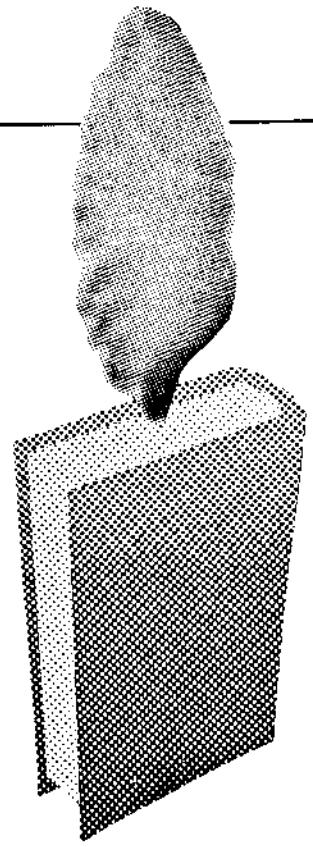
احمد جعفر نژاد



«تئوری صف»

queuing Theory

هنگامی که گوشی تلفن را بر می‌دارید، رقابت را با سایر مشترکین سیستم تلفن جهت دستیابی به شبکه ارتباطی، آغاز می‌کنید. تسهیلات فیزیکی همانند خطوط تلفن ثابت بوده، در صورتی که تقاضای مصرف کننده، بسیار متغیر است.

چگونه می‌توان نسبت سهم مصرف کنندگان از تسهیلات را جهت تامین نیازهای آنان با هزینه معقول تعیین کرد. راه حل این مشکل دستیابی به یك هماهنگی و تعادل مطلوب بین زمان انتظار و مقدار منابع است.

مسأله سیستم تلفن که با تعداد تسهیلات ثابت و تقاضای تصادفی توصیف شده، نمونه‌ای از سیتم صف است که می‌توان با استفاده از فنون مناسب «تئوری صف» حل کرد. در حقیقت همین مشکل موجب رشد و توسعه «تئوری صف» توسط «ژوهانسن» و «ارلانگ» در اوایل سالهای ۱۹۰۰ شد.(۱) در اینجا کلمه تئوری شما را به اشتباه نیندازد، صفها عادی و معمولی هستند و به هیچ وجه به اندازه کلمه تئوری پیچیده و بغرنج نمی‌باشند. در هر صورت یك صف بیان کننده «خط انتظار»است کلمه‌ای ملموس و گاهی هم ناراحت کننده.

«تئوری صف» یك دانش کاربردی است ولی متاسفانه به کار گیری آن برای خیلی از افراد توجیه نشده است. سیستمهای صف می‌توانند با استفاده از مدلهای تحلیلی و یا شبیه سازی (Simulation) طراحی شوند. در بسیاری از موارد هر دو روش می‌توانند به صورت مکمل یکدیگر مورد استفاده قرار گیرند. آشنایی با اصول اساسی هر دو روش جهت فرموله کردن مدل اولیه و معتبر ساختن نهایی آن لازم و ضروری است. استفاده از مدلهای تحلیلی می‌تواند هزینه ساز باشد، زیرا درجه موفقیت مدل تحلیلی بستگی به میزان آموزش و تجربه دارد. حقیقت آن است که یك مدل کلیدی برای حل تمامی مسایل، وجود دارد که در این گونه موارد استفاده از شبیه سازی ممکن است، بهتر باشد.

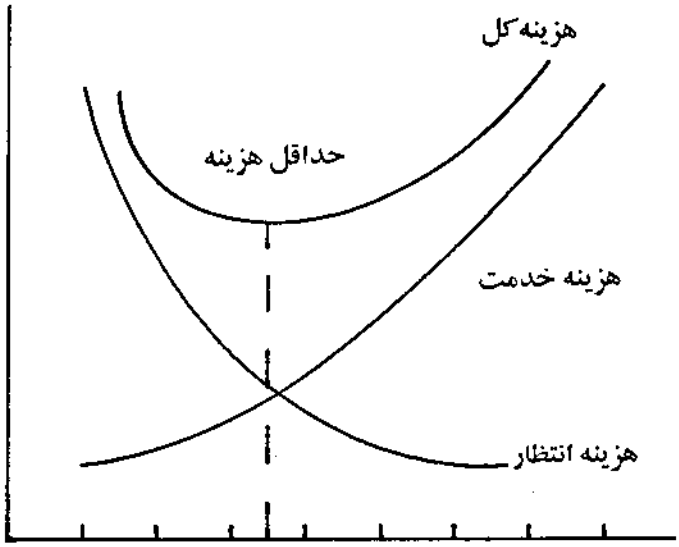
بهینه یابی مدل شبیه سازی می‌تواند مشکل دیگری باشد. آزمایش کامل راه کارها با استفاده از شبیه سازی بسیار گران و وقتگیر است. این وضعیت با توجه به طبیعت سیستم شبیه سازی که احتمالی است، بدتر هم می‌شود و بنا بر این نیاز به ورودیهای تکراری و یکسان جهت رسیدن به دامنه‌ای از نتایج احتمالی دارد. در بعضی موارد همچون تجزیه و تحلیل شبکه‌های پیچیده، هیچکدام از روش‌ها به تنهایی قادر به ارائه راه حل مناسب نیستند. با به کار گیری مقداری تجربه و توجه، سیستم مدل تحلیلی می‌تواند برای یافتن فضای مسأله به کار رود و با استفاده از مدل شبیه سازی نتایج بهینه گردد. به کار گیری هر دو روش با هم یك موضوع نسبتاً رایجی است. در بسیاری از کاربردها مدلهای شبیه سازی صرفاً برای تایید و توجیه مدلهای تحلیلی به کار رفته است و بالعکس.

تعریف: (۲)

«سیستم صف، سیستمی است که در آن دوره‌های تراکم یعنی خطوط انتظار، بیکاری تسهیلات خدمت به واسطه ظرفیت محدود و تصادفی بودن ورود واحدها و زمان مورد نیاز برای خدمت به آنها را مشاهده می‌کنیم.»

مسئله صف تعیین ظرفیت بهینه برای یك مرحله عملیات است که از طریق تعدادی ارائه کننده خدمت به طور موازی با میانگین نرخ بازده یکسان، برای موردی که ترکیب هزینه واحدهای منتظر و سطح خدمت حداقل گردد، سنجیده می‌شود.

به منظور شرح چگونگی پیدایش مشکل صف، نحوه عمل دفتر کمکهای اولیه پزشکی در یك کارخانه بزرگ را در نظر بگیرید. ورود کارکنان کارخانه هنگامی که دچار حوادث جزیی یا شدید می‌شوند و لازم است قبل از رفتن به بیمارستان تحت معالجه اولیه قرار گیرند، تصادفی است. زمان لازم برای معالجه نیز به طور تصادفی تغییر می‌کند. گاهی اوقات به دلیل ظرفیت محدود دفتر کمکهای اولیه، خط انتظار به وجود می‌آید و گاهی این دفتر بی کار است که موجب هزینه‌های انتظار



شکل ۱ - تعیین ظرفیت بهینه برای سیستم عملیاتی (خدماتی)

می‌گردد. این هزینه‌ها نه تنها شامل دستمزد کارکنان برای اوقات بیکاری می‌شود، بلکه شامل کاهش بازده تولید به واسطه تحمیل شده بر منابع (ماشینها و تجهیزات) و هزینه‌های بهداشتی پیچیده احتمالی می‌گردد.

به طوری که ملاحظه می‌کنید اگر تعداد ارائه کنندگان خدمت، افزایش یابند، این عمل سبب ایجاد هزینه (متغیر) خدمت خواهد شد که در این صورت هزینه انتظار مشتری کاهش می‌یابد.

هدف از تجزیه و تحلیل یك سیستم صف، یافتن تعداد ارائه کننده خدمت یا میانگین نرخ بازدهی است که جمع هزینه خدمت و انتظار مشتری را به حداقل برساند که به صورت زیر نشان داده می‌شود. (۳)

حداقل $E(Tc) = E(Sc) + E(Wc)$

اگر مفروضات معین درباره واردهها و زمانهای خدمت وجود داشته باشد، تجزیه و تحلیل صف می‌تواند از طریق مدلهای ریاضی صورت پذیرد. در غیراین صورت بایستی به شبیه سازی با استفاده از داده‌های تجربی - اتکاء کنیم.

در هرحال، تعیین ظرفیت بهنیه به سه مرحله نیازمند است:

۱ - محاسبه مشخصات عملیاتی معین تسهیلات تحت مطالعه، مانند: نرخ بهره‌برداری، میانگین انتظار، زمان کل در سیستم و غیره.

۲ - تخمین هزینه‌های مربوط به مشتریان منتظر با سطوح مختلف خدمت.

۳ - تلفیق مشخصات هزینه و عملکرد جهت شکل دادن به یك سنجش هزینه عملیاتی مورد انتظار که می‌خواهیم با توجه به سطح ظرفیت به حداقل ممکن برسانیم

جمعیت متقاضی خدمت

جمعیت متقاضی به عنوان مجموعه‌ای از واحدها که به خدمت یك تسهیلات نیاز داشته باشند، تعریف می‌شود. برای مثال، تعدادی از افراد که ممکن است به فوریتهای پزشکی نیاز داشته باشند، تعدادی از ساختمانها که نیاز به اطفاء حریق دارند و تعداد ماشینهایی که به تعمیر نیازمندند. بنابراین منبع جمعیت برحسب اندازه تقاضا و قالبهای رفتاری تقاضا در یك سیستم نشان داده می‌شود.

اندازه جمعیت ممکن است محدود باشد، مانند تعداد ماشینهای موجود در یك تعمیرگاه که احتیاج به تعمیر دارند یا این که نامحدود باشد، مانند تعداد کسانی که از امکانات بیمارستان، جهت انجام عمل جراحی استفاده می‌کنند.

فرق این دو، نسبی است، به این معنی که در تجزیه و تحلیل، اصطلاح نامحدود ممکن است به تعداد زیادی اطلاق شود مثلاً ۳۰ آژیر آتش سوزی در یك روز یا ۱۰۰۰ سفارش پستی و غیره. به طور کلی تصور یك جمعیت به صورت نامحدود تجزیه و تحلیل را ساده می‌کند، به ویژه هنگامی که از یك مدل ریاضی استفاده می‌کنیم.

رفتار جمعیت را از طریق الگوی ورود و نیز نحوه عمل کسانی که قبل و بعد از آنها به صف متصل می‌شوند می‌توان تشریح کرد. یك الگوی ورود به اندازه واردهها و توزیع فاصله زمانی بین واردههای متوالی اطلاق می‌شود. برای مثال تلفنهایی که در یك تلفنخانه زنگ می‌زنند یا مسافران یك پرواز که از اداره کمرگ عبور می‌کنند یا حمل بارهایی که نیاز به بازرسی دارند.

زمان بین واردههای متوالی ممکن است ثابت، مثل قطعات نیم ساخته روی یك تسمه نقاله و یا متغیر باشد، مانند برنامه زمانبندی ملاقاتهای یك پزشك. معمولاً زمان بین واردههای متوالی طبق یك توزیع احتمالی به طور تصادفی تغییر می‌کند.

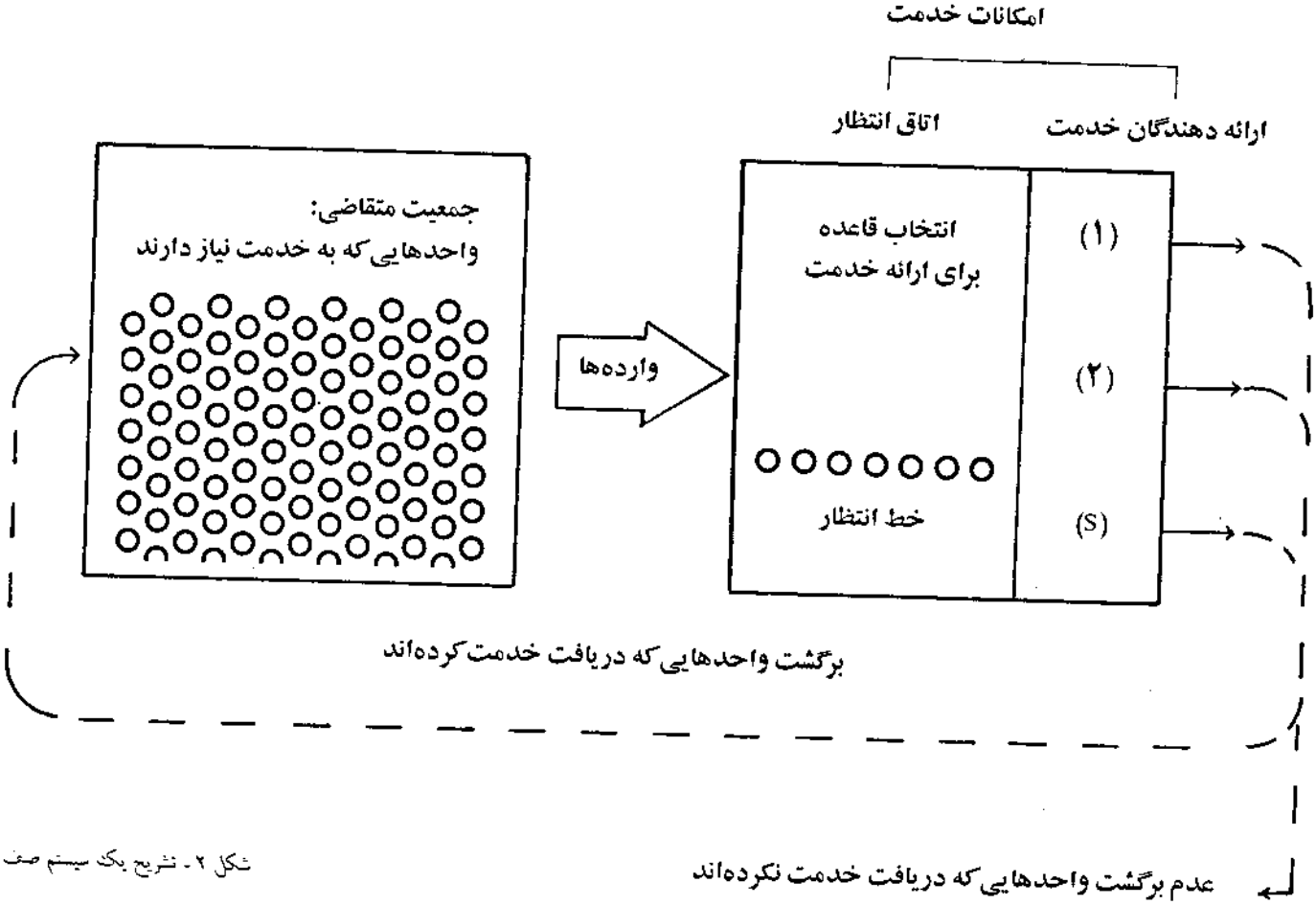
برای بعضی سیستمها ممکن است واردهها مستمر باشند مثل جریان آب به یك مخزن. در بیشتر تسهیلات خدماتی واحدهای وارده برای خدمت طبق توزیع «پواسون» با نرخ میانگین برابر λ می‌باشد.

فرض «پواسون» در موارد زیر مقتضی است.(۴)

۱ - احتمال وارده در هر لحظه خیلی کم باشد، اما فرصتهای زیادی برای اتفاق افتادن آن وجود داشته باشد.

۲ - واحدهایی که به طور تصادفی مستقل از یکدیگر با همان نرخ متوسط λ وارد شوند.

۳ - احتمال داشتن دو یا چند وارده در یك زمان بسیار کوتاه مثل یك ثانیه، تقریباً صفر باشد.



شکل ۲ - تشریح یک سیستم صف

هر گاه واحدهای وارد شده به تسهیلات خدمت طبق توزیع «پواسون» با یك نرخ وارده برابر با λ باشند، زمان بین وارده‌ها از توزیع نمایی میانگین $1/\lambda$ تبعیت می‌کند و بالعکس. این خاصیت به ما اجازه می‌دهد تا وارده‌ها را از طریق تمرکز بر زمانهای بین وارده‌ها به عنوان مقادیر متغیر تصادفی که توسط توزیع‌نمایی منفی توضیح داده می‌شود، مطالعه کنیم.

توصیف جمعیت متقاضی بایستی شامل اطلاعاتی درباره چگونگی رفتار واحدها هنگام دریافت خدمت نیز گردد. بعضی واحدها ممکن است با مشاهده خط انتظار طولانی از پیوستن به صف منصرف شوند، در حالیکه دیگران ممکن است دقیقاً به همین دلیل جذب شوند، به ویژه در امکانات تفریحی مانند فیلم، تاتر، کنسرت و غیره. هر بار که یك واحد به خط انتظار می‌پیوندد، ممکن است در همان خط تا زمانی که خدمت به او ارائه شود منتظر بماند یا تصمیم به ترک و پیوستن به خط انتظار دیگری را بگیرد. چنانچه بتوانیم فرض کنیم که واحدهای در حال ورود تا زمانی که خدمت رسانی به آنها کامل شود منتظر می مانند، تجزیه و تحلیل آسان می‌شود. (۵) آن گاه باید توجه کنیم که آیا واحدهای سرویس شده به جمعیت متقاضی اصلی می‌پیوندند یا برای همیشه آنجا را ترک می‌کنند.

ساختار تسهیلات خدمت:

ساختار تسهیلات خدمت به صورتهای زیر مشخص می‌گردد:

۱ - تعداد کانالها در هر مرحله: تعداد ارائه کنندگان خدمت به طور موازی در هر مرحله از تولید، سطح حداکثر ظرفیت را تعیین می‌کنند.

الف - مرحله تك کانال: امکان خدمت به یك واحد در یك زمان را فراهم می آورد.

ب - مرحله چند کانال: زمینه خدمت همزمان برای تعداد زیادی را مثلاً n واحد در یك زمان آماده می‌سازد.

۲ - تعداد مراحل در سیستم، مراحل متوالی که یك واحد بایستی قبل از این که یك فرایند تکمیل گردد از آن بگذرد، ممکن است به شکلهای زیر باشند:

الف - تك مرحله، تك کانال

ب - تك مرحله، چند کانال

ج - چند مرحله، تك کانال

د - چند مرحله، چند کانال

عملیات تسهیلات

توصیف ما از عملیات تسهیلات بایستی شامل جزئیات زیر باشد:

قابلیت دسترسی: خدمت ممکن است به طور مداوم در دسترس باشد (اوژانس بیمارستان، پلیس، آتش نشانی) یا طی ساعات مشخص (بانکها، فروشگاهها و غیره) بتوان به آن دست یافت. وقتی خدمت منقطع باشد، قبل از این که به وضعیت ثابت و متعادل برسد، زمانی صرف خواهد شد و این امر به کارگیری بیشتر مدلهای صف که عملکرد سیستم را فقط برای وضعیت تعادل توضیح می‌دهند، محدود می‌کند (حالت پایدار)

نظم صف: قاعده انتخاب واحد بعدی جهت ارائه خدمت:

انتخاب این که کدام واحد بایستی جهت گرفتن خدمت در میان واحدهای خط انتظار، واحد بعدی باشد، ممکن است از تسهیلاتی تا تسهیلات دیگر تغییر کند که بستگی به خدمت ارائه شده دارد. قاعده‌های زیر معمولترین موارد استفاده را دارند. (٦) (برای سیستمهای تک کانال)

١ - اولین وارده، اولین خدمت (FCFS)

٢ - تقدم تخصیصها ممکن است برای طبقات مختلف واحدها جهت انعکاس اهمیت نسبی یا وضعیت حساس آنها دربرخورد با اهداف سیستم تحمیل شوند. در این رابطه، سفارش مشتریان ویژه، ممکن است زودتر از سایرین انجام گیرد. موارد اورژانس در یك بیمارستان زودتر تحت معالجه قرار می‌گیرند و غیره.

٣ - انتخاب آخرین وارده، اولین خدمت (LCFS) ممکن است در فرآیند مواد خام و قطعات یا حالت اضطراری که طی آن دستور داده می‌شود، مردم آسانسور یا جای دیگر را ترک کنند، اتفاق بیفتد.

۴ - قوانین انتخاب دیگری بسته به ماهیت خدمت یا نیازمندیهای مشتریان ممکن است، به کار گرفته شوند.

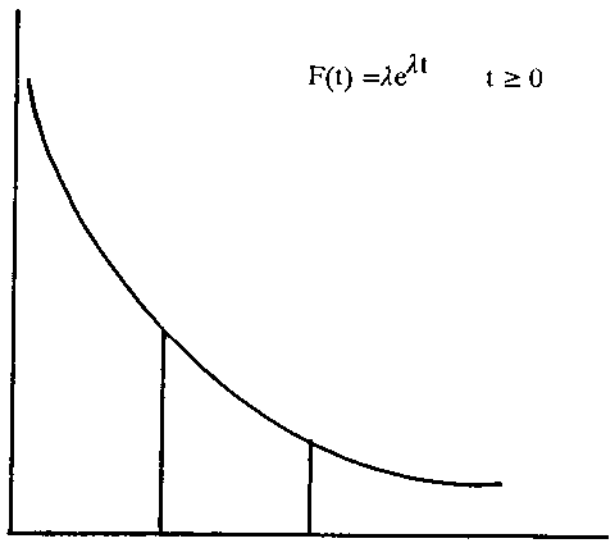
برای سیستمهای چندکانال، قواعد انتخاب شامل موارد زیر است:

- تخصصی کردن کانالها جهت صرفه جویی زمان و هزینه فرایند و استفاده تخصصی از تجهیزات.
- چرخش جهت توزیع بار به صورت همگن.
- واگذاری به اولین خدمت دهنده به طور آزاد، مانند بانك، اداره پست و غیره.
- مجاز بودن هر واحد در انتخاب خدمت دهنده برتر. مانند انتخاب پزشك توسط بیمار.

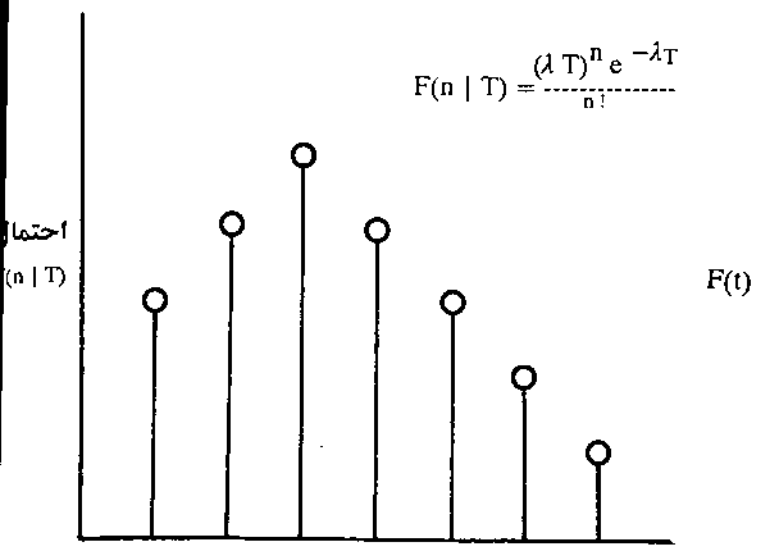
توزیع زمان خدمت

وقتی یك واحد به یك کانال مفروض تخصیص داده شد، زمانی که طول می‌کشد تا آن واحد خدمت دریافت کند، ممکن است یك زمان ثابت یا متغیر باشد.

زمانهای ثابت هنگامی که فرایند مکانیزه یا اتوماتیك باشد امری عادی است. این مورد در سیستمهای صنعتی نیز صادق است، هر چند معاملات مهم بانکی و برخی سیستمهای خدماتی به زمانهای ثابت خدمت نزدیك شده‌اند.

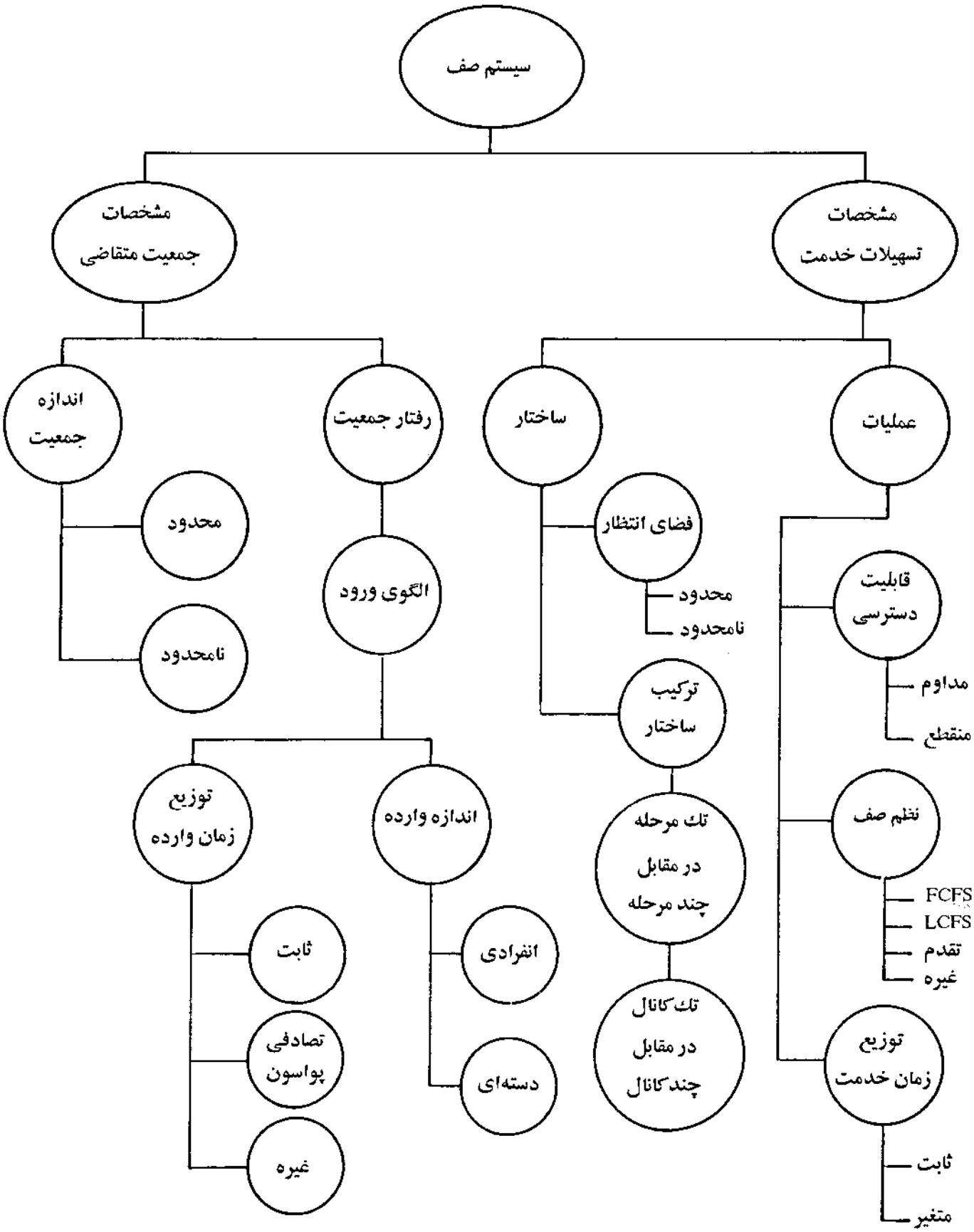


توزیع نمایی



تعداد وارده‌ها n توزیع پواسون

شکل -٣ توزیع «پواسون» برای وارده‌ها و توزیع نمایی برای فاصله زمانی بین وارده‌ها



شکل ۴۰ نمایش توصیفی صف (خط انتظار)

به کارگیری عناصر انسانی بیشتر در ارائه خدمت بهینه، تنوع بیشتری در طول زمان خدمت خواهد داشت. مثل یك آزمایش پزشکی یا تعمیر ماشین یا دستگاه.

توزیع زمان خدمت یك توزیع آماری از اطلاعات تجربی است که توسط یك توزیع احتمالی خوب تقریب زده شود. چنین تقریبی نیازمند خدمتی است که مفروضات معینی را برحسب نرخهای متوسط خدمت، تغییر پذیری زمانهای خدمت انفرادی و استقلال چنین زمانهایی برای واحدهای متوالی فراهم می‌آورد.

الگوهای ورود غیرمشابه، اغلب می‌توانند بخوبی توسط «توزیع پواسن» تخمین زده شوند. زمانهای خدمت قبل از آن که بتوانند بوسیله یك توزیع احتمالی شناخته شده تبیین گردند، نیازمند تجزیه و تحلیل بیشتری هستند. برای یك کانال مفروض، نرخ متوسط خدمت λ ممکن است جهت زمانهای خدمت ثابت و دیگر موارد که به طور تصادفی تغییر می‌کنند به کار گرفته شود. برای زمانهای خدمت با حداکثر تغییرپذیری می‌توان از یك توزیع نمایی که میانگین زمان خدمت برای هر واحد $1/\lambda$ است استفاده کرد.

$$F(t) = \lambda e^{-\lambda\tau} \quad \tau \geq 0$$

این توزیع دارای خاصیت مهمی است که به طور قابل ملاحظه‌ای توانائی کاربردش را محدود می‌کند. در این رابطه، احتمال این که خدمت به یك واحد در فاصله زمانی کوتاه بعدی تکمیل گردد، به صورت مستقل با طول زمانی که واحد خدمت دریافت می‌کند، مشابه است. به عبارت دیگر، ارائه کننده خدمت، هیچ اطلاعی از این که چقدر روی واحد کار شده، ندارد. با وجود این احتمال زمانهای خدمت بیشتر از زمانهای طولانی است.

هرگاه خدمت شامل ترتیب خوب تعریف شده برای مراحل باشد، امکان توصیف آن با توزیع نمایی منفی نیست. برای اینگونه موارد، یك توزیع کاملاً انعطاف پذیر بنام «ارلنگ» قابل استفاده است که با دو پارامتر K و λ مشخص می‌شود.

$$F(t) = \frac{(\lambda k)^k}{(K-1)!} t^{k-1} . e^{-k\lambda t} \qquad t \geq 0 \quad \text{به ازاء}$$

k= ثابت مثبت با در نظر گرفتن مقادیر صحیح و تعیین تغییرپذیری توزیع

λ= نرخ میانگین خدمت، همانند توزیع نمایی منفی.

توزیع «ارلنگ» به دو دلیل مهم به نظر می‌رسد: (۷)

۱ - انعطاف پذیری آن، توضیح تغییرات وسیع تسهیلات خدمت را میسر می‌سازد. با اختصاص مقادیر مناسب به λ و K می‌توانیم توزیعهای تجربی زمان خدمت را تخمین بزنیم.

۲ - این توزیع می‌تواند کل زمان خدمت برای یك فرایند با K مرحله مستقل و زمان خدمت مرحله T با یك میانگین برای تمام مراحل مساوی با $1/K\lambda$ را به دست دهد.

اگر نتوانیم یك توزیع نظری زمان خدمت همانند «ارلنگ» استفاده کنیم، باید از یك تحلیل شبیه سازی یا به کارگیری یك توزیع آماری تجربی استفاده نماییم.

روابط اساسی بین مشخصات عملکرد صف

ارزیابی مشخصات مختلف عملکرد به تناسب شکل هر سیستم فرق می‌کند. مثلاً تعیین تعداد مورد انتظار واحدهای منتظر (Lq) با واحدهای موجود در سیستم (L) اغلب ساده‌تر از تعیین زمان مورد انتظار (W) یا زمان انتظار (Wq) در سیستم است. بنابراین دانستن این که چگونه اینها با هم ارتباط دارند می‌تواند در کاربردهای ویژه فوق‌العاده مفید واقع گردد.

لیتل ثابت کرد که روابط زیر تحت شرایط کاملاً عمومی قرار دارند.(۸)

$$L = \lambda w$$

$$L = \lambda Wq$$

$$W = Wq + \frac{1}{\mu}$$

بزرگتر بودن نرخ خدمت μ از نرخ ورود λ یعنی $\lambda/\mu < 1$ نیاز کلیدی برای ثابت ماندن عملیات سیستم است. در غیر این صورت خط انتظار به طور نامحدودی طولانی می‌شود. با فرض اینکه مشتریان وقتی که صف خیلی طولانی باشد آن را تا زمانی که خدمتی دریافت نکنند، ترک نمی‌کنند، (۹)

$$Lq = \frac{(\lambda\alpha)^2 + (\frac{\lambda}{\mu})^2}{2\,(1 - \frac{\lambda}{\mu})}$$

در تئوری «صف»، طول متوسط خط انتظار به نرخ بهره‌برداری $\rho = \lambda / \mu$ بستگی دارد و برای مقادیر ثابت λ و μ که با تغییر پذیری در زمانهای خدمت افزایش می‌یابند، با σ اندازه‌گیری می‌شوند. قبلاً توضیح داده شد که تغییرپذیری در زمانهای خدمت وقتی $\sigma=0$ باشد حداقل است و هنگامی‌که زمانهای‌خدمت‌ثابت $(6=1/\lambda)$باشدحداکثر می‌باشد (البته طبق توزیع نمایی منفی).

هزینه کل مورد انتظار

هزینه‌های خدمات برای تسهیلات تک کانال عبارتست از:

$$E(Sc) = Cs\mu$$

که μ نرخ خدمت و Cs هزینه نهایی افزایش نرخ خدمت μ معادل یك واحد هستند برای تسهیلات چند کانال داریم:

$$E(Sc) = \acute{C}sS$$

که S تعداد کانالها و $\acute{C}s$ هزینه نهایی ناشی از افزودن یك خدمت دهنده اضافی است

هزینه‌های انتظار واحدها عبارتست از

$$E(Wc) = CwL$$

که در آن L تعداد متوسط واحدها در سیستم و Cw هزینه انتظار یك واحد است.

بنابراین هزینه کل مورد انتظار به صورت زیر نشان داده می‌شود. (۱۰)

$$E(Tc) = E(Sc) + E(Wc)$$

برای تسهیلات تك كانال $CsM + CwL$

برای تسهیلات چند کانال $\acute{C}sS + CWL$

هدف ما از حل مشکل عمومی صف می‌تواند حداقل کردن E(Tc) با مقادیر μ یا S که به وسیله تکنولوژی در دست، بودجه سرمایه‌ای، فضای فیزیکی موجود یا قیود دیگر مربوط باشد. به خاطر سپردن نکات زیر در استفاده از مدلهای صف مفید است:

۱ - برای یك تسهیلات خدمت با وارده‌های تصادفی مشتری و زمانهای تصادفی خدمت، رسیدن به ۱۰۰ % بهره‌برداری مطلوب نیست $(\rho = ۱۰۰\ \%)$. هنگامی که چنین اتفاقی روی دهد طول خط انتظار Lq به طور نامحدودی طولانی می‌شود. چنین وضعیتی فضای انتظاری تقریباً بزرگ و زمانهای تحویلی بیش از اندازه طولانی را نیاز دارد.

۲ - استفاده از روشهای تجربی ساده به جای تجزیه و تحلیل دقیق در اتخاذ تصمیمات، معمولا ما را به اعمال اشتباه هدایت می‌کند. سهل انگاری در مسایل صف، نمی‌تواند موجه باشد.

۳ - تراکم مشتریان در نقاط مختلف خدمت، هزینه‌انتظار را به وجود می‌آورد که نه تنها شامل زمان بیکاری واحدها در خط انتظار می‌شود بلکه تمام منابع مربوط به این انتظار را در برمی‌گیرد.

۴ - تمام معیارهای عملکرد فیزیکی یك تسهیلات می‌توانند با کاهش تغییر پذیری در زمانهای ورود و خدمت بهبود یابند.

۵ - حتی اگر «تئوری صف» به خودی خود پاسخهای بهینه را به مشکلات تعیین ظرفیت ندهد در مفهومی کردن خیلی از مشکلات عملیاتی مفید است. گفته می‌شود زندگی چیزی نیست جز یك رشته صف.

۶ - مدیریت عملیات در بسیاری از مواقع می‌تواند فرموله کردن صف را با روش بسیار قوی شبیه سازی ترکیب کند تا به تنوع وسیعی از موقعیتهای عملی دست یابد.

لازم به ذکر است که امروزه نرم افزارهای کامپیوتری زیادی در رابطه با شبیه سازی صف به وجود آمده است که یکی از معروفترین آنها GPSS می‌باشد.

1- Saaty, T.l: Elements of queuing theory with Applications, MC Graw Hill, New York, 1961

2- Dervitsiotis, N.K: Operations Management, MC Graw Hill, New York, 1981

3- IBid

۴ - احتمالات «پواسون» برای نرخهای ورود مختلف را به آسانی می‌توان از جدول توزیع «پواسون» به دست آورد.

5- Newell, G.F: Applications of queuing theory, chapman & Hall, London, 1971

6- Hillier, F.S and G.T.Lieberman: introduction to operations Research Holden- Day, Sanfrancisco, 1974

7- Cooper, R.B: Introduction To queuing theory, Macmillan, New York, 1972

8- John, D.C.Little: "proof for the queuing formula: $L=\lambda W$ " Operations Research may-june, 1961 pp. 383-387

۹ - این فرمول تحت عنوان معادله Pollaczek- Khintchine معروف است (از منبع شماره ۲ اقتباس شده است).

10- Taha, Hamdy, A: Operations Research, An Introduction, 3r d / ed Macmillan, New York, 1982