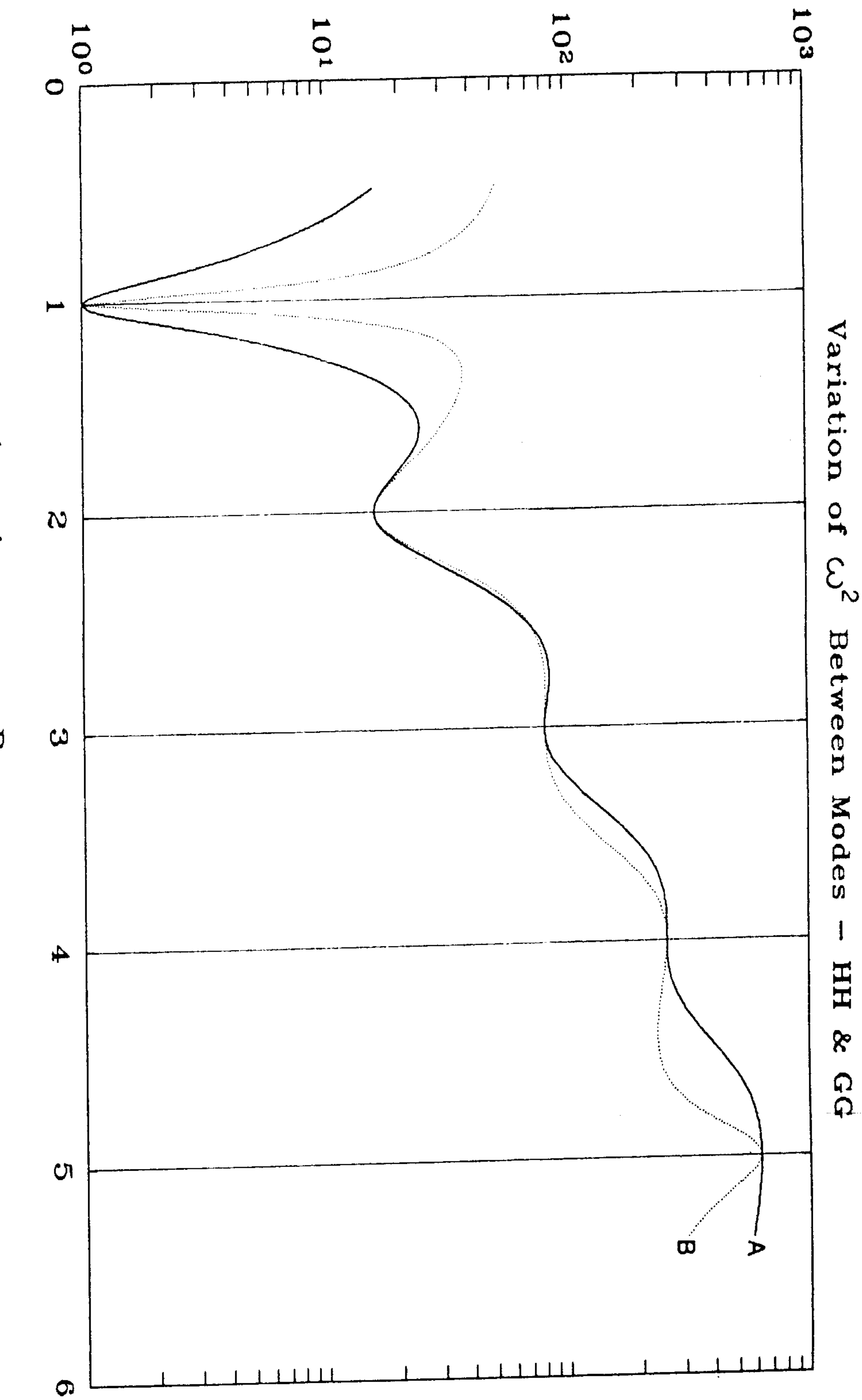
3) Hurty, walter C. and M.F. Rubenstein:" Dynamics of Structures," prentice Hall Inc., N.J., 1964.

۴) جزوهٔ ارتعاشات پیشرفته ــ دکتر منصور نیکخواه بهرامی ، دانشگاه تهران ، دانشکدهٔ فنی .

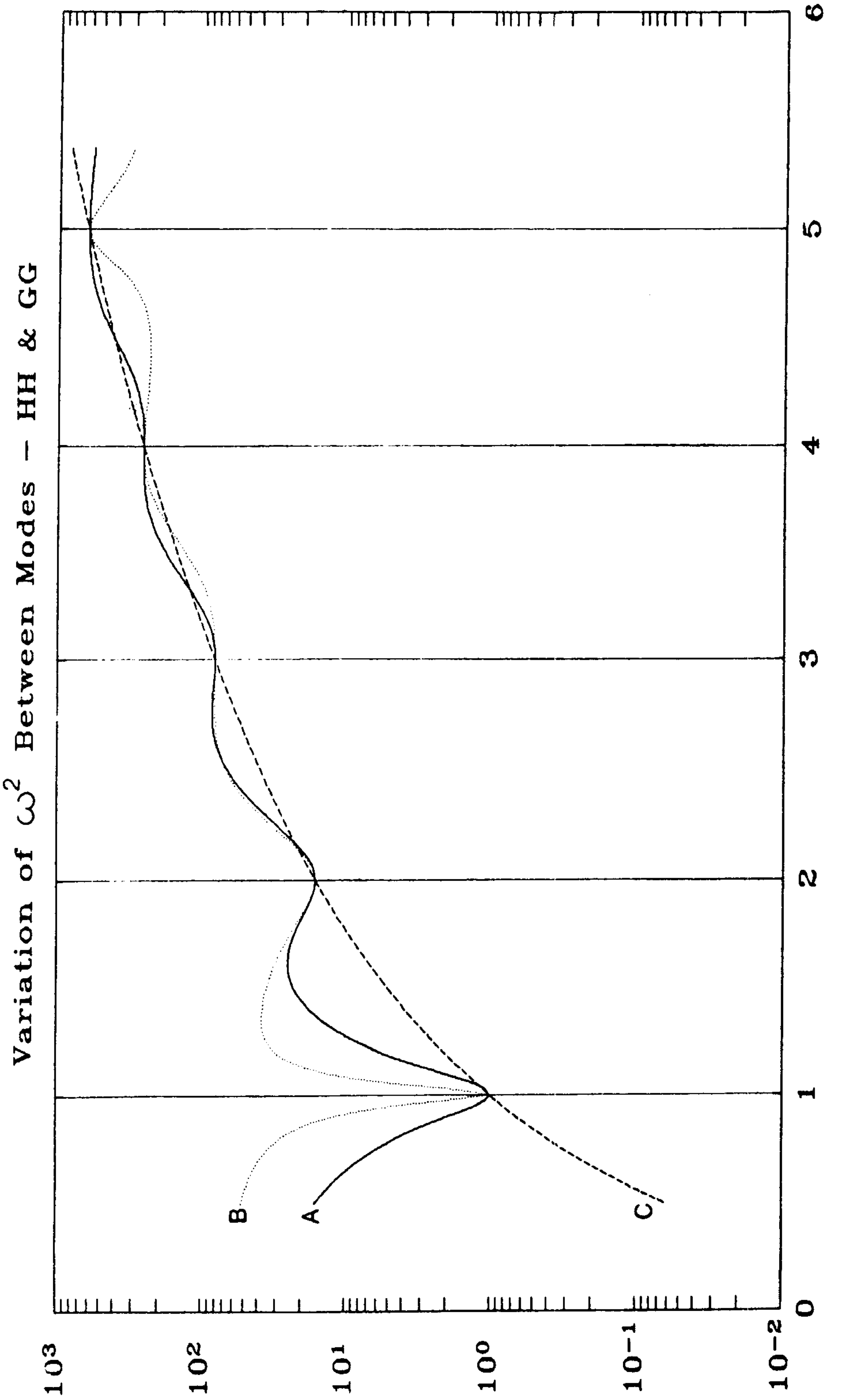
۵) جزوهٔ محاسبات عددی پیشرفته ــ دکتر منصور نیکخواه بهرامی ،دانشگاه تهران ، دانشکدهٔ فنی .



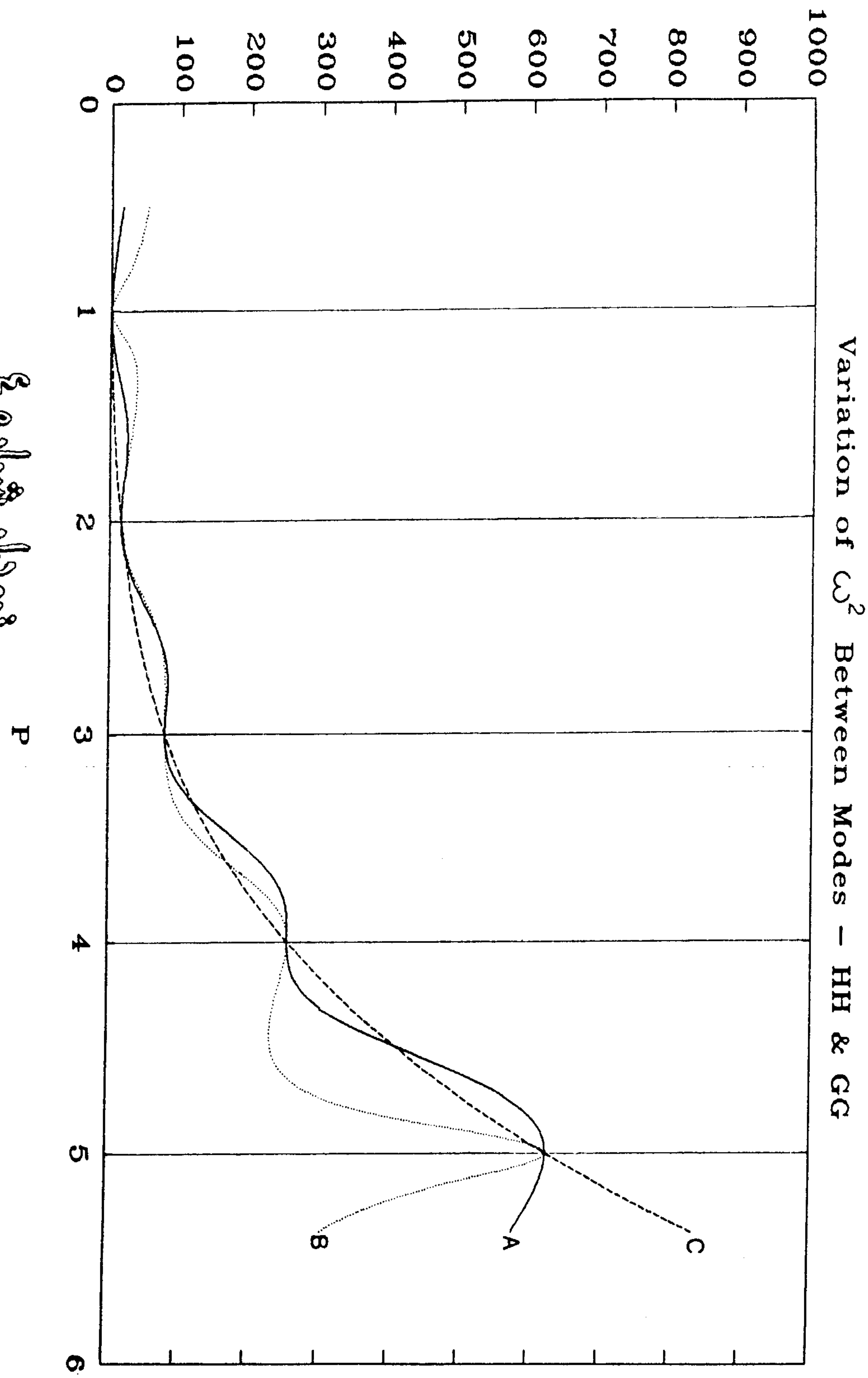
نمودار شماره ۱



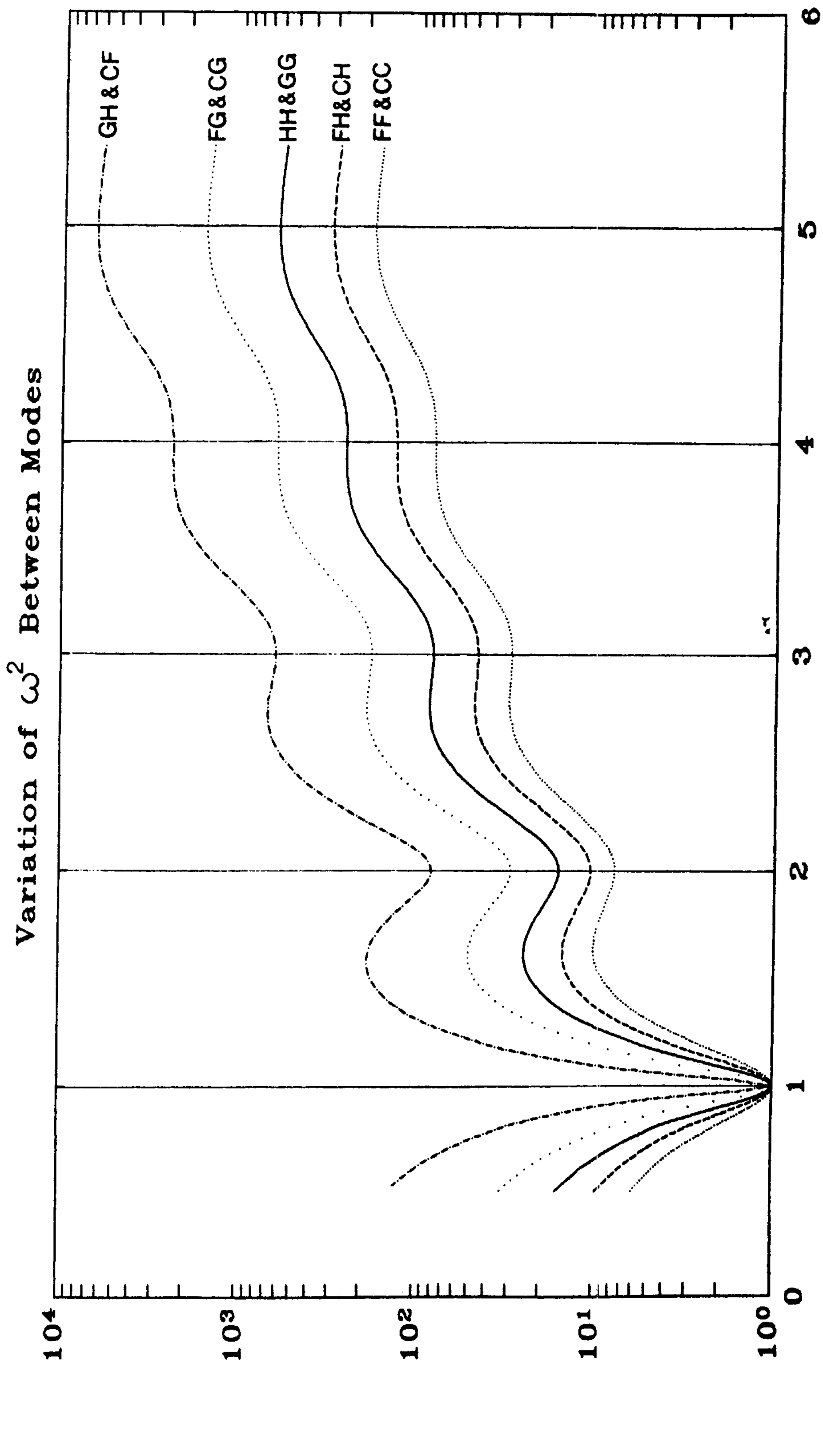
نمودار شماره ۲



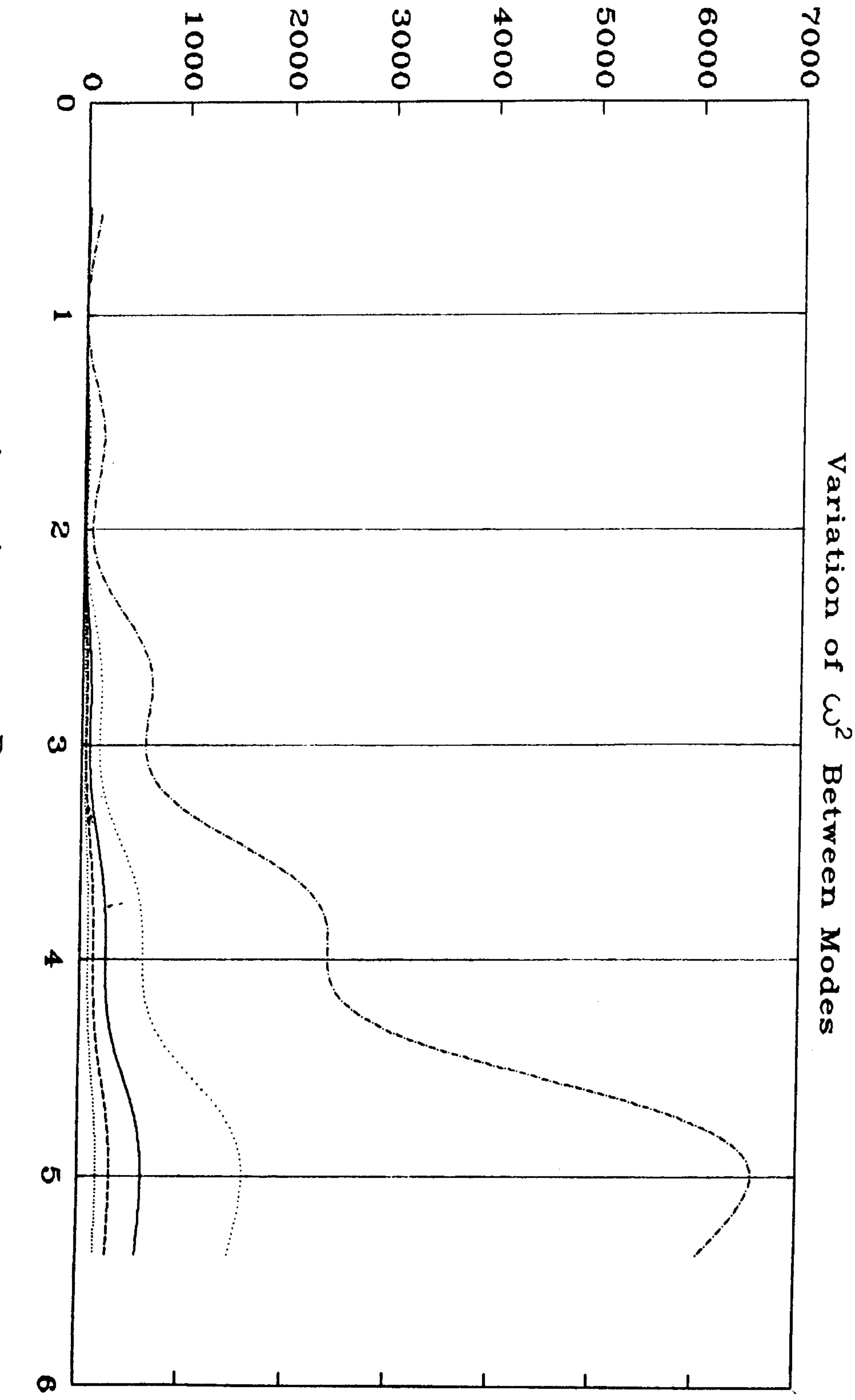
نمودار شماره ۳



نمودار شماره ۴



نمودار شماره ۵



نمودار شماره ٦