

# قالب جزء محدود پوسته استوانه ای

محمد رضایی پزند\*<sup>۱</sup> و رضا خواجوی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>استاد گروه عمران - دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۲</sup>دانش آموخته کارشناسی ارشد گروه عمران - دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد

( // , // , // )

## چکیده

تاب و خم پوسته‌ها حالت‌های گوناگون کرنشی آنها را در هم می‌تند، و به یک دیگر وابسته می‌سازد. این رفتار اندرکنشی، فرآیند ساخت قالب‌های پوسته‌ای را تا کنون ناکام گذارده است. برای برپایی قالب‌های جزء محدود بر پایه رابطه‌سازی آزاد، باید آزمون جزء تکین سامان یابد. این آزمون برای جزء‌های پوسته‌ای ناکار بوده و نیاز به بازآرایی دارد. در این مقاله، رفتار اندرکنشی پوسته‌ها و درگیری‌های کرنشی با رویکردی ریزبینانه بررسی می‌شوند. چنین دیدگاهی از رفتار پوسته‌ها، راهکاری ساده را برای ساخت قالب‌های پوسته‌ای پیش رو می‌گذارد. بر پایه آن، بی‌نیاز از سامان‌دهی آزمون جزء تکین، قالب پوسته‌ای با پاره‌سازی ماتریس سختی یک جزء نمونه برپا می‌شود. این جزء می‌بایست در کاربرد، توانمندی خود را در همگراسازی تحلیل سازه‌های گوناگون نشان داده باشد. ویژگی‌های این گونه قالب‌سازی با برپایی قالب جزء پوسته استوانه‌ای بررسی می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** پاره‌سازی - پوسته استوانه‌ای - پوسته متقارن محوری - تابع پایه - حالت کرنشی - قالب اصلی

- قالب جزء محدود - ماتریس سختی اصلی - ماتریس سختی حالت کرنشی - نشانگان شیب کرنش - ویژه‌سختی

## مقدمه

باید شبکه‌بندی‌های بسیار ریزی را بر روی سازه پوسته‌ای گسترانید. این جزء‌ها کاستی‌ها و نارسایی‌های دیگری هم دارند که کاربرد آنها را با دشواری همراه می‌کنند [۲]. لذا، در گام دیگر، دانشمندان به آفرینش جزء‌های پوسته‌ای خمدار روی آورده و رابطه‌سازی‌های گوناگونی برای آن پیشنهاد نمودند که شناخته‌شده‌ترین آنها را با نام ارائه کنندگان آن یعنی «کوپتر» و «نقدی» می‌شناسند [۳].

جزء استوانه ای نمونه‌ای بسیار ساده از جزء‌های پوسته‌ای خمدار هستند که سادگی هندسه آنها از کاربرد گسترده آنها در تحلیل سازه‌ها نمی‌کاهد و روند الگوسازی آنها بسیار نزدیک به همان فرآیندی است که برای جزء‌های تنش یا کرنش مستوی انجام می‌گیرد، و به هیچ رابطه‌سازی پیچیده‌ای نیاز ندارد.

قالب جزء محدود، یک ماتریس سختی عامل دار است که با مقداردهی عامل‌های آن، نمونه جزء‌های گوناگون قالب به دست می‌آیند. عامل‌ها را می‌توان در جهت کاراسازی جزء، بهینه کرد [۴]. در چند سال گذشته، تلاش‌هایی برای ساخت قالب‌های پوسته‌ای انجام پذیرفته که می‌توان از قالب‌های جزء‌های پوسته‌ای تخت به عنوان اولین لاش‌ها نام برد. در حال حاضر روش ساخت قالب، که بر رابطه‌سازی آزاد و آزمون جزء تکین

دشواری تحلیل پوسته‌ها بر کسی پوشیده نبوده و هندسه خمیده این سازه‌ها، رابطه‌سازی آنها را بسیار پیچیده کرده است. از سوی دیگر، توانایی‌های سازه‌های پوسته‌ای قرن‌هاست که شناخته شده‌اند. ویژگی‌های نهفته در خم و تاب پوسته‌ها، کاربردهای زیادی به آنها می‌دهد. لذا بدین جهت تنها پس از چند سال از پایه‌ریزی روش اجزای محدود، پژوهشگران به الگوسازی جزء‌های پوسته‌ای روی آورده به طوری که در چهل سال اخیر، تلاش‌های بسیاری برای این کار انجام گرفته است. ضمن این که هم اکنون نیز پوسته‌ها زمینه پژوهشی بسیاری از دانشمندان و دانشجویان می‌باشد. در نخستین تلاش‌ها، پیچیدگی رفتار پوسته‌ها تحلیلگران را وا داشت تا این ساختارهای خمدار را با جزء‌های تخت پوسته‌ای بپوشانند. در این جزء‌ها، رفتار غشایی و خمشی جداگانه الگوسازی می‌شود، و جزء از برهم‌نهی آن دو بر پا می‌گردد. بدین گونه، از پیچیدگی‌های رفتاری پوسته‌ها، که پیامدی از اندرکنش این دو کارکرد است، جلوگیری می‌گردد [۱].

هرچند ساماندهی جزء‌های پوسته‌ای تخت آسان می‌باشد. با این حال، کارآیی آن‌ها چندان دلخواه و شایسته نیست. آزمون‌های بسیار نشان داده‌اند که برای رسیدن به پاسخ‌های خوب در تحلیل با چنین جزء‌هایی،

استوار می‌باشد، در ساماندهی قالب‌های پوسته‌ای خمدار کارائی نداشته و دشواری‌های زیادی فراروی به انجام رسیدن آن وجود دارد، که در آینده به آن‌ها پرداخته خواهد شد. یادآوری می‌شود، بررسی‌های این مقاله برای پوسته استوانه‌ای است، و گسترش آن برای دیگر گونه‌های پوسته خمدار نیاز به پژوهش‌های بیشتری دارد. در این مقاله، با بهره‌جویی از ماتریس سختی اصلی یک نمونه جزء پوسته‌ای استوانه‌ای، قالب آن برپا می‌شود. این نمونه جزء باید توانایی خود را در همگرا کردن تحلیل به پاسخ‌های درست، در کاربرد نشان دهد. ماتریس سختی اصلی جزء‌های پوسته‌ای متقارن محوری قطری نیست. با شکستن ماتریس سختی اصلی به زیرماتریس‌هایی، بخش‌های همتای حالت‌های کرنشی مرتبه بالا از بخش‌های همتای جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت، و نیز بخش نماینده اندرکنش میان آن دو جدا می‌شود. برای ساخت قالب تنها باید زیرماتریس سختی وابسته به حالت‌های کرنشی مرتبه بالا عامل دار گردد.

## پارہ‌سازی ماتریس سختی و ساخت قالب اصلی

در رابطه‌سازی جزء محدود، تغییرشکل جزء از برهم‌نهی چند تغییرشکل پایه به دست می‌آید. یک پایه سودمند که کاربردهایی درخور توجه دارد، پایه حالت‌های کرنشی جزء است [۵] که دربرگیرنده جابه‌جایی‌های جسم سخت، حالت‌های کرنشی ثابت، و حالت‌های کرنشی مرتبه بالا می‌باشد. هر حالت کرنشی یک تابع پایه داشته که رفتار تغییرشکل جزء را در آن حالت کرنشی نشان می‌دهد. تغییرشکل جزء از برهم‌نهی تغییرشکل‌های پایه همتای حالت‌های کرنشی به دست می‌آید [۶]:

$$u = \sum_{i=0}^n N_{qi} q_i \quad (1)$$

در رابطه فوق،  $q_i$  حالت کرنشی  $i$ ، و  $N_{qi}$  تابع پایه همتای آن،  $u$  تابع تغییرشکل جزء، و  $n$  شمار درجه‌های آزادی آن می‌باشد. برای یافتن تابع‌های پایه یک جزء، از رابطه‌سازی با نشانگان شیب کرنش بهره گرفته می‌شود. با به کارگیری تابع‌های پایه، ماتریس سختی در دستگاه بردارهای همتای حالت‌های کرنشی جزء،  $Kq$ ، برپا می‌شود. از این ماتریس در فرآیند پارہ‌سازی ماتریس سختی بهره می‌جویند، که به

ساخت قالب‌های جزء محدود کمک شایانی می‌نماید. ماتریس کرنش - حالت کرنشی،  $Bq$ ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Bq = \Delta Nq \quad (2)$$

که در آن،  $Nq$  ماتریس تابع‌های پایه، و  $\Delta$  ماتریس عملگر دیفرانسیلی است. گسترش این ماتریس به صورت ذیل خواهد بود:

$$Bq = [B_{q_1} \ B_{q_2} \ \dots \ B_{q_n}] \quad (3)$$

$$B_{q_i} = \Delta N_{q_i}$$

و زیرماتریس  $B_{q_i}$ ، ماتریس کرنش - حالت کرنشی  $q_i$  می‌باشد. با داشتن ماتریس  $Bq$ ، می‌توان به سادگی ماتریس سختی  $Kq$  را از رابطه زیر به دست آورد:

$$Kq = \int_V B_q^T D_m B_q dV \quad (4)$$

که در آن،  $D_m$ ، ماتریس مواد بوده [۱] و با بهره‌گیری از یک ماتریس نگاشت، می‌توان ماتریس سختی جزء،  $K$ ، را از  $Kq$  به دست آورد. این ماتریس، نگاشتی است که حالت‌های کرنشی را با جابه‌جایی‌های گرهی جایگزین می‌نماید. برای ساخت آن، نخست ماتریسی را با نام ماتریس نگاشت حالت کرنشی - جابه‌جایی گرهی،  $G$ ، سامان می‌دهند. چنین ماتریسی با جایگذاری مختصات گرهی در تابع‌های پایه  $Nq$ ، برپا خواهد شد:

$$D = Gq$$

$$G = \begin{bmatrix} N_{q_1}(1) \\ \vdots \\ N_{q_1}(n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

در رابطه فوق،  $D$  بردار جابه‌جایی‌های گرهی بوده و نمایش گسترش یافته آن مطابق ماتریس زیر می‌باشد:

$$G = \begin{bmatrix} N_{q_1}(1) & N_{q_2}(1) & \dots & N_{q_n}(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_{q_1}(n) & N_{q_2}(n) & \dots & N_{q_n}(n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$= [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n]$$

ستون‌های این ماتریس،  $g_1, \dots, g_n$ ، نمایشگر بردارهای جابه‌جایی‌های گرهی حالت‌های کرنشی هستند که در شماری از جزء‌ها، همان بردارهای ویژه ماتریس سختی جزء می‌باشند و باید آگاه بود که در جزء پوسته‌ای استوانه‌ای چنین مسئله‌ای صادق نمی‌باشد. وارون  $G$ ، ماتریس نگاشت جابه‌جایی‌های گرهی به حالت‌های کرنشی است، که با  $H$  نشان داده می‌شود:

باید فرآیند پیشین را به کناری نهاد و یا به گونه‌ای آن را بازآرایی نمود. بیشترین دشواری کار، در ساماندهی پاره نخست قالب بوده و تاکنون ماتریس سختی پایه‌ای که بتواند ویژگی‌های ایستایی جزء پوسته‌ای را برآورده سازد پیدا نشده است. روش آشنای ساخت قالب، که بر رابطه‌سازی آزاد استوار می باشد، نیاز به برپایی ماتریس انباشتگر نیرو دارد. این ماتریس نمایشی از فرآیند انباشت نیروهای لبه‌ای در گره‌ها می باشد که از یک میدان تنش ثابت پدید می‌آید و فرآیند آن با ساماندهی آزمون جزء تکین انجام می‌پذیرد. اکنون ساخت قالب جزء پوسته‌ای خمدار دو پرسش بنیادین مواجه می باشد: نخست آن که میدان تنش ثابت برای پیکره پوسته خمدار چیست؟ و دوم آن که چگونه این میدان تنش برای همه ساختارهای هندسی یک پیکره، ویژگی‌های ایستایی را برقرار می‌سازد؟ بی‌گمان برای ساخت قالب جزء‌های پوسته‌ای خمدار بر پایه رابطه‌سازی آزاد باید برای این پرسش‌ها پاسخی یافت. آزمون جزء تکین، با ساختار ویژه خود، برای جزء‌های خمدار به هیچ روی پاسخگو نبوده و نیاز به بازآرایی دارد.

یکی دیگر از دشواری‌های کار با پوسته‌ها، اندرکنش پیچیده رفتارهای سازه‌ای آنها می باشد و در بیشتر نوشته‌ها، از اندرکنش میان اثرهای غشایی و خمشی یاد می‌شود. در این جا، این ویژگی، با شناسایی چگونگی اندرکنش حالت‌های کرنشی بررسی می گردد. در بیشتر جزء‌های محدود، جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت با حالت‌های کرنشی مرتبه بالا درگیری کارمایه ندارند. لذا از همین جهت می باشد که اگر ماتریس سختی جزء در دستگاه پایه حالت‌های کرنشی آن برپا شود، درایه‌های درگیر آن، که اندرکنش کارمایه را میان این دو دسته حالت‌های کرنشی نشان می‌دهند، صفر خواهند بود. به سخن دیگر، تابع‌های پایه همتای آن‌ها متعامد کارمایه می باشند [۷]. نمایش ریاضی این گزاره همانند روابط زیر است:

$$\begin{aligned} B_{q_{rc}} &= \Delta N_{q_{rc}} = [B_{q_r} \quad B_{q_c}] \\ B_{q_h} &= \Delta N_{q_h} \\ K_{qrch} &= \int_V B_{qrc}^T D_m B_{qh} dV = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

در روابط فوق، زیرنویس  $q$ ، همانند قبل، اشاره به پایه حالت‌های کرنشی جزء دارد. همچنین، زیرنویس  $rc$  کوتاه شده  $r=rigid \text{ body}$  و  $c=constant \text{ strain}$ ، و نیز، زیرنویس  $h$  کوتاه شده  $h=higher \text{ order}$  می باشد. در جزء‌های

$$H = G^{-1} \quad (7)$$

$$q = HD$$

و با انجام نگاشت زیر، می‌توان ماتریس سختی جزء  $K$ ، را از  $Kq$  به دست آورد:

$$K = H^T K_q H \quad (8)$$

## دشواری‌های ساخت قالب‌های پوسته‌ای

تلاش‌های زیادی برای ساخت قالب‌های پوسته‌ای انجام می‌گیرد. پژوهشگران تاکنون قالب‌های جزء‌های پوسته‌ای تخت را با پیکره‌های گوناگون به خوبی برپا کرده‌اند. نمونه آن‌ها، قالب‌های سه و نیز چهارپهلوی می باشد که افزون بر جابه‌جایی‌های گرهی، درجه‌های آزادی دورانی نیز دارند. برای ساخت این گونه قالب‌های تخت، دو قالب غشایی و خمشی، جداگانه برپا می‌شوند. فرآیند ساخت این دو، همان روش آشنای برپایی قالب‌هاست. با برهم‌نهی قالب‌های غشایی و خمشی، قالب پوسته‌ای تخت به دست می‌آید و علت جایز بودن این روش آن است که الگوهای غشایی و خمشی در جزء‌های پوسته‌ای تخت، هیچ گونه اندرکنشی با یک دیگر پیدا نمی‌کنند. به سخن گویاتر، حالت‌های پایه کرنشی برای دو الگوسازی غشایی (در صفحه) و خمشی (برصفحه) از هم جدا می‌باشند. افزون بر این، حالت‌های کرنشی این دو الگوسازی اندرکنش کارمایه ندارند.

جزء‌های پوسته‌ای تخت کاستی‌هایی در کاربرد دارند. آن‌ها در تحلیل‌های خطی، و به ویژه در تحلیل‌های غیرخطی، چندان کارآمد نبوده و گاه به کارگیری آنها در تحلیل پوسته بسیار دشوار می باشد که یک نمونه از آن، پوشش پوسته دارای خم دوگانه، با شبکه‌ای از جزء‌های تخت می‌باشد [۲]. در تحلیل‌های غیرخطی با تغییر شکل‌های بزرگ، ناتوانی این جزء‌ها نمود بیشتری دارد. در این گونه تحلیل‌ها، چنانچه شبکه‌بندی نخستین هم به خوبی گسترده شود، جابه‌جایی‌ها گاه چنان بزرگ خواهند بود که جزء تخت دچار تابیدگی خواهد می گردد.

کاستی‌های جزء‌ها و قالب‌های پوسته‌ای تخت، پژوهشگران را بر آن داشته است تا راهی برای برپاسازی قالب‌های پیکره‌های پوسته‌ای خمدار بیندیشند. این کار چندان آسان نیست. خمیدگی و تاب هندسه این پیکره‌ها فرآیند آشنای ساخت قالب‌ها را ناکار می‌کند. اکنون دانشمندان پذیرفته‌اند که برای برپا کردن چنین قالب‌هایی

پوسته‌های خمدار، ویژگی تعامد کارمایه، آن گونه که در رابطه (۹) آمده است، پدید نمی‌آید. معادله‌های حاکم بر پوسته، عملگر دیفرانسیلی  $\Delta$  را چنان سامان می‌دهند که دیگر رابطه (۹) برپا نخواهد بود. از این رو، شماری درایه‌های درگیر از ماتریس سختی در پایه حالت‌های کرنشی،  $Kq$ ، ناصفر می‌گردند. این نشانگر آن است که حالت‌های کرنشی  $rc$  در اندرکنش با حالت‌های کرنشی  $h$ ، کارمایه می‌انبارند. با درگیری کارمایه میان این دو دسته حالت کرنشی، جداسازی آن‌ها از یک دیگر ناشدنی خواهد بود. چنین جداسازی برای ساخت قالب با روش پاره‌سازی به ماتریس‌های سختی حالت‌های کرنشی از آن جهت ضروری می‌باشد که عامل‌های آزاد تنها باید در پاره‌های همتای حالت‌های کرنشی مرتبه بالا گذارده شوند.

درگیری کارمایه‌های این دو دسته بررسی ویژگی همگرایی را نیز دشوار می‌کند. همگرا نشدن به پاسخ درست گاه وابسته به درگیری‌های کارمایه‌ای میان حالت‌های کرنشی  $rc$  و  $h$  است. در روش آشنای برپایی قالب‌های جزء محدود، که بر پایه رابطه‌سازی آزاد می‌باشد، تعامد کارمایه‌ها لازم نیست. در این روش، ساختار قالب به گونه‌ای ریخته می‌شود که کارمایه‌های درگیر به ویژگی همگرایی آسیبی نمی‌رسانند. اما در جزء‌های پوسته‌ای، پیاده‌سازی این ساختار، دست کم در این زمان، شدنی نبوده و نیاز به بازآرایی آزمون جزء تکین و فرآیند سامان‌یابی ماتریس انباشتگر نیرو دارد. لذا، در برپاسازی قالب‌های پوسته‌های خمدار ناگزیر باید از این ساختار شایسته نگهدار همگرایی چشم پوشید.

یکی دیگر از ویژگی‌های جزء‌های پوسته‌ای متقارن محوری آن است که شماری از حالت‌های کرنشی صفر آنها، یا همان جابه‌جایی‌های جسم سخت، کارمایه می‌انبارند. این ویژگی را می‌توان به سادگی، با شناسایی مقدرهای ویژه ماتریس‌های سختی چنین جزء‌هایی بررسی نمود. این ماتریس‌های سختی مقدار ویژه صفر ندارند، و یا شمار مقدرهای ویژه تهی آنها کمتر از شمار جابه‌جایی‌های جسم سخت است. از این رو، شماری از پژوهشگران جابه‌جایی‌های جسم سخت را برای جزء‌های پوسته‌ای تعریف ننموده لذا بهتر آن است که آن‌ها را حالت‌های کرنشی صفر جزء با ویژه‌سختی‌های ناتهی دانست.

اکنون می‌توان دشواری‌های ساخت قالب‌های

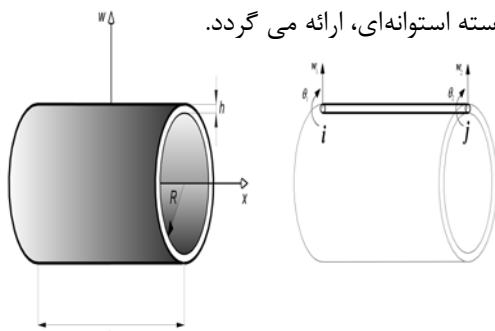
پوسته‌ای خم دار را چنین برشمرد: ساختار کنونی آزمون جزء تکین برای به کارگیری در جزء‌های پوسته‌ای خمدار ناتوان بوده و نیاز به بازآرایی دارد. بر این پایه، قالب این گونه جزء‌ها را نمی‌توان با روش کنونی برپا نمود. از سوی دیگر، جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت این جزء‌ها با حالت‌های کرنشی مرتبه بالا درگیری کارمایه دارند. این درگیری و اندرکنش، در نبود ساختار ماتریس سختی رابطه‌سازی آزاد، به همگرایی آسیب خواهد رسانید. همچنین، فرآیند عامل دارسازی را که تنها برای سختی‌های همتای حالت‌های کرنشی مرتبه بالا انجام می‌گیرد، ناکام می‌گذارد.

### راهکار ساخت قالب پوسته

بنیانگذاران دانش قالب‌های جزء محدود، چهار ویژگی همگرایی، پایداری، عامل داری، و همسان گردی را برای آنها برشمرده‌اند [۸]. ویژگی‌های همگرایی و پایداری با ساماندهی آزمون جزء تکین و ساختار ویژه ماتریس سختی برپا خواهد شد. هم چنین، عامل داری با وارد کردن عامل‌های آزاد در ماتریس سختی مرتبه بالا به انجام می‌رسد. این ویژگی‌ها در روش پاره‌سازی نیز به آسانی پیاده می‌شوند. در این روش، ماتریس سختی یک جزء نمونه را به ماتریس‌های سختی حالت‌های کرنشی آن می‌شکنند. آن گاه پاره‌های همتای حالت‌های کرنشی مرتبه بالا را عامل دار می‌سازند. عامل دار کردن چنان انجام می‌پذیرد که قالب همسان گرد هندسی باشد. روشن است، برای آن که بایسته همگرایی برقرار گردد، جزء نمونه نخستین باید آزمون وصله یا جزء تکین را به درستی پاسخ گوید، و یا در تحلیل، توانایی خود را در همگرایی به پاسخ درست نشان دهد. در فراگیری قالب به دست آمده از فرآیند پاره‌سازی ماتریس سختی نمونه، جای سؤال دارد. هر قدر رابطه‌سازی جزء نمونه نخستین فراگیرتر باشد، قالب ساخته شده نیز برتر خواهد بود. با این رو، باید به یاد داشت که شیوه نخست ساخت قالب‌ها نیز همیشه قالب فراگیر را به دست نمی‌دهد، و پژوهش‌ها در این زمینه هم چنان ادامه دارد.

پیش از پرداختن به فرآیند ساخت قالب پوسته استوانه‌ای، شایسته است چند مفهوم از رابطه‌سازی آزاد یادآوری شود. این رابطه‌سازی، گونه ویژه‌ای از ماتریس سختی را با نام ماتریس سختی گسترش‌یافته شناسایی

در این مقاله، برای برپاسازی قالب جزء محدود پوسته استوانه ای از روش بازسازی شده پاره‌سازی بهره گرفته می‌شود. این گونه پاره‌سازی با بهره‌جویی از رابطه (۱۰) انجام می‌پذیرد. در این روش یک جزء نمونه به کار می‌رود. از آن جا که برای جزء پوسته‌ای، آزمون وصله یا جزء تکین انجام ناشدنی است، ویژگی همگرایی باید در کاربرد بررسی شود. باید آگاه بود، جزء پوسته‌ای استوانه ای به کار رفته، تحلیل با روش جزء محدود را همگرا می‌کند. از این رو، می‌توان آنها را در فرآیند قالب‌سازی، با آسودگی به کار بست. از آن جا که آزمون جزء تکین برای پوسته‌ها کاربرد ندارد، ماتریس‌های  $L$  و  $P_{rc}$  در دست نبوده لذا نمی‌توان درایه‌های درگیر ماتریس سختی گسترش یافته، یا همان زیرماتریس  $K_{qrc}$  را همانند رابطه (۱۳) سامان داد. اما در روش پاره‌سازی کنونی، که از رابطه‌سازی یک جزء شایسته شناخته‌شده بهره می‌جوید، این زیرماتریس خود به خود پدیدار می‌شود. از آن جا که جزء نمونه، شرط همگرایی را برقرار می‌سازد، این زیرماتریس، چنان چه عامل دار نشود، به همگرایی آسیب نخواهد رسانید. زیرا عامل دار کردن آن، افزون بر آشفتگی همگرایی، گاه به پیدایش مقادیرهای ویژه منفی برای ماتریس سختی جزء خواهد انجامید. این پدیده، به ویژه هنگامی رخ می‌دهد که عامل‌های آزاد بزرگ انتخاب شوند. از سوی دیگر، زیرماتریس سختی مرتبه بالا،  $K_{qh}$  بر پایه حالت‌های کرنشی مرتبه بالا برپا می‌شود. این زیرماتریس در اصل همگرایی جایگاهی ندارد، هرچند در آهنگ همگرایی تأثیرگذار می‌باشد. از این رو، درایه‌های آن می‌توانند اندازه‌های گوناگون بپذیرند، و عامل دار شوند. عامل دار سازی با جایگزینی ضریب‌های عددی درایه‌های زیرماتریس سختی مرتبه بالا به انجام می‌رسد. سپس می‌توان مقادیرهای بهینه عامل‌های آزاد را به دست آورد. در ادامه، ساخت قالب و بهینه‌یابی عامل‌های آزاد، برای پوسته استوانه‌ای، ارائه می‌گردد.



شکل ۱: جزء پوسته استوانه‌ای.

می‌کند [۷]. این همان ماتریس سختی است که در پایه حالت‌های کرنشی جزء برپا می‌شود. این ماتریس هر چند کاربرد تحلیلی ندارد، در فرآیند رابطه‌سازی آزاد و ساخت قالب‌های جزء محدود به کار می‌آید. ماتریس سختی گسترش‌یافته را می‌توان بر پایه جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت،  $rc$ ، و حالت‌های کرنشی مرتبه بالا،  $h$ ، همانند روابط ذیل بخش‌بندی نمود:

$$K_q = \begin{bmatrix} K_{qrc} & K_{qrch} \\ K_{qrc}^T & K_{qh} \end{bmatrix} \quad (10)$$

که زیرماتریس‌های آن از روابط ذیل به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} K_{qrc} &= \int_V B_{qrc}^T D_m B_{qrc} dV \\ &= V B_{qrc}^T D_m B_{qrc} \\ K_{qrch} &= \int_V B_{qrc}^T D_m B_{qh} dV \\ K_{qh} &= \int_V B_{qh}^T D_m B_{qh} dV \end{aligned} \quad (11)$$

در روابط فوق،  $K_{qrc}$  زیرماتریس سختی مربوط به حالت‌های جا به جایی جسم سخت و کرنش ثابت، و  $K_{qh}$  زیرماتریس سختی مربوط به حالت‌های کرنشی مرتبه بالا می‌باشند.  $K_{qrch}$  زیرماتریسی است که درایه‌های سختی درگیر را در خود جای می‌دهد. رابطه‌سازی آزاد، ساختار ویژه‌ای همانند رابطه زیر را برای ماتریس سختی پیشنهاد می‌کند، که هیچ شرطی را بر زیرماتریس سختی درگیر بار نمی‌نماید [۷]:

$$K = \frac{1}{V} L D_m L^T + H_h^T K_{qh} H_h \quad (12)$$

که در آن،  $L$  ماتریس انباشتگر نیرو است، که از آزمون جزء تکین به دست می‌آید [7]. همچنین،  $H_h$ ، ماتریس نگاشت جابه‌جایی‌های گرهی به حالت‌های کرنشی مرتبه بالا، و وارون ماتریس  $G_h$  می‌باشد. همتای گسترش‌یافته ماتریس سختی رابطه (۱۲) برابر روابط زیر است:

$$K_q = \begin{bmatrix} K_{qrc} & P_{rc}^T G_h \\ G_h^T P_{rc} & \bar{K}_{qh} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{K}_{qh} = K_{qh} + \frac{1}{V} G_h^T L D_m L^T G_h \quad (14)$$

که در آن ها،  $K_{qrc}$ ،  $P_{rc}$ ، و  $L$  از آزمون جزء تکین به دست می‌آیند.  $K_{qrc}$  ماتریس سختی گسترش‌یافته برای جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت بوده و ماتریس  $P_{rc}$  نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_{rc} = L D_m B_{qrc} \quad (15)$$

## قالب پوسته استوانه ای

در این بخش، فرآیند برپایی قالب جزء پوسته متقارن محوری استوانه‌ای، با چهار درجه آزادی، بررسی می‌شود. نخست، ویژگی‌های این جزء بررسی می‌گردد، آن گاه، با بهره‌جویی از روش پاره‌سازی و حالت‌های کرنشی جزء، ماتریس سختی اصلی برپا، و عامل دار شده و در پایان، قالب جزء پوسته استوانه‌ای بهینه‌سازی می‌شود. جزء پوسته متقارن محوری استوانه‌ای، دو گره و چهار درجه آزادی، یک جابه‌جایی و یک دوران در هر گره، همانند شکل (۱) دارد. از این رو، چهار حالت کرنشی را الگوسازی می‌کند. این حالت‌های کرنشی، با شیب کرنش‌های زیر نشان داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} q_1 &= w_0 \\ q_2 &= \theta_0 \\ q_3 &= \kappa_{x_0} \\ q_4 &= \kappa_{xx_0} \end{aligned} \quad (16)$$

این شیب کرنش‌ها، به ترتیب، جابه‌جایی، دوران، انحنای ثابت، و انحنای خطی را در نقطه میانی جزء برآورد می‌کنند. چنانچه این جزء با بهره‌جویی از نشانگان شیب کرنش رابطه‌سازی شود، ماتریس تابع‌های پایه حالت‌های کرنشی آن همانند زیر به دست می‌آید [۵]:

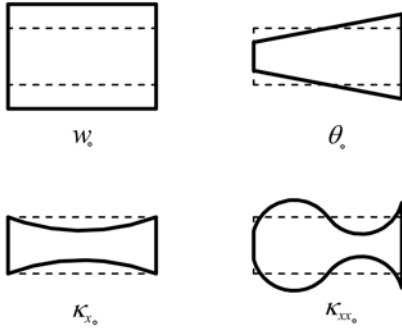
$$N_q = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} \end{bmatrix} \quad (17)$$

اکنون، ماتریس نگاشت  $G$  با جایگذاری مختصه  $x$  دو گره،  $-L/2$  و  $L/2$ ، در تابع‌های پایه و مشتق آن‌ها ساخته می‌شود:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -L/2 & L^2/8 & -L^3/48 \\ 0 & 1 & -L/2 & L^2/8 \\ 1 & L/2 & L^2/8 & L^3/48 \\ 0 & 1 & L/2 & L^2/8 \end{bmatrix} \quad (18)$$

هم چنین، وارون این ماتریس چنین خواهد بود:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & \frac{-L}{8} \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 2L & 4 & 2L & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \end{bmatrix} \quad (19)$$



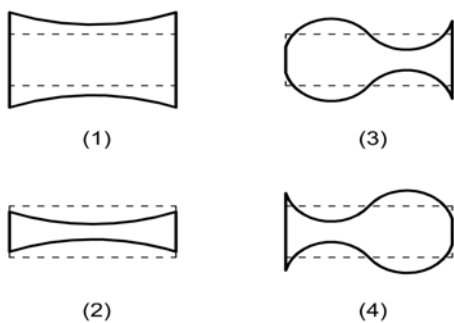
شکل ۲: حالت‌های کرنشی جزء پوسته استوانه‌ای.

ستون‌های ماتریس  $G$  بردارهای پایه حالت‌های کرنشی جزء پوسته استوانه‌ای هستند. شکل (۲) حالت‌های کرنشی این جزء را نشان می‌دهد. این بردارها، ویژگی تعامد کارمایه را بر آورده نمی‌سازند. از این رو، حالت‌های کرنشی مرتبه بالا با جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت اندرکنش دارند. باید آگاه بود که ماتریس سختی جزء در پایه بردارهای ویژه آن قطری می‌شود. این بردارهای ویژه، که با انجام تحلیل مقدار ویژه به دست می‌آیند، مطابق روابط زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} Mode 1 &: \{ \alpha \quad -1 \quad \alpha \quad 1 \} \\ Mode 2 &: \{ -\frac{1}{\alpha} \quad -1 \quad -\frac{1}{\alpha} \quad 1 \} \\ Mode 3 &: \{ -\beta \quad 1 \quad \beta \quad 1 \} \\ Mode 4 &: \{ \frac{1}{\beta} \quad 1 \quad -\frac{1}{\beta} \quad 1 \} \end{aligned} \quad (20)$$

در روابط فوق، ضریب‌های  $\alpha$  و  $\beta$  وابسته به شعاع استوانه،  $R$ ، و درازای جزء،  $L$ ، می‌باشند. نمایش این حالت‌های متعامد کارمایه در شکل (۳) ارائه شده است.

حال می‌توان قالب پوسته استوانه‌ای را برپا نمود. برای این کار، نخست، ماتریس کرنش - حالت کرنشی،  $Bq$ ، به دست می‌آید. در این جزء پوسته‌ای، کرنش‌ها همانند روابط زیر شناسایی می‌شوند [۱]:



شکل ۳: نمایش بردارها و تابع‌های ویژه جزء پوسته استوانه‌ای.

$$K_q = \pi E h \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2L}{R^2} & & & \\ 0 & \frac{L^3}{6R^2} & & \\ \frac{L^3}{12R^2} & 0 & (\frac{L^5}{160R^2} + \frac{h^2L}{6}) & \\ 0 & \frac{L^5}{240R^2} & 0 & (\beta_1 \frac{L^7}{R^2} + \beta_2 h^2 L^3) \end{bmatrix} \quad (25)$$

قالب جزء پوسته‌ای استوانه‌ای را نیز می‌توان با بهره‌گیری از ماتریس نگاشت  $H$  برپا کرد:

$$K(\beta_1, \beta_2) = H^T K_q H \quad (26)$$

یادآوری می‌شود، عامل‌های آزاد نباید چنان باشند که ماتریس سختی، مقدار ویژه منفی پیدا نماید.

اکنون، برای درست آزمایی قالب پیشنهادی جزء پوسته‌ای استوانه‌ای، از روش بهینه‌سازی دگرذیسی استفاده می‌شود [۸]. کارمایه خمشی درست انباشته در جزء، با صفر انگاشتن ضریب پواسون، به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$U_{Mex} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{ex}^T D_{mex} \varepsilon_{ex} dV \quad (27)$$

$$= \frac{Eh}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{ \varepsilon_{\theta ex} \quad \kappa_{xex} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta ex} \\ \kappa_{xex} \end{Bmatrix} (2\pi R) dx$$

از سوی دیگر، تابع درست جابه‌جایی این جزء برابر چندجمله‌ای تیلور، همانند رابطه زیر، می‌باشد:

$$w_{ex} = w_o + \theta_o x + \kappa_{xo} \frac{x^2}{2} + \kappa_{xxo} \frac{x^3}{6} + \dots \quad (28)$$

از آن جا که هیچ بار گسترده میانی بر جزء وارد نمی‌شود، تنها چهار جمله نخست دنباله تیلور ناتهی می‌باشند. بردار تابع‌های کرنش درست این جزء برابر رابطه زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{ex} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta ex} \\ \kappa_{xex} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{w_{ex}}{R} \\ \frac{d^2}{dx^2} w_{ex} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{R} (w_o + \theta_o x + \kappa_{xo} \frac{x^2}{2} + \kappa_{xxo} \frac{x^3}{6}) \\ \kappa_{xo} + \kappa_{xxo} x \end{Bmatrix}$$

از جایگذاری رابطه (۲۹) در رابطه (۲۷)، تابع کارمایه کرنشی خمشی درست مطابق رابطه (۳۰) به دست می‌آید:

$$U_{Mex} = EhL\pi \left[ (\frac{1}{R})w_o^2 + (\frac{L^2}{12R})\theta_o^2 + (\frac{L^4}{320R} + \frac{h^2R}{12})\kappa_{xo}^2 + (\frac{L^2}{12R})w_o\kappa_{xo} + (\frac{L^4}{240R})\theta_o\kappa_{xxo} + (\frac{L^6}{16128R} + \frac{h^2L^2R}{144})\kappa_{xxo}^2 \right] \quad (30)$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta} \\ \kappa_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{w}{R} \\ \frac{d^2}{dx^2} w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_q}{R} \\ \frac{d^2}{dx^2} N_q \end{bmatrix} q \quad (31)$$

پس، ماتریس  $Bq$  برابر رابطه زیر خواهد شد:

$$B_q = \begin{bmatrix} \frac{N_q}{R} \\ \frac{d^2}{dx^2} N_q \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{N_{q1}}{R} & \frac{N_{q2}}{R} & \frac{N_{q3}}{R} & \frac{N_{q4}}{R} \\ \frac{d^2}{dx^2} N_{q1} & \frac{d^2}{dx^2} N_{q2} & \frac{d^2}{dx^2} N_{q3} & \frac{d^2}{dx^2} N_{q4} \end{bmatrix}$$

با جایگذاری  $Nq$  از رابطه (۱۷)،  $Bq$  مطابق رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$B_q = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{x}{R} & \frac{x^2}{2R} & \frac{x^3}{6R} \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (33)$$

اینک، با بهره‌جویی از رابطه (۴)، ماتریس سختی اصلی همانند روابط زیر برپا می‌شود:

$$K_q = \pi E h \times \begin{bmatrix} \frac{2L}{R^2} & & & \\ 0 & \frac{L^3}{6R^2} & & \\ \frac{L^3}{12R^2} & 0 & (\frac{L^5}{160R^2} + \frac{h^2L}{6}) & \\ 0 & \frac{L^5}{240R^2} & 0 & (\frac{L^7}{8064R^2} + \frac{h^2L^3}{72}) \end{bmatrix} \quad (34)$$

تنها درایه ناصفر زیرماتریس  $K_{qrch}$ ، درایه  $4 \times 2$ ،

برابر  $\frac{\pi E h L^5}{240 R^2}$  است، که نمایش‌دهنده درگیری کارمایه

میان دوران جسم سخت و تنها حالت کرنشی مرتبه بالای این پوسته،  $\kappa_{xxo}$ ، می‌باشد. این درایه نباید عامل دار شود. از سوی دیگر، زیرماتریس  $K_{qh}$  تنها یک درایه برابر

دارد، که می‌توان آن را عامل  $\frac{\pi E h L^7}{8064 R^2} + \frac{\pi E h^3 L^3}{72}$

دار نمود. برای این کار، دو عامل  $\beta_1$  و  $\beta_2$  به کار می‌رود. بدین روی، قالب اصلی جزء پوسته‌ای استوانه‌ای مطابق روابط ذیل شناسایی می‌گردد:

$$\beta_1 = \frac{1}{8064}, \quad \beta_2 = \frac{1}{72} + \frac{1}{36} f_s \left( \frac{h}{L} \right)^2 \quad (35)$$

اندازه  $(h/L)$  را می‌توان ضریب کلفتی پوسته دانست. در پوسته‌های نازک با ضریب کلفتی کمتر از  $0.05$ ، پاره دوم عامل آزاد  $\beta_2$  بسیار کوچک خواهد بود، و می‌توان به سادگی از آن چشم‌پوشی نمود.

### نتیجه‌گیری

برپاسازی قالب جزء‌های پوسته‌ای خم دار با بهره‌جویی از راهکار آشنای قالب‌سازی، که بر رابطه‌سازی آزاد استوار است، امری ناشدنی بوده و نیاز به بازآرایی آزمون جزء تکین دارد، که تاکنون انجام نشده است و پژوهشگران آن را دشوار یافته‌اند. ناشناس بودن میدان کرنش ثابت که شرط‌های ایستایی را برآورد، اندرکنش میان حالت‌های کرنشی جزء و درگیری کارمایه‌های همتای آن‌ها، و انباشت کارمایه در حالت‌های جابه‌جایی و دوران جسم سخت، از دشواری‌های پیش روی پژوهشگران در ساخت قالب‌های پوسته‌ای خم دار هستند. در این مقاله، برای برپا کردن قالب پوسته استوانه‌ای، از ماتریس سختی اصلی یک جزء نمونه بهره گرفته شده است. پس از سامان دادن این ماتریس، تنها زیرماتریس سختی همتای حالت‌های کرنشی مرتبه بالا عامل دار می‌شود. با پرهیز از عامل دار کردن زیرماتریس درگیر میان جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت با حالت‌های کرنشی مرتبه بالا، آسیبی به شرط همگرایی قالب نخواهد رسید. در پایان، برای درست آزمایی قالب پیشنهادی، از روش شناخته شده بهینه‌سازی دگرذیسی استفاده شده است.

کارمایه کرنشی که قالب در جزء انباشت می‌کند، معادله رابطه زیر خواهد بود:

$$U(\beta_1, \beta_2) = EhL\pi \left[ \left( \frac{1}{R} \right) w_o^2 + \left( \frac{L^2}{12R} \right) \theta_o^2 + \left( \frac{L^4}{320R} + \frac{h^2 R}{12} \right) \kappa_{x_o}^2 + \left( \frac{L^2}{12R} \right) w_o \kappa_{x_o} + \left( \frac{L^4}{240R} \right) \theta_o \kappa_{x_o} + \left( \beta_1 \frac{L^6}{2R} + \beta_2 \frac{h^2 L^2 R}{2} \right) \kappa_{x_o}^2 \right] \quad (31)$$

از سنجش کارمایه قالب در این رابطه، با کارمایه درست از رابطه (۳۰)، اندازه بهینه عامل‌های آزاد مطابق رابطه ذیل پیدا می‌شود:

$$\beta_1 = \frac{1}{8064}, \quad \beta_2 = \frac{1}{72} \quad (32)$$

جایگذاری این اندازه‌ها در قالب (۲۶)، همان گونه که انتظار می‌رفت، ماتریس سختی آشنای جزء پوسته استوانه‌ای را به دست می‌دهد، که در بیشتر کتاب‌های نگره اجزای محدود آمده، و کارایی خود را در کاربرد نشان داده است.

می‌توان در این فرآیند بهینه‌سازی، کارمایه کرنشی برشی را نیز گنجانند. تابع درست کارمایه برشی جزء پوسته‌ای استوانه‌ای برابر رابطه زیر می‌باشد:

$$U_{Vex} = EhL\pi \left( \frac{f_s h^4 R}{72} \right) \quad (33)$$

کارمایه کرنشی جزء با برهم‌نهی کارمایه‌های خمشی و برشی از رابطه‌های (۳۰) و (۳۳)، مطابقه رابطه (۳۴) به دست می‌آید:

$$U = U_{Mex} + U_{Vex} = EhL\pi \left[ \left( \frac{1}{R} \right) w_o^2 + \left( \frac{L^2}{12R} \right) \theta_o^2 + \left( \frac{L^4}{320R} + \frac{h^2 R}{12} \right) \kappa_{x_o}^2 + \left( \frac{L^2}{12R} \right) w_o \kappa_{x_o} + \left( \frac{L^4}{240R} \right) \theta_o \kappa_{x_o} + \left[ \frac{L^6}{16128R} + \frac{h^2 L^2 R}{2} \left( \frac{1}{72} + \frac{f_s h^2}{36 L^2} \right) \right] \kappa_{x_o}^2 \right] \quad (34)$$

از سنجش کارمایه قالب در رابطه (۳۱) با کارمایه درست از این رابطه اخیر، اندازه بهینه عامل‌های آزاد برابر مقدار زیر خواهد بود:

### مراجع

- ۱- محمد رضایی پژند و محمد مؤیدیان، نگره جزء محدود، دانشگاه آزاد اسلامی مشهد با همکاری انتشارات سخن گستر، ۱۳۸۲.
- 2 - Brebbia, C. A. and Connor, J. J. (1973). *Fundamentals of Finite Element Techniques*, Butterworth & Co (Publishers) Ltd.
- 3 - Bernadou, M. (1996). *Finite Element Methods for Thin Shell Problems*, John Wiley & Sons.
- 4 - Felippa, Carlos A. (2000). "Recent Advances in Finite Element Templates." *Computational Mechanics for The 21<sup>st</sup> Century*, Saxe-Coburn Publications, Edinburgh, PP. 71-98.



- 
- 5 - Dow, John O. (1999). *A Unified Approach to the Finite Element Method and Error Analysis Procedures*, Academic Press.
  - 6 - Bergan, P. G. (1980). "Finite Elements Based on Energy Orthogonal Functions." *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 15, PP. 1541-1555.
  - 7 - Bergan, P. G. and Nygard, M. K. (1984). "Finite elements with increased freedom in choosing shape functions." *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 20, PP. 643-664.
  - 8 - Felippa, Carlos A. (2003). "A template tutorial." *Delivered in Centro Internacional de Metodos Numericos en Ingenieria (CIMNE)*, Barcelona, Spain.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Individual Element Test
  - 2 - Morphing
  - 3 - Template
  - 4 - Lumping Matrix
  - 5 - Principal Stiffness Matrix
  - 6 - Energy Orthogonal
  - 7 - Strain Gradient Notation
  - 8 - Rotational Invariant
-

