

تحلیل دینامیکی فضای کامل همسانگرد جانبی با صفحه صلب دایره‌ای

عزیزالله اردشیر بهرستاقی^۱ و مرتضی اسکندری قادی*^۲

^۱ گروه مهندسی عمران، دانشگاه علوم و فنون مازندران، بابل

^۲ دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۱۰/۲۲، تاریخ دریافت اصلاح شده: ۱۳۹۰/۰۹/۲۰، تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۱۱/۲۳)

چکیده

در این مقاله یک فضای کامل با رفتار همسانگرد جانبی به همراه یک دیسک صلب دایره‌ای به عنوان ناهمگنی در محیط در نظر گرفته می‌شود. صفحه صلب تحت اثر حرکت عمود بر صفحه با فرکانس دلخواه قرار می‌گیرد و محور همسانگردی محیط موازی با امتداد حرکت فرض می‌شود. تحلیل محیط همسانگرد جانبی اطراف صفحه تحت تحریک فوق هدف این مقاله می‌باشد. بدین منظور معادلات حرکت حاکم بر سیستم در حالت متقارن محوری در مختصات استوانه‌ای بیان می‌شوند. این معادلات با استفاده از روش توابع پتانسیل مجزا شده و معادله حاکم بر تنها تابع پتانسیل با استفاده از تبدیل هنکل حل می‌شود. به منظور تعیین ثابت‌های جواب، شرایط مرزی مربوط به تنش‌ها و تغییرمکان‌ها در راستای قائم به صورت معادلات انتگرالی دوگانه نوشته می‌شوند. معادلات انتگرالی دوگانه به دست آمده، به کمک روش نوبل به معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم تبدیل شده که در حالت‌های خاص به صورت تحلیلی حل می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: همسانگرد جانبی، فضای کامل، دیسک صلب، معادلات انتگرالی دوگانه، معادلات انتگرالی فردهلم، تکینگی.

مقدمه

می‌باشند، به منظور حل تحلیلی و بررسی دقیق جواب‌ها نیاز به مجزاسازی این معادلات می‌باشد. یکی از ابزارهای قوی و کاربردی در این زمینه استفاده از توابع پتانسیل^۲ می‌باشد. توابع پتانسیل متعددی برای جداسازی معادلات تعادل در محیط‌های همسانگرد^۳ ارائه شده‌اند که از آن میان می‌توان به توابع پتانسیل لامه^۴، لاو^۵، بوسینسک^۶، نوبر و پاپکویچ^۷، گالرکین^۸ [۹] و تابع پتانسیل اسکندری قادی و پک [۱۰] اشاره کرد. برخی از این توابع پتانسیل قادر به حل همه مسائل تئوری ارتجاعی نیستند. توابع پتانسیلی که قادر به حل همه مسائل باشند را توابع پتانسیل کامل گویند و در مقابل توابع پتانسیلی که برخی از مسائل را حل نمایند، توابع پتانسیل ناکامل نامیده می‌شوند. از توابع پتانسیل کامل ارائه شده برای محیط‌های همسانگرد جانبی^۹ می‌توان به توابع الیوت [۱۱]، هو-نواکی-لخنیتسکی^{۱۰} [۱۲ و ۱۳] در حالت استاتیکی و اسکندری قادی [۱۴] در حالت دینامیکی اشاره کرد.

حل دقیق اثر تغییرمکان صفحات صلب روی نیم‌فضاها و یا صفحات صلب مدفون در داخل فضای کامل به حل معادلات انتگرالی دوگانه^{۱۱} می‌انجامد [۳ و ۵]. معمولاً برای حل معادلات انتگرالی، با استفاده از تبدیلات

نتایج بررسی محیط‌ها تحت تغییرمکان‌ها و حرکت‌های صفحات صلب می‌تواند در شکل دادن فلزات در مهندسی مکانیک و در تحلیل تنش‌ها و تغییرمکان‌های زیر شالوده در مهندسی عمران مورد استفاده قرار گیرد. به همین علت تحلیل محیط‌ها تحت اثر تغییرمکان‌ها و حرکت‌های صفحات صلب مدت‌ها است که ذهن محققان مکانیک مهندسی، تئوری ارتجاعی و ریاضیات کاربردی را اشغال کرده است که از آن جمله می‌توان به ریسنر و ساگوسی [۱]، اسنیدن [۲ و ۳]، رابرتسون [۴]، پک و گوبرت [۵] و پک و اشلوک [۶] اشاره کرد. از طرفی بررسی محیط‌های ناهمسانگرد اجتناب ناپذیر است. شاید اولین بررسی یک نیم‌فضای ناهمسانگرد تحت اثر نیروی سطحی مربوط به میشل [۷] باشد.

همواره تماس نیرویی یک صفحه صلب با یک محیط ارتجاعی ایجاد رفتار تکین^۱ در لبه‌های تماس صفحه صلب و محیط ارتجاعی می‌نماید. این موضوع به علت مقاومت محدود اجسام مورد علاقه مهندسان و به علت مشکلات تحلیلی مورد علاقه محققان ریاضیات کاربردی بوده است [۲، ۸ و ۶]. از آنجایی که معادلات حرکت در تئوری ارتجاعی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و درگیر

معادلات حاکم و حل آنها

یک فضای کامل همسانگرد جانبی به همراه یک صفحه صلب دایره‌ای^{۱۶} طوری در نظر گرفته می‌شود که محور همسانگردی آن عمود بر سطح صفحه صلب باشد. دستگاه مختصات استوانه‌ای $(o: r, \theta, z)$ طوری قرار داده می‌شود که در آن امتداد z موازی محور همسانگردی بوده و فضای کامل با $-\infty < z < \infty$ تعریف شود. نیم‌فضای فوقانی با $z < 0$ و نیم‌فضای تحتانی با $z > 0$ مشخص می‌شود. این نواحی به ترتیب با I و II نشان داده می‌شوند (شکل ۱). صفحه تحت تحریک قائم با تغییرمکان قائم $\Delta e^{i\omega t}$ قرار می‌گیرد که در آن Δ دامنه تغییرمکان و ω فرکانس تحریک است. به علاوه t معرف زمان و $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد. معادلات حرکت در فضای فرکانسی با فرکانس ω بر حسب تغییرمکان در حالت متقارن محوری، برای حالتی که نیروهای حجمی وجود نداشته باشد به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۸]:

$$A_{11} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + A_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = -\rho \omega^2 u, \quad (1)$$

$$A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + A_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (A_{13} + A_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\rho \omega^2 w.$$

در این رابطه u و w مؤلفه‌های بردار تغییرمکان به ترتیب در امتدادهای r و z بوده و A_{ij} ضرایب ارتجاعی می‌باشند که تانسور تنش^{۱۷} σ_{ij} را به تانسور کرنش^{۱۸} ε_{ij} مربوط می‌سازد:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= A_{11} \varepsilon_{rr} + A_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= A_{12} \varepsilon_{rr} + A_{11} \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= A_{13} \varepsilon_{rr} + A_{13} \varepsilon_{\theta\theta} + A_{33} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{rz} &= 2A_{44} \varepsilon_{rz}, \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن ε_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) مؤلفه‌های تانسور کرنش می‌باشد. ضرایب ارتجاعی A_{ij} برحسب E مدول یانگ در صفحه همسانگردی، \bar{E} مدول یانگ عمود بر صفحه همسانگردی، ν ضریب پواسون در صفحه همسانگردی

انتگرالی^{۱۲}، این معادلات به معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم^{۱۳} [۱۵] و یا هر معادله قابل حل دیگر تبدیل می‌شود. به علت مشکلات مربوط به معادلات انتگرالی دوگانه ارائه یک راه حل کارا، دقیق و آسان همواره مورد توجه محققین بوده است.

در این مقاله یک صفحه صلب دایره‌ای مدفون در یک محل دلخواه از یک فضای کامل ارتجاعی خطی با رفتار همسانگرد جانبی چنان در نظر گرفته می‌شود که محور همسانگردی محیط عمود بر صفحه باشد. صفحه تحت حرکت در امتداد محور همسانگردی محیط با فرکانس دلخواه قرار می‌گیرد. تحت این شرایط معادلات حاکم بر محیط کامل با استفاده از روش توابع پتانسیل [۱۴، ۱۶ و ۱۷] مجزا سازی شده و با استفاده از تبدیل هنکل در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل می‌شوند. از بین مجموعه جواب موجود، جواب وابسته به شرایط مسئله با توجه به رفتار شاخه‌ای مجموعه جواب، چنان اختیار می‌گردد که شرایط تشعشع^{۱۴} در فواصل دور از صفحه برقرار گردد. شرایط پیوستگی در محل وجود صفحه به معادلات انتگرالی دوگانه تبدیل شده و به کمک روش نوبل [۱۵] به معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم^{۱۵} تبدیل می‌شود که در حالت کلی برای فرکانس تحریک دلخواه به صورت عددی حل می‌شود.

معادلات انتگرالی دوگانه در حالت استاتیکی به صورت تحلیلی حل می‌شوند. حل تحلیلی معادلات در حالت استاتیکی، کلیه تغییرمکان‌ها و تنش‌ها را به صورت تحلیلی در اختیار قرار می‌دهد که در فهم رفتار در حالت دینامیکی نیز بسیار مفید است. اختلاف تنش‌های قائم (تابع پرش تنش قائم) در محیط اطراف صفحه رفتار تکین دارد و جواب‌ها، این رفتار را به خوبی نشان می‌دهند.

نتایج در حالت دینامیکی به صورت عددی برآورد شده و به صورت گرافیکی نشان داده می‌شود. به منظور بررسی اثرات ناهمسانگردی نتایج برای محیط‌های همسانگرد جانبی با ناهمسانگردی‌های متفاوت ارائه شده و مقایسه می‌شوند. تفاوت مقاله حاضر و دیگر مقالات در این زمینه در نوع محیطی است که صفحه صلب در آن قرار گرفته است.

که در آن:

$$\mu_1 = \frac{A_{44}}{A_{66}}, \quad \mu_2 = \frac{A_{11}}{A_{66}}, \quad (۷)$$

$$\frac{\delta}{\rho_0} = \left[\frac{A_{66}}{A_{11}} \left(1 + \frac{A_{33}}{A_{44}}\right) - \frac{1}{\mu_1 s_2^2} - \frac{1}{\mu_2 s_1^2} \right].$$

پارامترهای s_1^2 و s_2^2 ریشه‌های یک معادله دو مجذوری می‌باشند [۱۷].

با اعمال تبدیل هنکل^{۱۹} مرتبه صفر [۲] بر معادله (۶)، این معادله به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۴ نسبت به متغیر z تبدیل می‌شود که جواب آنها در نواحی I و II با توجه به شرایط تشعشع به شکل زیر می‌باشند:

$$F_I^0(\xi, z) = A_I(\xi)e^{\lambda_1 z} + B_I(\xi)e^{\lambda_2 z}, \quad z < 0, \quad (۸)$$

$$F_{II}^0(\xi, z) = A_{II}(\xi)e^{-\lambda_1 z} + B_{II}(\xi)e^{-\lambda_2 z}, \quad z > 0.$$

که در آن ξ یک عدد حقیقی بوده و پارامتر هنکل نامیده می‌شود F_q^0 تبدیل هنکل مرتبه صفر تابع F در ناحیه q می‌باشد. به علاوه:

$$\lambda_1 = \sqrt{a\xi^2 + b + \frac{1}{2}\sqrt{c\xi^4 + d\xi^2 + e}}, \quad (۹)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{a\xi^2 + b - \frac{1}{2}\sqrt{c\xi^4 + d\xi^2 + e}}.$$

λ_j ($j=1,2$) چنان اختیار می‌گردند که قسمت حقیقی آن مثبت باشند. ثابتها در رابطه (۹) به صورت زیر هستند:

$$a = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2), \quad b = -\frac{1}{2}\rho\omega^2\left(\frac{1}{A_{33}} + \frac{1}{A_{44}}\right),$$

$$c = (s_2^2 - s_1^2)^2, \quad e = \rho^2\omega^4\left(\frac{1}{A_{33}} - \frac{1}{A_{44}}\right)^2, \quad (۱۰)$$

$$d = -2\rho\omega^2\left[\left(\frac{1}{A_{33}} + \frac{1}{A_{44}}\right)(s_1^2 + s_2^2) - 2\frac{A_{11}}{A_{33}}\left(\frac{1}{A_{11}} + \frac{1}{A_{44}}\right)\right].$$

(جمع شدگی در صفحه همسانگردی به علت کشش در همین صفحه)، \bar{v} ضریب پواسون عمود بر صفحه همسانگردی (جمع شدگی عمود بر صفحه همسانگردی به علت کشش در این صفحه)، μ مدول برشی در صفحه همسانگردی و $\bar{\mu}$ مدول برشی در صفحات عمود بر صفحه همسانگردی قابل نوشتن هستند [۱۷ و ۱۹]. برای مواد همسانگرد ضرایب ارتجاعی A_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_{11} = A_{33} = 2\mu(1-\nu)/(1-2\nu), \quad (۳)$$

$$A_{12} = 2\mu\nu/(1-2\nu), \quad A_{44} = \mu,$$

که در رابطه فوق μ معرف مدول برشی و ν معرف ضریب پواسون می‌باشد.

معادلات حرکت (۱) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزئی می‌باشند. به منظور مجزا سازی این معادلات از تابع پتانسیل F استفاده شده است [۱۴]. مؤلفه‌های بردار تغییر مکان بر حسب تابع پتانسیل F در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت دینامیکی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$u = -\alpha_3 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}, \quad (۴)$$

$$w = (1 + \alpha_1) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\rho_0 \omega^2}{1 + \alpha_1} \right] F,$$

که در آن:

$$\alpha_1 = \frac{A_{66} + A_{12}}{A_{66}}, \quad \alpha_2 = \frac{A_{44}}{A_{66}}, \quad (۵)$$

$$\alpha_3 = \frac{A_{13} + A_{44}}{A_{66}}, \quad \beta = \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1}, \quad \rho_0 = \frac{\rho}{A_{66}},$$

و $A_{66} = (A_{11} - A_{12})/2$ با جایگزینی روابط (۴) در (۱) معادلات حرکت به تنها معادله زیر تبدیل می‌شوند:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{s_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu_1} \rho_0 \omega^2 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{s_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu_2} \rho_0 \omega^2 \right) \right. \\ \left. + \delta \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] F(r, z) = 0 \quad (۶)$$

$$\begin{aligned}
 w(r, z=0) &= \Delta, & r \leq a, \\
 w(r, z=0^-) - w(r, z=0^+) &= 0, & r \geq 0, \\
 u(r, z=0^-) - u(r, z=0^+) &= 0, & r \geq 0, \\
 \sigma_{rz}(r, z=0^-) - \sigma_{rz}(r, z=0^+) &= 0, & r \geq 0, \\
 \sigma_{zz}(r, z=0^-) - \sigma_{zz}(r, z=0^+) &= 0, & r > a, \\
 \sigma_{zz}(r, z=0^-) - \sigma_{zz}(r, z=0^+) &= R(r), & r \leq a.
 \end{aligned}
 \tag{۱۲}$$

با نوشتن روابط (۴) در فضای تبدیل یافته و قرار دادن روابط (۸) در آن و استفاده از قضیه تبدیل معکوس هنکل، توابع تغییر مکان در فضای واقعی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 u_q(r, z) &= \int_0^\infty \xi \left(\alpha_3 \xi \frac{dF_q^0}{dz} \right) J_1(\xi r) d\xi, \\
 w_q(r, z) &= \int_0^\infty \xi \left((1 + \alpha_1) [-\xi^2 + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\rho_0 \omega^2}{1 + \alpha_1}] F_q^0 \right) J_0(\xi r) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{۱۳}$$

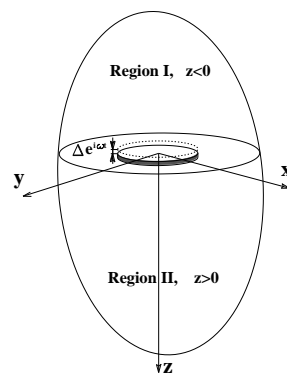
که در آن J_m ($m=0,1$) توابع بسل نوع اول می‌باشند. با توجه به رابطه تنش- کرنش و کرنش- تغییر مکان، توابع تنش بر حسب F_q^0 عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{qzz}(r, z) &= \int_0^\infty \xi \left\{ \frac{d}{dz} \left[A_{33} (\rho_0 \omega^2 - \xi^2 (1 + \alpha_1)) \right] + \alpha_3 A_{13} \xi^2 + A_{33} \alpha_2 \frac{d^2}{dz^2} \right\} F_q^0 \left\} J_0(\xi r) d\xi \\
 \sigma_{qrz}(r, z) &= \int_0^\infty \xi \left\{ A_{44} \xi \left[(\alpha_3 - \alpha_2) \frac{d^2}{dz^2} + \xi^2 (1 + \alpha_1) - \rho_0 \omega^2 \right] \right\} F_q^0 \left\} J_1(\xi r) d\xi, \\
 \sigma_{qrr}(r, z) + (A_{11} - A_{12}) \frac{u_q(r, z)}{r} &= \int_0^\infty \xi \left\{ \frac{d}{dz} \left[A_{13} (\rho_0 \omega^2 - \xi^2 (1 + \alpha_1)) \right] + \alpha_3 A_{11} \xi^2 + A_{13} \alpha_2 \frac{d^2}{dz^2} \right\} F_q^0 \left\} J_0(\xi r) d\xi, \\
 \sigma_{q\theta\theta} - (A_{11} - A_{12}) \frac{u_q(r, z)}{r} &= \int_0^\infty \xi \left\{ \frac{d}{dz} \left[A_{13} (\rho_0 \omega^2 - \xi^2 (1 + \alpha_1)) \right] + \alpha_3 A_{12} \xi^2 + A_{13} \alpha_2 \frac{d^2}{dz^2} \right\} F_q^0 \left\} J_0(\xi r) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{۱۴}$$

توابع $A_1(\xi)$ ، $B_1(\xi)$ ، $A_{II}(\xi)$ و $B_{II}(\xi)$ در روابط (۸) توابعی مجهول می‌باشند که با نوشتن شرایط پیوستگی مسئله به دست می‌آیند. توابع $\lambda_1(\xi)$ و $\lambda_2(\xi)$ توابعی چند مقداره^{۲۰} هستند. هر تابع چند مقداره در واقع مجموعه‌ای از توابع تک مقداری است. هر یک از اعضای این مجموعه یک بریدگی شاخه^{۲۱} از تابع چند مقداره نامیده می‌شود. نقطه تکین مشترک بین همه بریدگی‌های شاخه برای تابع چند مقداره یک نقطه شاخه‌ای^{۲۲} نامیده می‌شود. نقاط شاخه‌ای متناظر با توابع $\lambda_j(\xi)$ ($j=1,2$) با متحد کردن آن‌ها با صفر به دست می‌آیند. نقاط شاخه‌ای متناظر با توابع $\lambda_j(\xi)$ ($j=1,2$) به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۸، ۱۹]:

$$\xi_{\lambda_1} = \frac{\sqrt{\rho\omega}}{\sqrt{A_{11}}}, \quad \xi_{\lambda_2} = \frac{\sqrt{\rho\omega}}{\sqrt{A_{44}}}.
 \tag{۱۱}$$

به منظور تک مقداری کردن توابع $\lambda_i(\xi)$ ($i=1,2$) بریدگی‌های شاخه به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$ باشد [۱۷].



شکل ۱: فضای کامل همسانگرد جانی به همراه صفحه صلب دایره‌ای

مطابق شکل (۱)، تغییر مکان هارمونیک با دامنه Δ روی صفحه صلب π_0 به شعاع a در سطح $z=0$ اعمال می‌گردد. با توجه به شکل (۱) شرایط پیوستگی با حذف قسمت هارمونیک توابع به صورت زیر نوشته می‌شوند:

این مقاله از روش نوبل [۱۵] استفاده شده و معادلات انتگرالی دوگانه (۱۸) به معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم تبدیل شده و از تکنیک عددی برای برآورد تابع $B_{II}(\xi)$ استفاده می‌شود. پس از تعیین $B_{II}(\xi)$ ، با استفاده از رابطه (۱۷) توابع $A_I(\xi)$ ، $A_{II}(\xi)$ و $B_I(\xi)$ به دست می‌آیند که با جایگذاری آن‌ها به ترتیب در روابط (۸)، (۱۳) و (۱۴) تغییرمکان‌ها و تنش‌ها به دست می‌آیند.

حل معادلات انتگرالی دوگانه

در این قسمت معادلات انتگرالی دوگانه (۱۸) به معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم تبدیل می‌شوند. بدین منظور این معادلات به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\int_0^{\infty} \xi^{-1} C(\xi) [1 + H(\xi)] J_0(\xi r) d\xi = \Delta, \quad r \leq a, \quad (19)$$

$$\int_0^{\infty} C(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad r > a.$$

که در آن:

$$C(\xi) = \frac{2\xi(\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2)}{\lambda_1} B_{II}, \quad (20)$$

$$H(\xi) = \frac{(\lambda_1 \varphi_2 - \lambda_2 \varphi_1)}{2\xi^{-1}(\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2)} - 1.$$

معادلات انتگرالی فوق را می‌توان به معادلات زیر تبدیل کرد [۲۰]:

$$\int_0^{\infty} \xi^{-1/2} J_{-1/2}(\xi r) C(\xi) [1 + H(\xi)] d\xi = \frac{r^{-1/2}}{2^{-1/2} \Gamma(1/2)} f(r), \quad r \leq a, \quad (21)$$

$$\int_0^{\infty} \xi^{-1/2} J_{-1/2}(\xi r) C(\xi) d\xi = 0, \quad r > a,$$

که در آن:

$$f(r) = \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{\gamma \Delta}{\sqrt{r^2 - \gamma^2}} d\gamma = \Delta. \quad (22)$$

اگر فرض کنیم:

که در آن q برای $z < 0$ برابر I و برای $z > 0$ برابر II است. با جایگذاری روابط (۱۳) و (۱۴) در روابط (۱۲)_۲ الی (۱۲)_۴، سه معادله جبری به وجود می‌آید:

$$\begin{aligned} \varphi_1(A_I - A_{II}) + \varphi_2(B_I - B_{II}) &= 0, \\ \lambda_1(A_I + A_{II}) + \lambda_2(B_I + B_{II}) &= 0, \\ \eta_1(A_I - A_{II}) + \eta_2(B_I - B_{II}) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن:

$$\begin{cases} \eta_i = (\alpha_3 - \alpha_2)\lambda_i^2 + \xi^2(1 + \alpha_1) - \rho_0 \omega^2, \\ v_i = (\eta_i - \alpha_3 \frac{A_{13}}{A_{33}} \xi^2 - \alpha_3 \lambda_i^2) \lambda_i, \\ \varphi_i = \alpha_3 \lambda_i^2 - \eta_i, \quad i = (1, 2). \end{cases} \quad (16)$$

با توجه به چهار ضریب مجهول و سه معادله موجود، (۱۵) می‌توان سه ضریب مجهول را بر حسب یک ضریب (در اینجا B_{II}) به دست آورد:

$$\frac{A_I}{B_{II}} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \frac{B_I}{B_{II}} = 1, \quad \frac{A_{II}}{B_{II}} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در روابط (۱۳) و (۱۴) و سپس نتیجه آن در روابط (۱۲)_۱ و (۱۲)_۵، داریم:

$$\int_0^{\infty} \xi B_{II} \left[\varphi_1 \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \right) + \varphi_2 \right] J_0(\xi r) d\xi = \Delta, \quad r \leq a, \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} -2\xi B_{II} \left[v_1 \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \right) + v_2 \right] J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad r > a.$$

در رابطه (۱۸) فقط ضریب $B_{II}(\xi)$ تابع $B_{II}(\xi)$ مجهول می‌باشد که با حل همزمان جفت معادلات رابطه (۱۸) تعیین می‌شود. این جفت معادلات به معادلات انتگرالی دوگانه مشهور هستند [۳ و ۲۰]. حل معادلات (۱۸) بسیار مشکل بوده و به همین علت تحقیقات چندانی در این زمینه وجود ندارد. از این بین می‌توان از تحقیقات نوبل [۱۵] و اسنیدون [۳] نام برد. نوبل [۱۵] در مقاله خود دسته‌ای از معادلات انتگرالی دوگانه که شامل توابع بسل هستند را به معادله انتگرالی فردهلم تبدیل کرده‌است. در

عبارت $(1+H(\xi))$ در L ، شرط همگرایی ارضا می‌شود. توجه با این نکته ضروریست که برای برقرار ماندن شرایط اولیه مسئله، طرفین رابطه (۱۹) باید در L ضرب شود. ضریب L به صورت زیر به دست می‌آید:

$$L = \alpha_1 \sqrt{2/(2a + \sqrt{c})} \times \frac{4a^2 - c + \sqrt{2a - \sqrt{c}} \sqrt{(2a + \sqrt{c})^3}}{2(1 + \alpha_1) + \alpha_2 \sqrt{2a - \sqrt{c}} \sqrt{2a + \sqrt{c}}} \quad (28)$$

با جایگذاری معادله (۲۷) و یا (۲۶) در معادله (۲۵) می‌توان تابع مجهول $\theta(r, \omega)$ را با استفاده از روش‌های عددی به دست آورد. بدین منظور معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم (۲۵) به دستگاه معادلات جبری زیر تبدیل می‌شود:

$$K_{ij} \theta_j = f_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

که در آن:

$$K_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{\pi} W_j M(r_i, \gamma_j), \quad (30)$$

$$f_i = \Delta, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

در رابطه (۳۰)، W_j تابع وزن برای تبدیل انتگرال به جمع می‌باشد و n تعداد نقاط انتخابی روی صفحه برای برآورد عددی انتگرال می‌باشد.

حل معادلات انتگرالی دوگانه در حالت استاتیکی

به منظور فهم بهتر مسئله ابتدا این معادلات در حالت استاتیکی یعنی برای حالتی که $\omega \rightarrow 0$ ، به صورت تحلیلی حل می‌شوند. از آنجایی که $\lim_{\omega \rightarrow 0} \lambda_j = s_j$ ، روابط (۱۷) و (۲۰) به صورت زیر در می‌آیند:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{A_1}{B_{II}} = -\frac{s_2}{s_1}, \quad A_1 = A_{II}, \quad B_1 = B_{II},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(\xi) = \frac{1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2}{2s_1 s_2 \alpha_2 (s_1 + s_2)} - 1, \quad (31)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} C(\xi) = 2\xi^4 \alpha_2 s_2 (s_2^2 - s_1^2) B_{II}(\xi).$$

$$\int_0^\infty \xi^{-1/2} C(\xi) J_{-1/2}(r\xi) d\xi = \frac{r^{-1/2}}{2^{-1/2} \Gamma(1/2)} \theta(r, \omega), \quad 0 \leq r < a, \quad (23)$$

به طوری که در رابطه فوق $\theta(r, \omega)$ تابع مجهول بوده و باید تعیین شود. با ترکیب رابطه (۲۱) و (۲۳) و استفاده از قضیه تبدیل معکوس هنکل تابع مجهول $C(\xi)$ به صورت زیر نتیجه می‌شود [۳]:

$$C(\xi) = \frac{\sqrt{2\xi^3}}{\Gamma(1/2)} \int_0^a \gamma^{1/2} \theta(\gamma, \omega) J_{-1/2}(\gamma\xi) d\gamma. \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه (۲۴) در (۲۱)، معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم برای $\theta(r, \omega)$ تشکیل می‌شود [۱۵]:

$$\theta(r, \omega) + \frac{1}{\pi} \int_0^a M(r, \gamma) \theta(\gamma, \omega) d\gamma = f(r), \quad 0 \leq r < a, \quad (25)$$

که در آن:

$$M(r, \gamma) = \pi (r\gamma)^{1/2} \times \int_0^\infty \xi H(\xi) J_{-1/2}(r\xi) J_{-1/2}(\gamma\xi) d\xi, \quad (26)$$

$$0 \leq r, \gamma < a.$$

با جایگذاری $J_{-1/2}(\eta) = \sqrt{2/\pi\eta} \cos(\eta)$ ، رابطه (۲۶) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$M(r, \gamma) = 2 \int_0^\infty H(\xi) \cos(r\xi) \cos(\gamma\xi) d\xi, \quad (27)$$

$$0 \leq r, \gamma < a.$$

شرط اعتبار آنالیز فوق، صرفاً همگرایی انتگرال مربوط به $M(r, \gamma)$ یعنی هسته معادله انتگرالی رابطه (۲۵) می‌باشد؛ لذا حد تابع $H(\xi)$ وقتی $\xi \rightarrow \infty$ باید برابر صفر شود یا به عبارت دیگر $\lim_{\xi \rightarrow \infty} (1 + H(\xi)) = 1$. اما در مسئله مورد بررسی $\lim_{\xi \rightarrow \infty} (1 + H(\xi)) = L^{-1}$ می‌شود که L یک عدد ثابت وابسته به خواص محیط است. با ضرب

$$u(r, z) = \text{Im} \left[\frac{2\alpha_3 s_1 s_2 \Delta}{\pi(1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2)(s_2 - s_1)r} \text{sgn}(z) \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left(P_j - \sqrt{r^2 + P_j^2} \right) \right],$$

$$w(r, z) = \text{Im} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[\frac{2s_k (\alpha_2 s_j^2 - \alpha_1 - 1)\Delta}{\pi(1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2)(s_2 - s_1)} \right. \\ \left. \int_0^{\infty} \frac{e^{-P_j \xi}}{\xi} J_0(\xi r) d\xi \right],$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = \text{Im} \left[\frac{2A_{33} s_1 s_2 \Delta}{\pi(1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2)(s_2 - s_1)} \text{sgn}(z) \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{(1 + \alpha_1 - \alpha_3 A_{13} / A_{33} - \alpha_2 s_j^2)}{\sqrt{r^2 + P_j^2}} \right],$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = \text{Im} \left[\frac{2A_{44} \Delta}{\pi(1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2)(s_2 - s_1)r} \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^2 (-1)^j s_k \left(s_j^2 (\alpha_3 - \alpha_2) + \alpha_1 + 1 \right) \left(1 - \frac{P_j}{\sqrt{r^2 + P_j^2}} \right) \right],$$

$$\sigma_{rr}(r, z) = \text{Im} \left[\frac{-2s_1 s_2 \Delta}{\pi(1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2)(s_2 - s_1)} \right. \\ \left. \times \text{sgn}(z) \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{A_{11} \alpha_3 + A_{13} \alpha_2 s_k^2 - A_{13} (1 + \alpha_1)}{\sqrt{r^2 + P_j^2}} \right. \\ \left. - \frac{(A_{11} - A_{12})}{r} u(r, z), \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, z) = \text{Im} \left[\frac{-2s_1 s_2 \Delta}{\pi(1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2)(s_2 - s_1)} \right. \\ \left. \times \text{sgn}(z) \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{A_{12} \alpha_3 + A_{13} \alpha_2 s_k^2 - A_{13} (1 + \alpha_1)}{\sqrt{r^2 + P_j^2}} \right. \\ \left. + \frac{(A_{11} - A_{12})}{r} u(r, z). \right] \quad (36)$$

و برای $s_1 = s_2 = s$ عبارتند از:

با جایگذاری رابطه (۳۱) در رابطه (۱۹) معادله انتگرالی دوگانه به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_0^{\infty} \xi^{-1} C(\xi) J_0(\xi r) d\xi = \frac{2s_1 s_2 \alpha_2 (s_1 + s_2) \Delta}{1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2}, \quad r \leq a,$$

$$\int_0^{\infty} C(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad r > a. \quad (32)$$

زوج معادلات انتگرالی فوق، یک معادله انتگرالی دوگانه مشهور است که حل آن در بسیاری از مراجع وجود دارد. با حل معادله انتگرالی دوگانه فوق داریم [۲۱]:

$$C(\xi) = \frac{\sqrt{2\xi^3}}{\Gamma(1/2)} \int_0^a \sqrt{r} J_{-1/2}(r\xi) [H\Delta] dr \quad (33)$$

با جایگذاری $J_{-1/2}(r\xi) = \sqrt{2/\pi r \xi} \cos(r\xi)$ در رابطه (۳۲) و حل تحلیلی آن تابع $C(\xi)$ به دست می‌آید:

$$C(\xi) = \frac{4s_1 s_2 \alpha_2 \sin(a\xi)(s_1 + s_2) \Delta}{\pi(1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2)} \quad (34)$$

با جایگذاری رابطه (۳۴) در رابطه (۳۱)_۱ و (۳۱)_۲ توابع مجهول $A_{II}(\xi)$ ، $B_{II}(\xi)$ ، $A_I(\xi)$ ، $B_I(\xi)$ تعیین می‌شوند:

$$B_{II}(\xi) = \frac{2s_1 \sin(a\xi) \Delta}{\pi(1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2)(s_2 - s_1) \xi^4}$$

$$A_{II}(\xi) = \frac{-2s_2 \sin(a\xi) \Delta}{\pi(1 + \alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2)(s_2 - s_1) \xi^4}, \quad (35)$$

$$A_I(\xi) = A_{II}(\xi), \quad B_I(\xi) = B_{II}(\xi).$$

با در اختیار داشتن این توابع، تابع پتانسیل F_q^0 معلوم بوده و از آن توابع تغییرمکان و تنش به ترتیب با استفاده از (۱۳) و (۱۴) به دست می‌آیند. این توابع برای $s_1 \neq s_2$ به صورت زیر بوده:

$$P_j = s_j z \operatorname{sgn}(z) - ia, \quad (j=1,2),$$

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} -1 & z < 0, \\ 0 & z = 0, \\ 1 & z > 0, \end{cases} \quad (38)$$

$$P = s z \operatorname{sgn}(z) - ia.$$

با توجه به رابطه (۱۲) تابع پرش تنش به صورت زیر می‌باشد:

$$R(r) = \frac{4A_{33}s_1s_2\alpha_2(s_1+s_2)\Delta}{\pi(1+\alpha_1+s_1s_2\alpha_2)\sqrt{a^2-r^2}}, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (39)$$

با توجه به رابطه (۳۹) سختی قائم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_{zz} = \frac{2\pi}{aA_{66}\Delta} \int_0^a rR(r)dr = \frac{8A_{33}A_{44}s_1s_2(s_1+s_2)}{A_{66}(A_{11}+A_{44}s_1s_2)}, \quad (40)$$

با استفاده از روابط (۳۷)، (۳۹) و (۴۰) می‌توان توابع تغییر مکان، تنش و سختی قائم را برای محیط همسانگرد جانبی به دست آورد. برای محیط همسانگرد در روابط (۳۷) $s=1$ و در روابط (۳۹) و (۴۰)، $s_1=s_2=1$ می‌باشد. با استفاده از ضرایب ارتجاعی محیط همسانگرد داریم:

$$u^{Iso}(r, z) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{2z\Delta}{\pi(3-4\nu)r} \left[1 - \frac{P_{Iso}}{\sqrt{r^2 + P_{Iso}^2}} \right] \right\},$$

$$w^{Iso}(r, z) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{2\Delta}{\pi} \left[\frac{z \operatorname{sgn}(z)}{(3-4\nu)\sqrt{r^2 + P_{Iso}^2}} + \int_0^\infty \frac{e^{-P_{Iso}\xi}}{\xi} J_0(\xi r) d\xi \right] \right\},$$

$$u(r, z) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{2\alpha_3 s^2 z \Delta}{\pi(1+\alpha_1+\alpha_2 s^2)r} \left[1 - \frac{P}{\sqrt{r^2 + P^2}} \right] \right\}$$

$$w(r, z) = \operatorname{Im} \left[\frac{2(1+\alpha_1-\alpha_2 s^2)s z \Delta}{\pi(1+\alpha_1+\alpha_2 s^2)\sqrt{r^2 + P^2}} \operatorname{sgn}(z) + \frac{2\Delta}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-P\xi}}{\xi} J_0(\xi r) d\xi \right],$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{2A_{33}s^2\Delta}{\pi(1+\alpha_1+\alpha_2 s^2)\sqrt{r^2 + P^2}} \left[\frac{(\alpha_2 s^2 + \alpha_3 \frac{A_{13}}{A_{33}} - \alpha_1 - 1)zP}{(r^2 + P^2)} - 2\alpha_2 s \operatorname{sgn}(z) \right] \right\},$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{-2A_{44}\Delta}{\pi(1+\alpha_1+\alpha_2 s^2)} \left[\frac{1+\alpha_1-s^2(\alpha_3-\alpha_2)}{r} \left(1 - \frac{P}{\sqrt{r^2 + P^2}} \right) + \frac{1+\alpha_1+s^2(\alpha_3-\alpha_2)}{(r^2 + P^2)^{3/2}} z s r \operatorname{sgn}(z) \right] \right\},$$

$$\sigma_{rr}(r, z) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{-2s^2\Delta}{\pi(1+\alpha_1+\alpha_2 s^2)} \left[\frac{2A_{13}\alpha_2 s_2}{\sqrt{r^2 + P^2}} \operatorname{sgn}(z) + \frac{A_{13}(1+\alpha_1-\alpha_2 s_2^2) - A_{11}\alpha_3}{(r^2 + P^2)^{3/2}} Pz + \frac{(A_{11}-A_{12})\alpha_3 z}{r^2} \left(1 - \frac{P}{\sqrt{r^2 + P^2}} \right) \right] \right\},$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, z) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{-2s^2\Delta}{\pi(1+\alpha_1+\alpha_2 s^2)} \left[\frac{2A_{13}\alpha_2 s_2}{\sqrt{r^2 + P^2}} \operatorname{sgn}(z) + \frac{A_{13}(1+\alpha_1-\alpha_2 s_2^2) - A_{12}\alpha_3}{(r^2 + P^2)^{3/2}} Pz - \frac{(A_{11}-A_{12})\alpha_3 z}{r^2} \left(1 - \frac{P}{\sqrt{r^2 + P^2}} \right) \right] \right\}, \quad (37)$$

که در آن برای $j=1$ مقدار k برابر ۲ و برای $j=2$ مقدار k برابر ۱ بوده و:

برآورد عددی

در این قسمت نتایج به دست آمده در بخش‌های قبلی به صورت عددی برآورد شده و به صورت گرافیکی نشان داده می‌شود. بدین منظور ۳ نوع ماده مطابق جدول (۱) در نظر گرفته می‌شود به طوری که یکی از آن‌ها همسانگرد و بقیه همسانگرد جانبی با ناهمسانگردی متفاوت می‌باشند. برای نمایش گرافیکی کلیه توابع به صورت بی‌بعد در می‌آیند. به عنوان مثال تغییرمکان قائم با بی‌بعد شده و تنش قائم با متوسط تنش قائم در حالت استاتیکی بی‌بعد می‌گردد. فرکانس تحریک نیز به صورت $\omega_0 = a\omega\sqrt{\rho/A_{44}}$ بی‌بعد می‌شود. شکل (۲) و (۳) تغییرات تنش قائم یا تابع پرش تنش را بر حسب فاصله افقی بی‌بعد، r/a ، و ارتفاع بی‌بعد، z/a ، نشان می‌دهد. این توابع با استفاده از روابط (۴۱) و (۴۲) رسم شده و همانطور که مشاهده می‌شود، شرایط پیوستگی و شرط تشعشع به صورت ایده‌آل ارضاء شده‌است. تابع پرش تنش در محیط تماس با صفحه صلب و در لبه آن به صورت $\sqrt{1-(r/a)^2}$ تکین می‌باشد و در $r/a=1$ نامتناهی می‌باشد. شکل (۴) تغییرات تابع پرش تنش در حالت دینامیکی برای $\omega_0=3.0$ را نشان می‌دهد. نوع تکینگی این تابع همانند حالت استاتیکی می‌باشد و تابع در لبه صفحه صلب نامتناهی است. شرایط تابع در خارج از صفحه صلب نیز به خوبی ارضاء شده‌است. شکل (۵) تابع تغییرمکان قائم را برحسب z/a نشان می‌دهد. ارضاء شرط تشعشع نیز به خوبی قابل مشاهده است. در ضمن اثر میزان ناهمسانگردی در مقایسه با جواب همسانگرد دیده می‌شود. در شکل (۶) تابع نرمی (عکس تابع سختی) برای محیط همسانگرد (ماده شماره I) برحسب فرکانس بی‌بعد رسم شده‌است. تابع نرمی در این شکل با تابع مشابه در حالت استاتیکی بی‌بعد شده‌است. همان‌طور که در رابطه (۴۲) دیده می‌شود، قسمت حقیقی و بی‌بعد تابع نرمی در $\omega_0=0$ برابر $C_{vv} = 1/K_{vv} = (3-4\nu)/32(1-\nu)$ بوده و قسمت موهومی آن صفر است. در این شکل تابع جواب با جواب پک و گوپرت [۵] مقایسه شده و انطباق عالی بین نتایج مشاهده می‌شود. تابع سختی نیز در شکل (۷) برحسب فرکانس بی‌بعد رسم شده‌است و مشاهده می‌شود که با تقریب مناسب می‌توان این تابع را با توابع خطی جایگزین نمود.

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{Iso}(r, z) &= \text{Im} \left\{ \frac{-8\mu(1-\nu)\Delta}{\pi(3-4\nu)\sqrt{r^2 + P_{Iso}^2}} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\text{sgn}(z) + \frac{z P_{Iso}}{2(1-\nu)(r^2 + P_{Iso}^2)} \right] \right\}, \\ \sigma_{rz}^{Iso}(r, z) &= \text{Im} \left\{ \frac{-4\mu(1-2\nu)\Delta}{\pi(3-4\nu)} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{P_{Iso}}{\sqrt{r^2 + P_{Iso}^2}} \right) + \frac{z r \text{sgn}(z)}{(1-2\nu)(r^2 + P_{Iso}^2)^{3/2}} \right] \right\}, \\ \sigma_{rr}^{Iso}(r, z) &= \text{Im} \left\{ \frac{-4\mu\Delta}{\pi(3-4\nu)} \left[\frac{2\nu}{\sqrt{r^2 + P_{Iso}^2}} \text{sgn}(z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{z P_{Iso}}{(r^2 + P_{Iso}^2)^{3/2}} + \frac{z}{r^2} \left(1 - \frac{P_{Iso}}{\sqrt{r^2 + P_{Iso}^2}} \right) \right] \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{Iso}(r, z) &= \text{Im} \left\{ \frac{-4\mu\Delta}{\pi(3-4\nu)} \left[\frac{2\nu}{\sqrt{r^2 + P_{Iso}^2}} \text{sgn}(z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{z}{r^2} \left(1 - \frac{P_{Iso}}{\sqrt{r^2 + P_{Iso}^2}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (41)$$

9

$$\begin{aligned} P_{Iso} &= z \text{sgn}(z) - ia, \\ R^{Iso}(r) &= \frac{16\mu(1-\nu)\Delta}{\pi(3-4\nu)\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (42) \\ K_{zz}^{Iso} &= \frac{32(1-\nu)}{(3-4\nu)}. \end{aligned}$$

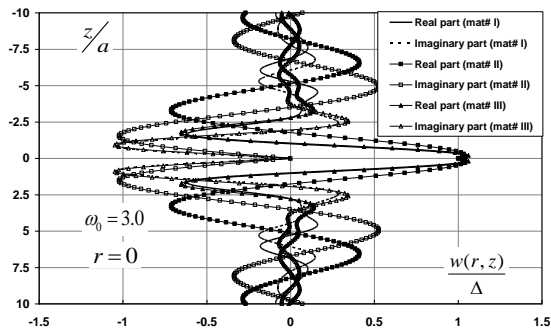
به ازای $z=0$ تابع تغییرمکان قائم در روابط (۳۶)، (۳۷) و (۴۱) به شکل ساده‌تر زیر تبدیل می‌شود:

$$w(r, z=0) = \begin{cases} \Delta & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{2\Delta}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) & r > a. \end{cases} \quad (43)$$

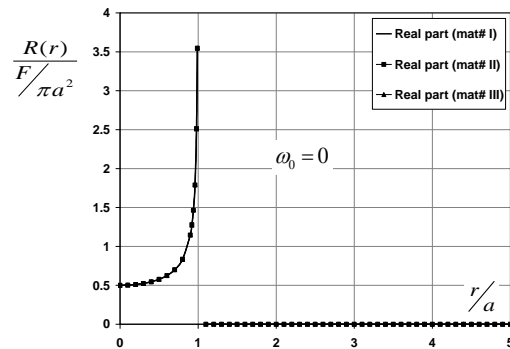
همانطور که مشاهده می‌شود تغییر مکان قائم مستقل از خواص محیط می‌باشد.

جدول ۱: خصوصیات مکانیکی مصالح مختلف ($\times 10^4 N/mm^2$)

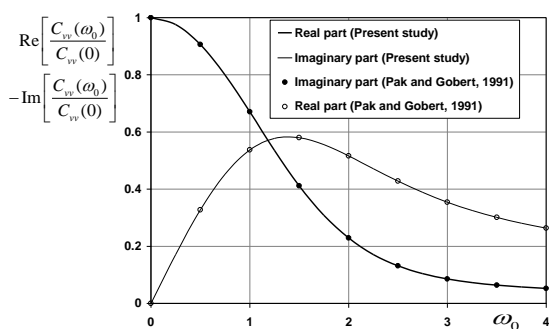
Material	A_{11}	A_{33}	A_{66}	A_{44}	A_{13}	A_{12}
I (Isotropic)	6	6	2	2	2	2
II (T.L.)	5.5	15.9	2	2	1.8	1.5
III (T.L.)	14	7.5	4	2	5	6



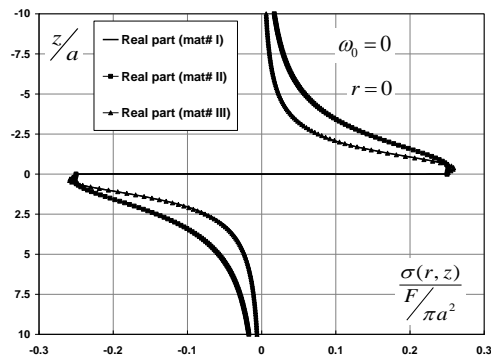
شکل ۵: تغییرات تابع تغییر مکان قائم بر حسب Z برای $\omega_0 = 3.0$



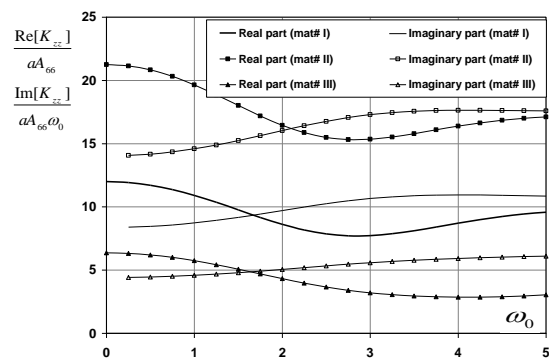
شکل ۲: تغییرات تابع پخش تنش در $z=0$ بر حسب فاصله افقی در حالت استاتیکی



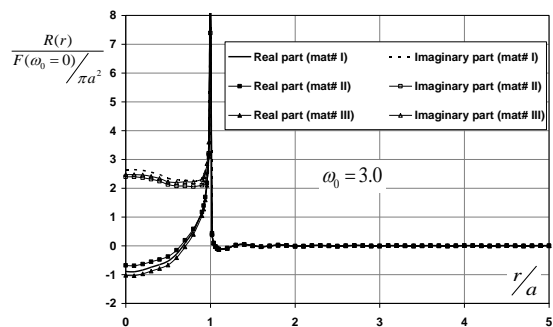
شکل ۶: تغییرات تابع نرمی بر حسب فرکانس بی بعد



شکل ۳: تغییرات تنش قائم بر حسب Z در حالت استاتیکی



شکل ۷: تغییرات تابع سختی بر حسب فرکانس بی بعد



شکل ۴: تغییرات تابع پخش تنش بر حسب فاصله افقی برای $\omega_0 = 3.0$

نتیجه گیری

در این مقاله، تحلیل یک صفحه صلب دایره‌ای با یک فضای کامل همسانگرد جانبی مورد بررسی قرار گرفته‌است. صفحه مورد نظر در یک محل دلخواه از یک فضای کامل همسانگرد جانبی طوری قرار گرفته که بردار عمود بر صفحه در امتداد محور همسانگردی محیط بوده و تحت تحریک در امتداد عمود بر صفحه قرار دارد. با توجه

مشاهده شده‌است که ضریب A_{33} بیشترین تأثیر را در اندازه تابع سختی در امتداد قائم دارد.

تشکر و قدردانی

در انجام این تحقیقات از حمایت مالی دانشگاه تهران در قالب طرح پژوهشی شماره ۲۷۸۴۰/۱/۰۳ کمال تشکر و قدردانی می‌گردد.

به شرایط مسئله، معادلات حاکم بر توابع مجهول مسئله به صورت معادلات انتگرالی دوگانه تبدیل می‌شوند که در اینجا با استفاده از روش پیشنهادی نوبل به معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم تبدیل شده‌است. این معادله انتگرالی در حالت استاتیکی به صورت تحلیلی حل شده‌است که به صورت مرجع برای مقایسه با نتایج حالت‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد. رفتار تابع پرش تنش در لبه صفحه به صورت تکین (سینگولار) بوده و نتایج به خوبی این رفتار را نشان می‌دهد. همچنین

مراجع

1. Reissner, E. and Sagoci, H. F. (1944). "Forced torsional oscillations of an elastic half-space." *I. J. Appl. Phys.* **15** (9), pp 652-654.
2. Sneddon, I. N. (1951). *Fourier transforms*. McGraw-Hill, New York, N. Y.
3. Sneddon, I. N. (1966b). *Mixed boundary value problems in potential theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
4. Robertson, I. A. (1966). "Forced vertical vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite elastic solid." *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **62** A, 547-553.
5. Pak, R. Y. S. and Gobert, A. T. (1991). "Forced vertical vibration of rigid discs with an arbitrary embedment." *Journal of Engineering Mechanics*, **117**, No. 11, pp. 2527-2548.
6. Pak, R. Y. S. and Ashlock, J. C. (2007). "Method of adaptive-gradient elements for computational mechanics." *Journal of Engineering Mechanics*, **133**, No. 1, pp. 87-97.
7. Michell, J. H. (1900). "The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary." *Proceeding of the London mathematical society*, **32**, pp 247-258.
8. Luco, J. E. and Mita, A. (1987). "Response of a circular foundation on a uniform half- space to elastic waves." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **15**, pp 105-118.
9. Rahimian, M. and Eskandari-Ghadi, M. (2001). *Theory of Elasticity*. Tehran University Press. In Persian.
10. Eskandari-Ghadi, M. and Pak, R.Y.S. (2008), *Elastodynamics and Elastostatics by a Unified Method of Potentials for x3-Convex Domains*, *Journal of Elasticity*, DOI 10.1007/s10659-008-9156-2.
11. Elliott, H. A. (1948). "Three dimensional stress distribution in hexagonal aeolotropic crystals." *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **44**, 522-533.
12. Lekhnitskii, S. G. (1981). *Theory of anisotropic elastic bodies*. Holden-Day Publishing Mir Publication.
13. Wang, M. Z. and Wang, W. (1995). "Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity." *International Journal of Solids and Structures*, **32** (374) 501-513.
14. Eskandari-Ghadi, M. (2005). "A complete solutions of the wave equations for transversely isotropic media." *J. of Elasticity*, **81**, 1-19.
15. Noble, B. (1963). "The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method." *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **59**, pp 351-371.

16. Eskandari-Ghadi, M. (2007). "Potential method for transversely isotropic media with axissymmetry." *Journal of Faculty of Engineering*, Vol. 41, No. 6, PP. 675-681 (in Persian).
17. Ardeshir-Behrestaghi, A. and Eskandari-Ghadi, M. (2009). "Two layers transversely isotropic full-space affected by lateral surface load in frequency domain." *Journal of Faculty of Engineering*, Vol. 43, No. 4, PP. 335-347 (in Persian).
18. Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y. S., and Ardeshir-Behrestaghi, A. (2008). "Transversely isotropic elastodynamic solution of a finite layer on an infinite subgrade under surface loads." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 28 (12), pp 986-1003.
19. Rahimian, M., Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y. S. and Khojasteh, A. (2007). "An elastodynamic potential method for a transversely isotropic solid." ASCE, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 133 (10) 1134-1145.
20. Mandal, B. N. and Mandal, N. (1999). *Advances in dual integral equations*, CHAMPMAN & HALL/CRS.
21. Erdelyi, A. and Sneddon, I. N. (1962). "Fractional integral equation and dual integral equations." *Can. J. Math*, 14, page 685-693.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1. Singular
2. Potential Functions
3. Isotropic
4. Lamé
5. Love
6. Business
7. Neuber-Papkovich
8. Galerkin
9. Transversely isotropic
10. Hu-Nowacki-Lekhnitskii
11. Dual integral equations
12. Integral Transform
13. Fredholm integral equation of 2nd kind
14. Radiation condition
15. Fredholm integral equation of 2nd kind
16. Rigid circular plate
17. Stress tensor
18. Strain tensor
19. Hankel transform
20. Multi value function
21. Branch cut
22. Branch point