

اندازه‌گیری پدیده شلاقی در زنجیره تأمین سه مرحله‌ای با بیش از یک محصول

لیلا نظری¹ و عبدالله آقایی²

¹ کارشناس ارشد و هیأت علمی دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهر

² استاد دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت 90/5/12، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده 90/6/24، تاریخ تصویب 91/1/19)

چکیده

مدیریت زنجیره تأمین، یکی از عوامل اصلی موفقیت سازمان‌ها است که یکی از مهم‌ترین دلایل ناکارایی آن، پدیده اثر شلاقی است. بیشتر مطالعات انجام‌شده درباره اندازه‌گیری آن روی زنجیره‌های تک‌محصولی و دومرحله‌ای بوده است. در این مقاله سعی شده است تا به اندازه‌گیری آن در شبکه‌های دو و سه مرحله‌ای با بیش از یک محصول و با تقاضای همبسته و تعیین پارامترهای مؤثر بر آن و ارائه راهکارهایی برای کاهش آن، پرداخته شود. در این راستا از مدل سری‌های زمانی برای بررسی الگوی تقاضا در زنجیره‌های تأمین با فرضیه‌های موردنظر و برای پیش‌بینی مصرف دوره پیش‌زمان از روش میانگین متحرک استفاده شده است. برای اثبات درستی مدل، عملکرد مدل با نتایج حاصل از واقعیت و شبیه‌سازی مقایسه شده که نشان‌دهنده نزدیکی عملکرد آنها به یکدیگر است. در نهایت اینکه نتایج حاصل از این مدل‌سازی، نشان‌دهنده کاهش اثر شلاقی در اثر کاهش پیش‌زمان و تعیین بهینه تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی است.

واژه‌های کلیدی: مدیریت زنجیره تأمین، سری‌های زمانی، اندازه‌گیری پدیده شلاقی، زنجیره‌های تأمین سه‌مرحله‌ای با دو محصول

مقدمه

همکاران [6]، گیلبرت [7]، تاول و همکاران [8]، هیا و همکاران [9]، گالمن و دیزنی [10]، گالمن و دیزنی [11]، لانگ و فین [12]، دیزنی و تاول [13]، هوسودا و دیزنی [14]، پاچان [15]، کریشنمورسی و همکاران [16]، چاندر و گرابیس [17]، دیزنی و گرابستروم [18]، دیزنی و تاول [19]، زو و همکاران [20]، کلپوریس و همکاران [21]، کلجن و همکاران [22]، داهری و چاپچوب [23]، سو و وانگ [24]، چن و لی [25]، چن و لی [26] اشاره کرد. در این مقاله سعی شده است تا در راستای کاهش محدودیت‌ها، به اندازه‌گیری اثر پدیده شلاقی در زنجیره‌های تأمین سه‌مرحله‌ای با بیش از یک محصول پرداخته شود.

تعریف و مدل‌سازی

اثر شلاقی از نظر آماری به صورت نسبت واریانس سفارش‌ها به واریانس تقاضا تعریف می‌شود:

$$BE = \frac{Var(Q_t)}{Var(D)} \quad (1)$$

با توجه به اهمیت مدیریت زنجیره تأمین و پدیده اثر شلاقی¹، اقدامات بسیاری برای کمتی کردن تأثیر این پدیده انجام شده است که می‌توان آنها را در سه گروه زیر طبقه‌بندی کرد:

- 1- کمتی کردن تأثیر پدیده شلاقی به صورت ریاضی.
- 2- آزمایش چگونگی تأثیرپذیری آن از پیش‌بینی تقاضا، زمان تحویل و سایر موارد.
- 3- اندازه‌گیری تأثیر بعضی تعامل‌ها روی آن، نظیر تسهیم اطلاعات تقاضای مشتری و ظرفیت تأمین-کنندگان.

نخستین مطالعه در زمینه کمتی‌سازی اثر شلاقی، توسط چن و همکاران [1] انجام شد. آنها اثر شلاقی را به صورت نسبت واریانس سفارش‌های خرده‌فروش به واریانس تقاضایی که خرده‌فروش با آن مواجه است تعریف کردند. تحقیقات بعدی انجام‌شده نیز از همین نسبت برای اندازه‌گیری میزان پدیده استفاده کردند. از آن جمله می‌توان به تحقیقات ژانگ و وانگ [2]، ماکویی و مددی [3]، کیم و همکاران [4]، جاکسیک و راسجان [5]، داک و

سری‌های زمانی، ابزار مناسبی برای مدل کردن تقاضا در دوره‌های مختلف است و در نتیجه در این مقاله نیز از این مدل‌ها برای تعیین الگوی مفروض تقاضا استفاده شده است. **سیاست سفارش‌گذاری:** برای سفارش‌گذاری محصول دو روش اصلی وجود دارد: روش دوره سفارش⁴ و روش نقطه سفارش⁵. در این مقاله فرض می‌شود خرده‌فروش از سیاست سفارش‌گذاری تا حد معین که مبتنی بر دوره سفارش است استفاده می‌کند. این روش سفارش‌گذاری یک روش استاندارد در بسیاری از سیستم‌های تولیدی است.

روش پیش‌بینی: پیش‌بینی تقاضا در دوره پیش‌زمان، در ردیف مهم‌ترین عوامل بروز اثر شلاقی است. پیش‌بینی در سفارش‌ها تغییر ایجاد می‌کند و منجر به بروز اثر شلاقی می‌شود. اغلب روش میانگین متحرک، برای پیش‌بینی تقاضا در دوره پیش‌زمان، در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعداد مراحل: در این مقاله یک زنجیره تأمین سه مرحله‌ای در نظر گرفته شده است.

در ادامه مقاله با توجه به فرضیه‌ها، به تعیین واریانس تقاضا و سفارش برای اندازه‌گیری پدیده شلاقی پرداخته خواهد شد.

تعیین واریانس تقاضا

با توجه به ارتباط تعریف شده بین محصولات، مدل سری زمانی⁶ VAR(1) به عنوان الگوی تقاضای بازار در نظر گرفته شده است. این مدل، الگوی مناسبی برای مدل‌سازی تقاضا در زنجیره‌های چندمحصولی است. الگوی برداری اتورگرسیو مرتبه اول به صورت زیر است:

$$D_t = \phi_1 D_{t-1} + a_t \quad (2)$$

که در این رابطه:

D_t : یک بردار $(m \times 1)$ شامل متغیرها

ϕ_1 : بردار ضرایب $(m \times m)$

a_t : بردار خطا $(m \times 1)$ با میانگین صفر و واریانس برداری Σ

(مؤلفه‌های بردار a_t : a_t^1, a_t^2 و متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع (i.i.d) با میانگین صفر و واریانس σ_{11} و σ_{22} هستند)

در صورتی که مقدار رابطه ذکر شده کوچک‌تر یا برابر 1 باشد، اثر شلاقی از زنجیره تأمین حذف می‌شود و این اتفاق هنگامی رخ می‌دهد که نوسان‌های تقاضا و سفارش، به یکدیگر نزدیک باشد. این مقاله به ارائه راه‌حلی برای اندازه‌گیری واریانس تقاضا و سفارش مشتریان برای دو محصول همبسته در یک زنجیره تأمین سه‌مرحله‌ای خواهد پرداخت که طبق بررسی‌های انجام‌شده تا کنون، به آنها پرداخته نشده است.

فرضیه‌ها

مقاله، چارچوبی به شرح زیر را برای تحقیق در نظر گرفته است:

رویکرد: مطالعات درباره اندازه‌گیری اثر شلاقی بر دو رویکرد اساسی مبتنی بوده است: رویکرد آماری² و رویکرد تبدیل³ Z، که هر دو رویکرد، روابط یکسان برای اثر شلاقی به دست می‌دهند. در این مقاله، روابط لازم برای اندازه‌گیری اثر شلاقی بر اساس رویکرد آماری به دست آمده است.

تعداد محصولات: تحقیقات انجام‌گرفته در حوزه اثر شلاقی، اغلب مدل محدود تک محصولی را در نظر گرفته‌اند. ویژگی بارز این مقاله مطالعه و بررسی اثر شلاقی در زنجیره‌های تأمین با بیش از یک محصول است.

الگوی تقاضای محصولات: در زنجیره‌های تأمین واقعی چندمحصولی، شرایطی وجود دارد که تقاضای محصولات به هم مرتبط هستند. در این مقاله فرض می‌کنیم محصولات مورد نظر مستقل نبوده و بین تقاضای دو محصول (D_1, D_2) ارتباط وجود دارد؛ به این ترتیب که تقاضای محصول 1 در هر دوره به تقاضای همان محصول در دوره قبل و نیز تقاضای محصول 2 در دوره قبل بستگی دارد. وابستگی تقاضای محصول 2 با محصول 1 نیز به همین شکل مطرح است. بررسی فعالیت‌های انجام‌شده درباره اثر شلاقی و الگوی در نظر گرفته شده برای تقاضا، نشان می‌دهد که در بخش عمده‌ای از تحقیقات انجام‌گرفته، مدل‌های سری‌های زمانی به عنوان مدل تقاضا در نظر گرفته شده است. مهم‌ترین دلیل آن وجود همبستگی در تقاضای محصول در دوره‌های زمانی متوالی بوده که بر رفتار تقاضای محصول در دنیای واقعی نیز انطباق بیشتری نسبت به مدل‌های غیرهمبسته دارد. از این رو مدل‌های

$$\Gamma(1) = \Gamma(0)\phi'_1$$

و در نتیجه:

$$\phi_1 = \Gamma'(1)\Gamma^{-1}(0)$$

$$\Sigma = \Gamma(0) - \Gamma(-1)\Gamma^{-1}(0)\Gamma(1) = \Gamma(0) - \Gamma'(1)\Gamma^{-1}(0)\Gamma(1)$$

چنانچه در معادله بالا ماتریس‌های ϕ_1 و Σ معلوم

باشند و با در نظر گرفتن دو سری زمانی، می‌توان $\Gamma(0)$ را

به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}^2\gamma_{11} + 2\phi_{11}\phi_{12}\gamma_{12} + \phi_{12}^2\gamma_{22} & \phi_{11}\phi_{21}\gamma_{11} + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21})\gamma_{12} + \phi_{12}\phi_{22}\gamma_{22} \\ \phi_{11}\phi_{21}\gamma_{11} + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21})\gamma_{12} + \phi_{12}\phi_{22}\gamma_{22} & \phi_{21}^2\gamma_{11} + 2\phi_{21}\phi_{22}\gamma_{12} + \phi_{22}^2\gamma_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \phi_{11}^2 & -2\phi_{11}\phi_{12} & -\phi_{12}^2 \\ -\phi_{11}\phi_{21} & 1 - \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} & -\phi_{12}\phi_{22} \\ -\phi_{21}^2 & -2\phi_{21}\phi_{22} & 1 - \phi_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \phi_{11}^2 & -2\phi_{11}\phi_{12} & -\phi_{12}^2 \\ -\phi_{11}\phi_{21} & 1 - \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} & -\phi_{12}\phi_{22} \\ -\phi_{21}^2 & -2\phi_{21}\phi_{22} & 1 - \phi_{22}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

با فرض:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \phi_{11}^2 & -2\phi_{11}\phi_{12} & -\phi_{12}^2 \\ -\phi_{11}\phi_{21} & 1 - \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} & -\phi_{12}\phi_{22} \\ -\phi_{21}^2 & -2\phi_{21}\phi_{22} & 1 - \phi_{22}^2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از قوانین ماتریس‌ها، خواهیم داشت:

$$|A(A^{-1})| = \begin{bmatrix} (1 - \phi_{11}\phi_{22})(1 - \phi_{22}^2) - \phi_{12}\phi_{21}(1 + \phi_{22}^2) & 2\phi_{12}(\phi_{11}(1 - \phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}) \\ \phi_{21}(\phi_{11}(1 - \phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}) & (1 - \phi_{11}^2)(1 - \phi_{22}^2) - \phi_{12}^2\phi_{21}^2 \\ \phi_{21}^2(1 + \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}) & 2\phi_{21}(\phi_{22}(1 - \phi_{11}^2) + \phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{12}^2(1 - \phi_{12}\phi_{22} + \phi_{11}\phi_{22}) \\ \phi_{12}(\phi_{22}(1 - \phi_{11}^2) + \phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}) \\ (1 - \phi_{11}\phi_{22})(1 - \phi_{11}^2) - \phi_{12}\phi_{21}(1 + \phi_{11}^2) \end{bmatrix}$$

همچنین درمیان A به صورت زیر خواهد بود:

$$|A| = 1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12}\phi_{21} - \phi_{11}\phi_{22})^3$$

$$\gamma_{11} = \frac{\left(\sigma_{11}((1 - \phi_{11}\phi_{22})(1 - \phi_{22}^2) - \phi_{12}\phi_{21}(1 + \phi_{22}^2)) + 2\phi_{12}\sigma_{12}(\phi_{11}(1 - \phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}) + \phi_{12}^2\sigma_{22}(1 - \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}\phi_{22}) \right)}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12}\phi_{21} - \phi_{11}\phi_{22})^3}$$

(5)

$$\gamma_{12} = \frac{\left(\phi_{21}\sigma_{11}[\phi_{11}(1 - \phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}] + \sigma_{12}[(1 - \phi_{11}^2)(1 - \phi_{22}^2) - \phi_{12}^2\phi_{21}^2] + \phi_{12}\sigma_{22}[\phi_{22}(1 - \phi_{11}^2) + \phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}] \right)}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12}\phi_{21} - \phi_{11}\phi_{22})^3}$$

کواریانس بین a_t^1 و a_t^2 نیز با σ_{12} و ماتریس بردار واریانس تقاضا (m^*m) با تأخیر زمانی k نیز با $\Gamma(k)$ نشان داده می‌شود. فرض می‌کنیم زنجیره دو محصول دارد ($m=2$); در این صورت اگر تقاضا و خطا محصول i در دوره t با نماد D_t^i و a_t^i نشان داده شود خواهیم داشت:

$$D_t = \begin{bmatrix} D_t^1 \\ D_t^2 \end{bmatrix}$$

$$a_t = \begin{bmatrix} a_t^1 \\ a_t^2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

و بنابراین در فرآیند اتورگرسیو برداری مرتبه اول تقاضای دو محصول به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} D_t^1 \\ D_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{t-1}^1 \\ D_{t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_t^1 \\ a_t^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{cases} D_t^1 = \phi_{11}D_{t-1}^1 + \phi_{12}D_{t-1}^2 + a_t^1 \\ D_t^2 = \phi_{21}D_{t-1}^1 + \phi_{22}D_{t-1}^2 + a_t^2 \end{cases}$$

در این فرآیند اگر داشته باشیم:

$$\left| \frac{(\phi_{11} + \phi_{22}) \pm \sqrt{(\phi_{11} - \phi_{22})^2 + 4\phi_{12}\phi_{21}}}{2} \right| < 1 \quad (4)$$

فرآیند اتورگرسیو برداری مرتبه اول، ایستا خواهد بود و در این صورت در مورد واریانس تقاضا رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \text{Var}(D_t^1) = \text{Var}(D_{t-1}^1) = \text{Var}(D_{t-2}^1) = \dots = \gamma_{11} \\ \text{Var}(D_t^2) = \text{Var}(D_{t-1}^2) = \text{Var}(D_{t-2}^2) = \dots = \gamma_{22} \end{cases}$$

برای تعیین واریانس تقاضای هر یک از محصولات، تابع ماتریس کوواریانس برای الگوی اتورگرسیو برداری مرتبه اول با تأخیر زمانی k را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Gamma(k) = E[D_{t-k}D_t'] = E[D_{t-k}(\phi_1 D_{t-1} + a_t)'] = E[D_{t-k}D_{t-1}'\phi_1' + D_{t-k}a_t']$$

$$= \begin{cases} \Gamma(-1)\phi_1' + \Sigma & k=0 \\ \Gamma(k-1)\phi_1' = \Gamma(0)(\phi_1')^k & k \geq 1 \end{cases}$$

که در آن داریم:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad \Gamma(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت که برای $k \geq 1$ داریم:

$$E(D_{t-k}a_t') = 0$$

و به ازای $k=1$ خواهیم داشت:

(6)

$$\gamma_{22} = \frac{\left(\phi_{21}^2 \sigma_{11} [1 + \phi_{11} \phi_{22} - \phi_{12} \phi_{21}] + 2 \phi_{21} \sigma_{22} [\phi_{22} (1 - \phi_{11}^2) + \phi_{11} \phi_{12} \phi_{21}] \right)}{1 + (\phi_{11} \phi_{22} - \phi_{12} \phi_{21} - 1)(\phi_{11} \phi_{22} + \phi_{12} \phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12} \phi_{21} - \phi_{11} \phi_{22})^2}$$

(7)

γ_{12} و γ_{22} واریانس تقاضای محصولات 1 و 2 و γ_{11} کوواریانس بین تقاضای دو محصول است.

واریانس سفارش

طبق فرمول (1) برای محاسبه مقدار اثر شلاقی نیاز به محاسبه واریانس سفارش داریم. با توجه به اینکه واریانس سفارش با توجه به روش سفارش گذاری و روش های پیش-بینی تعیین می شود، در ادامه به این دو موضوع پرداخته خواهد شد.

سیاست سفارش گذاری: سیاست سفارش گذاری خرده-فروش، روش سفارش گذاری تا حد معین⁷ است؛ به این ترتیب که در ابتدای هر دوره t سطح موجودی کنترل می-شود و سفارشی به اندازه Q_t در نظر گرفته می شود تا سطح موجودی را به میزان S_t برساند. پس از سفارش گذاری کالا تقاضای مشتری به میزان D_t رخ می دهد. این توالی به رابطه زیر منجر می شود:

$$Q_t = S_t - S_{t-1} + D_{t-1} \quad (8)$$

که در آن:

$$S_t = \hat{D}_t^L + z \hat{\sigma}_t^L \quad (9)$$

در این رابطه، D برآورد تقاضای لیدتایم و σ برآورد انحراف معیار خطای پیش بینی تقاضای دوره پیش زمان است. مقدار z نیز با توجه به سطح سرویس دهی به مشتری از جدول نرمال استاندارد به دست می آید. اگر هزینه نگهداری و کمبود کالا محسوس باشد، z از رابطه زیر به دست می آید:

$$z = \phi^{-1} \left(\frac{b}{h+b} \right)$$

که در آن، z تابع توزیع نرمال، h هزینه نگهداری و b هزینه کمبود واحد محصول در هر دوره است. با ادغام رابطه های ذکر شده مقدار سفارش به این صورت به دست می آید:

$$Q_t = (\hat{D}_t^L + z \hat{\sigma}_t^L) - (\hat{D}_{t-1}^L + z \hat{\sigma}_{t-1}^L) + D_{t-1}$$

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + z(\hat{\sigma}_t^L - \hat{\sigma}_{t-1}^L) + D_{t-1} \quad (10)$$

روش پیش بینی تقاضا: طبق رابطه بالا، برای داشتن واریانس تقاضا به برآورد تقاضا و انحراف معیار خطای پیش بینی در دوره پیش زمان نیاز است. طبق مفروضات زنجیره تأمین مورد نظر، خرده فروش، تقاضای دوره پیش-زمان را بر اساس روش میانگین متحرک پیش بینی می کند.

پیش بینی به روش میانگین متحرک: در صورتی که خرده فروش برای پیش بینی تقاضای محصول برای دوره t، از داده های مربوط به تقاضا در P دوره آخر استفاده کند، خواهیم داشت:

$$\hat{D}_t = \frac{\sum_{i=1}^p D_{t-i}}{p} \quad (11)$$

در نتیجه اگر طول دوره پیش زمان ثابت و برابر با L باشد، برآورد تقاضا در این دوره به این ترتیب به دست می آید:

$$\hat{D}_t^L = L \hat{D}_t$$

$$\hat{D}_t^L = L \left(\frac{\sum_{i=1}^p D_{t-i}}{p} \right)$$

بنابراین برای تعیین $\text{Var}(Q_t)$ برآورد تقاضا مشخص است. اما در رابطه مربوط به Q_t انحراف معیار خطای پیش بینی σ نیز اهمیت دارد. در ادامه بحث قضیه ای بیان می شود که محاسبات مربوط به تعیین $\text{Var}(Q_t)$ را تسهیل می کند.

قضیه 1: واریانس خطای پیش بینی تقاضای هر محصول در دوره پیش زمان به دوره (t) بستگی نداشته و در طول زمان ثابت است و با رابطه زیر مشخص می شود:

$$(\hat{\sigma}_t^L)^2 = \left(1 + \frac{L}{p} \right) L \gamma + 2 \sum_{i=1}^L (L-i) \gamma(i) + 2 \left(\frac{L}{p} \right) \left(\left(\frac{L}{p} \right) \sum_{i=1}^p (p-i) \gamma(i) - \sum_{i=1}^{L+p-1} \gamma(i) \right)$$

به عبارت بهتر $\sigma = \sigma$ در این رابطه کوواریانس بین تقاضای هر محصول در یک دوره و تقاضای همان محصول در دوره دیگر با تأخیر P، با $\gamma(P)$ نشان داده شده است. γ واریانس تقاضای هر محصول است.

اثبات: برای جلوگیری از پیچیدگی در محاسبات هر محصول، از قرار دادن اندیس برای تفکیک محصول

$$\begin{aligned}
& 2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \dots + 2\gamma(p-1) + \\
& 2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \dots + 2\gamma(p-2) + \\
& 2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \dots + 2\gamma(p-3) + \dots + 2\gamma(1) \\
& = \left(\frac{L}{p}\right)^2 [p\gamma + 2(\gamma(1) + \gamma(1) + \dots + \gamma(1) + \gamma(2) + \dots + \gamma(2) + \dots + \gamma(p-1))] \\
& = \left(\frac{L}{p}\right)^2 [p\gamma + 2((p-1)\gamma(1) + (p-2)\gamma(2) + \dots + \gamma(p-1))] \\
& = \left(\frac{L}{p}\right)^2 [p\gamma + 2\left(\sum_{i=1}^p (p-i)\gamma(i)\right)]
\end{aligned}$$

تعیین $Cov(D_t^L, D)$

$$\begin{aligned}
Cov(D_t^L, \hat{D}_t^L) &= Cov\left(D_t + D_{t+1} + \dots + D_{t+L-1}, \left(\frac{L}{p}\right)(D_{t-1} + D_{t-2} + \dots + D_{t-p})\right) \\
&= \left(\frac{L}{p}\right) Cov\left(D_t + D_{t+1} + \dots + D_{t+L-1}, (D_{t-1} + D_{t-2} + \dots + D_{t-p})\right) \\
&= \left(\frac{L}{p}\right) [Cov(D_t, D_{t-1}) + Cov(D_t, D_{t-2}) + \dots + Cov(D_t, D_{t-p}) + \\
& Cov(D_{t+1}, D_{t-1}) + Cov(D_{t+1}, D_{t-2}) + \dots + Cov(D_{t+1}, D_{t-p}) + \dots \\
& + Cov(D_{t+L-1}, D_{t-1}) + Cov(D_{t+L-1}, D_{t-2}) + \dots + Cov(D_{t+L-1}, D_{t-p})] \\
&= \left(\frac{L}{p}\right) [\gamma(1) + \gamma(2) + \dots + \gamma(p) + \gamma(2) + \gamma(3) + \dots + \gamma(p+1) + \dots + \\
& \gamma(L) + \gamma(L+1) + \dots + \gamma(L+p-1)] \\
&= \left(\frac{L}{p}\right) \left[\sum_{i=1}^{L+p-1} \gamma(i)\right]
\end{aligned}$$

حال با توجه به روابط به دست آمده و با قراردادن آنها در رابطه واریانس و خلاصه سازی می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
(\hat{\sigma}_t^L)^2 &= Var(D_t^L) + Var(\hat{D}_t^L) - 2Cov(D_t^L, \hat{D}_t^L) \\
&= L\gamma + 2\left[\sum_{i=1}^L (L-i)\gamma(i)\right] + \left(\frac{L}{p}\right)^2 \left[p\gamma + 2\left(\sum_{i=1}^p (p-i)\gamma(i)\right)\right] - 2\left(\frac{L}{p}\right) \left[\sum_{i=1}^{L+p-1} \gamma(i)\right] \\
&= \left(1 + \frac{L}{p}\right) L\gamma + 2\sum_{i=1}^L (L-i)\gamma(i) + 2\left(\frac{L}{p}\right) \left[\left(\frac{L}{p}\right) \sum_{i=1}^p (p-i)\gamma(i) - \sum_{i=1}^{L+p-1} \gamma(i)\right]
\end{aligned}$$

چنانچه مشخص است رابطه بالا مستقل از زمان است و فقط به پارامترهای مسئله (L, p, γ) بستگی دارد که خود γ نیز فقط به Φ_{ij} وابسته است.

قضیه ذکر شده نشان می دهد، انحراف معیار خطای پیش بینی تقاضای هر محصول در دوره پیش زمان در تغییرات واریانس سفارش بی تأثیر است.

با توجه به نتیجه قضیه که نشان می دهد $\sigma = \sigma$ و با در نظر گرفتن رابطه (10) رابطه ذکر شده به این رابطه خلاصه می شود:

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + D_{t-1}$$

با جایگذاری رابطه ها خواهیم داشت:

خودداری می شود، ولی از روابط به دست آمده می توان برای هر یک از محصولات استفاده کرد. از این رو طبق تعریف واریانس می توان نوشت:

$$(\hat{\sigma}_t^L)^2 = Var(D_t^L - \hat{D}_t^L) = Var(D_t^L) + Var(\hat{D}_t^L) - 2Cov(D_t^L, \hat{D}_t^L)$$

در این رابطه D_t^L تقاضای محصول در دوره پیش زمان است که به این شکل مشخص می شود:

$$D_t^L = D_t + D_{t+1} + \dots + D_{t+L-1} = \sum_{i=0}^{L-1} D_{t+i} \quad (12)$$

بنابراین برای محاسبه σ باید سه رابطه $Var(D)$ و $Var(D_t^L)$ و $Cov(D_t^L, D)$ تعیین شوند.

تعیین $Var(D_t^L)$

طبق تعریف داریم $Cov(D_t, D_{t+k}) = \gamma(k)$ و با توجه به شرایط ایستایی $Var(D_{t-1}) = Var(D_{t-2}) = Var(D) = \gamma(0) = \gamma$ می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
Var(D_t^L) &= Var(D_t + D_{t+1} + \dots + D_{t+L-1}) \\
Var(D_t^L) &= Var(D_t) + Var(D_{t+1}) + \dots + Var(D_{t+L-1}) + \\
& 2Cov(D_t, D_{t+1}) + 2Cov(D_t, D_{t+2}) + \dots + 2Cov(D_t, D_{t+L-1}) + \\
& 2Cov(D_{t+1}, D_{t+2}) + 2Cov(D_{t+1}, D_{t+3}) + \dots + 2Cov(D_{t+1}, D_{t+L-1}) + \\
& 2Cov(D_{t+2}, D_{t+3}) + 2Cov(D_{t+2}, D_{t+4}) + \dots + 2Cov(D_{t+2}, D_{t+L-1}) + \dots + 2Cov(D_{t+L-2}, D_{t+L-1}) \\
& = \gamma + \gamma + \dots + \gamma + \\
& 2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \dots + 2\gamma(L-3) + 2\gamma(L-2) + 2\gamma(L-1) + \\
& 2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \dots + 2\gamma(L-3) + 2\gamma(L-2) + \\
& 2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \dots + 2\gamma(L-3) + \\
& \vdots \\
& + 2\gamma(1) \\
& = L\gamma + 2[\gamma(1) + \gamma(1) + \dots + \gamma(1) + \gamma(2) + \dots + \gamma(L-1)] \\
& = L\gamma + 2[(L-1)\gamma(1) + (L-2)\gamma(2) + \dots + \gamma(L-1)] \\
& = L\gamma + 2\left[\sum_{i=1}^L (L-i)\gamma(i)\right]
\end{aligned}$$

تعیین $Var(D)$

$$Var(\hat{D}_t^L) = Var\left(L \left(\frac{\sum_{i=1}^p D_{t-i}}{p}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
Var(\hat{D}_t^L) &= \left(\frac{L}{p}\right)^2 Var\left(\sum_{i=1}^p D_{t-i}\right) = \left(\frac{L}{p}\right)^2 Var(D_{t-1} + D_{t-2} + \dots + D_{t-p}) \\
&= \left(\frac{L}{p}\right)^2 [Var(D_{t-1}) + Var(D_{t-1}) + \dots + Var(D_{t-p}) + \\
& 2Cov(D_{t-1}, D_{t-2}) + 2Cov(D_{t-1}, D_{t-3}) + \dots + 2Cov(D_{t-1}, D_{t-p}) + \\
& 2Cov(D_{t-2}, D_{t-3}) + 2Cov(D_{t-2}, D_{t-4}) + \dots + 2Cov(D_{t-2}, D_{t-p}) + \\
& 2Cov(D_{t-3}, D_{t-4}) + 2Cov(D_{t-3}, D_{t-5}) + \dots + 2Cov(D_{t-3}, D_{t-p}) \\
& + \dots + 2Cov(D_{t-p+1}, D_{t-p})] = \left(\frac{L}{p}\right)^2 [\gamma + \gamma + \dots + \gamma +
\end{aligned}$$

چنانچه برای هر یک از دو محصول، اندیس مربوطه را در نظر بگیریم، به رابطه دقیق تری از اثر شلاقی برای هر محصول دست خواهیم یافت:

$$BE_{P_i}^i = 1 + 2 \left(\frac{L_i}{P_i} \right) \left(1 + \frac{L_i}{P_i} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{ii}(P_i)}{\gamma_{ii}} \right) \quad i = 1, 2 \quad (17)$$

در رابطه (17) پیش‌زمان و دوره‌های موردنظر در پیش‌بینی به روش میانگین متحرک محصول نام به ترتیب با L_i و P_i نشان داده شده است و نماد $BE_{P_i}^i$ برای نمایش اثر شلاقی محصول نام ($i=1,2$) زمانی که در پیش‌بینی تقاضا در دوره پیش‌زمان از روش میانگین متحرک بر اساس P_i دوره آخر استفاده شود، به کار گرفته شده است. در رابطه (17) برای اندازه‌گیری اثر شلاقی نیاز به محاسبه کوواریانس با تأخیر P برای محصول نام ($\gamma(P)$) است. خواهیم دید به ازای مقادیر مختلف P_i روابط متفاوتی برای اثر شلاقی به دست خواهد آمد.

محاسبه کوواریانس تقاضای هر محصول در دو دوره با تأخیر P

اکنون برای تعیین $\gamma(P)$ برای هر محصول بار دیگر رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Gamma(k) = \begin{cases} \Gamma(-1)\phi_1' + \Sigma & k = 0 \\ \Gamma(k-1)\phi_1' = \Gamma(0)(\phi_1')^k & k \geq 1 \end{cases}$$

مشخص است که برای محاسبه $\gamma_{ii}(k)$ (عناصر قطر اصلی ماتریس کوواریانس با تأخیر k ; $k \geq 1$) به ماتریس $\Gamma(0)$ و توان k م ترانهاده ماتریس ضرایب فرآیند اتورگرسیون برداری مرتبه اول یا ϕ_1' نیاز است. در این فرآیند برای دو محصول داریم:

$$\begin{cases} D_i^1 = \phi_{11} D_{i-1}^1 + \phi_{12} D_{i-1}^2 + a_i^1 \\ D_i^2 = \phi_{21} D_{i-1}^1 + \phi_{22} D_{i-1}^2 + a_i^2 \end{cases}$$

و ماتریس ضرایب (ϕ_1) به صورت زیر است:

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

و در ادامه روابط $\gamma_{ii}(P_i)$ به ازای مقادیر $P=1,2,3,4,5$ برای هر محصول به دست می‌آید.

تعیین $\gamma_{11}(1)$ و $\gamma_{22}(1)$

هنگامی که در پیش‌بینی به روش میانگین متحرک از داده‌های آخرین دوره استفاده شود لازم است که ماتریس $\Gamma(1)$ بر اساس ماتریس ϕ_1' تعیین شود:

$$\begin{aligned} Q_t &= L \left[\frac{\sum_{i=1}^P D_{t-i}^1}{P} - \frac{\sum_{i=1}^P D_{t-i-1}^1}{P} \right] + D_{t-1} = \frac{L}{P} \left[\sum_{i=1}^P D_{t-i}^1 - \sum_{i=1}^P D_{t-i-1}^1 \right] + D_{t-1} \\ &= \frac{L}{P} [D_{t-1}^1 + D_{t-2}^1 + \dots + D_{t-P}^1 - (D_{t-2}^1 + D_{t-3}^1 + \dots + D_{t-P}^1 + D_{t-P-1}^1)] + D_{t-1} \\ &= \frac{L}{P} [D_{t-1}^1 - D_{t-P-1}^1] + D_{t-1} \end{aligned}$$

که در نتیجه مقدار سفارش به این ترتیب به دست می‌آید:

$$Q_t = \left(1 + \frac{L}{P}\right) D_{t-1}^1 - \left(\frac{L}{P}\right) D_{t-P-1}^1 \quad (13)$$

این رابطه مقدار سفارش محصولی که بر اساس سیاست سفارش‌گذاری تا حد معین سفارش‌گذاری شده و تقاضای محصول در دوره پیش‌زمان نیز بر اساس روش میانگین متحرک پیش‌بینی می‌شود را در دوره t نشان می‌دهد. با قرار دادن پارامترهای مربوط به هر محصول در رابطه، مقدار سفارش محصول نام به دست می‌آید:

$$Q_t^i = \left(1 + \frac{L_i}{P_i}\right) D_{t-1}^i - \left(\frac{L_i}{P_i}\right) D_{t-P-1}^i$$

برای تعیین واریانس سفارش‌ها، با توجه به رابطه 12 داریم:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q_t) &= \text{Var}\left[\left(1 + \frac{L}{P}\right) D_{t-1}^1 - \left(\frac{L}{P}\right) D_{t-P-1}^1\right] \\ \text{Var}(Q_t) &= \left(1 + \frac{L}{P}\right)^2 \text{Var}(D_{t-1}^1) + \left(\frac{L}{P}\right)^2 \text{Var}(D_{t-P-1}^1) \\ &\quad - 2\left(1 + \frac{L}{P}\right) \left(\frac{L}{P}\right) \text{Cov}(D_{t-1}^1, D_{t-P-1}^1) \end{aligned}$$

با توجه به خاصیت ایستایی فرآیند برداری و طبق تعریف کوواریانس خواهیم داشت:

$$\text{Var}(Q_t) = \left(1 + \frac{L}{P}\right)^2 \gamma + \left(\frac{L}{P}\right)^2 \gamma - 2\left(1 + \frac{L}{P}\right) \left(\frac{L}{P}\right) \gamma(P) \quad (15)$$

در نتیجه برای محاسبه واریانس سفارش باید کوواریانس تقاضای هر محصول با تأخیر زمانی P تعیین شود. با در نظر گرفتن رابطه (1) اگر از γ برای نمایش واریانس تقاضای هر محصول و از $\gamma(P)$ برای نمایش کوواریانس تقاضای هر محصول با تأخیر P استفاده شود، با جایگذاری داریم:

$$\begin{aligned} BE &= \frac{\text{Var}(Q_t)}{\text{Var}(D)} = \frac{\left(1 + \frac{L}{P}\right)^2 \gamma + \left(\frac{L}{P}\right)^2 \gamma - 2\left(1 + \frac{L}{P}\right) \left(\frac{L}{P}\right) \gamma(P)}{\gamma} \\ BE &= \left[\left(1 + \frac{L}{P}\right)^2 + \left(\frac{L}{P}\right)^2\right] - 2\left(1 + \frac{L}{P}\right) \left(\frac{L}{P}\right) \frac{\gamma(P)}{\gamma} \\ BE &= 1 + 2 \left(\frac{L}{P}\right) \left(1 + \frac{L}{P}\right) \left(1 - \frac{\gamma(P)}{\gamma}\right) \quad (16) \end{aligned}$$

این رابطه شکل کلی اثر شلاقی را برای زنجیره‌های تأمین دومحصولی مبتنی بر مفروضات مسئله بیان می‌کند.

$$BE_2^1 = 1 + 2 \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(1 + \frac{L_1}{2} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{11}(2)}{\gamma_{11}} \right)$$

$$= 1 + L_1 \left(1 + \frac{L_1}{2} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{11}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) + \gamma_{12}\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})}{\gamma_{11}} \right)$$

$$BE_2^1 = 1 + L_1 \left(1 + \frac{L_1}{2} \right) \left(1 - (\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) - \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \right)$$

با توجه به مشابه بودن روابط برای محصول اول و دوم، فقط روابط برای محصول اول نوشته خواهد شد.

تعیین $\gamma_{11}(3)$ و $\gamma_{22}(3)$

برای تعیین ماتریس $\Gamma(3)$ به توان سوم ماتریس ضرایب (ϕ_1') نیاز است. سایر مراحل همانند بخش‌های قبلی است بنابراین:

$$\phi_1'^3 = \begin{bmatrix} \phi_{11}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(2\phi_{11} + \phi_{22}) & \phi_{21}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{22}^2) \\ \phi_{12}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{22}^2) & \phi_{22}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11} + 2\phi_{22}) \end{bmatrix}$$

$$BE_3^1 = 1 + 2 \left(\frac{L_1}{3} \right) \left(1 + \frac{L_1}{3} \right) \left(1 - (\phi_{11}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(2\phi_{11} + \phi_{22}) - \phi_{12}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{22}^2)) \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \right)$$

(21)

تعیین $\gamma_{11}(4)$ و $\gamma_{22}(4)$

هنگامی که خرده‌فروش در پیش‌بینی تقاضای دوره پیش‌زمان از روش میانگین متحرک با $P=4$ استفاده می‌کند، ماتریس $\Gamma(4)$ نیاز است. پس از تعیین $\phi_1'^4$ می‌توان $\gamma_{11}(4)$ و $\gamma_{22}(4)$ را تعیین کرد:

$$\phi_1'^4 = \begin{bmatrix} \phi_{11}^4 + \phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) & \phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) \\ \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) & \phi_{22}^4 + \phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) \\ \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) & \phi_{22}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) \end{bmatrix}$$

$$BE_4^1 = 1 + \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(1 + \frac{L_1}{4} \right) \left(1 - (\phi_{11}^4 + \phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})) - \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \right)$$

(22)

تعیین $\gamma_{11}(5)$ و $\gamma_{22}(5)$

با طی مراحل قبل و با نمایش درایه (i,j) از توان P ماتریس $\phi_1'^P$ به صورت $\phi_1'^P(i,j)$ به ازای $P=5$ خواهیم داشت:

$$\phi_1'^5 = \begin{bmatrix} \phi_1'^5(1,1) & \phi_1'^5(1,2) \\ \phi_1'^5(2,1) & \phi_1'^5(2,2) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(0)\phi_1' \quad \Gamma(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \quad \phi_1' = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\Gamma(1) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11}\phi_{11} + \gamma_{12}\phi_{12} & \gamma_{11}\phi_{21} + \gamma_{12}\phi_{22} \\ \gamma_{12}\phi_{11} + \gamma_{22}\phi_{12} & \gamma_{12}\phi_{21} + \gamma_{22}\phi_{22} \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(1) &= \gamma_{11}\phi_{11} + \gamma_{12}\phi_{12} \\ \gamma_{22}(1) &= \gamma_{12}\phi_{21} + \gamma_{22}\phi_{22} \end{aligned} \quad (18)$$

از این رو اثر شلاقی محصول 1 به ازای $P_1=1$ به دست می‌آید:

$$BE_1^1 = 1 + 2L_1(1 + L_1) \left(1 - \frac{\gamma_{11}(P_1)}{\gamma_{11}} \right) = 1 + 2L_1(1 + L_1) \left(1 - \frac{\gamma_{11}\phi_{11} + \gamma_{12}\phi_{12}}{\gamma_{11}} \right)$$

$$BE_1^1 = 1 + 2L_1(1 + L_1) \left(1 - \phi_{11} - \phi_{12} \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \right) \quad (19)$$

همچنین برای محصول 2 به ازای $P_2=1$ داریم:

$$BE_2^1 = 1 + 2L_2(1 + L_2) \left(1 - \frac{\gamma_{22}(P_2)}{\gamma_{22}} \right) = 1 + 2L_2(1 + L_2) \left(1 - \frac{\gamma_{22}\phi_{21} + \gamma_{12}\phi_{12}}{\gamma_{22}} \right)$$

$$BE_2^1 = 1 + 2L_2(1 + L_2) \left(1 - \phi_{22} - \phi_{21} \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} \right) \right) \quad (20)$$

تعیین $\gamma_{11}(2)$ و $\gamma_{22}(2)$

برای محاسبه توان‌های 2 و بالاتر ترانهاده ماتریس ضرایب (ϕ_1') باید با استفاده از قوانین ضرب ماتریس‌ها، توان‌های مختلف ماتریس را محاسبه کرد و ماتریس کوواریانس را به دست آورد. بر اساس قوانین ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\phi_1'^2 = \begin{bmatrix} \phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12} & \phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) \\ \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) & \phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(0)(\phi_1')^2$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Gamma(2) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12} & \phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) \\ \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) & \phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(2) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) + \gamma_{12}\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) & \gamma_{11}\phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) + \gamma_{12}(\phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) \\ \gamma_{12}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) + \gamma_{22}\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) & \gamma_{12}\phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) + \gamma_{22}(\phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) \end{bmatrix}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\gamma_{11}(2) = \gamma_{11}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) + \gamma_{12}\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})$$

$$\gamma_{22}(2) = \gamma_{12}\phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) + \gamma_{22}(\phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12})$$

از این رو اثر شلاقی محصول 1 به ازای $P_1=2$ اندازه اثر شلاقی به ترتیب زیر به دست می‌آید:

دوره‌های بسیار زیاد در پیش‌بینی به روش میانگین متحرک، اثر شلاقی از زنجیره تأمین حذف خواهد شد
:(BE=1)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} BE = 1$$

در نتیجه می‌توان گفت:

اثر شلاقی در زنجیره‌های تأمین دومحصولی مبتنی بر مفروضات مسئله، تابعی نزولی از تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی تقاضای پیش‌زمان به روش میانگین متحرک است و بنابراین با افزایش آن می‌توان اثر شلاقی را کاهش داد.

ارتباط اثر شلاقی با پیش‌زمان

طبق مطالب گفته‌شده می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial BE_i^1}{\partial L_i} = 2 \left(\frac{1}{p_i} \right) \left(1 + \frac{2L_i}{p_i} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{ii}(p_i)}{\gamma_{ii}} \right) \quad (27)$$

با توجه به مثبت بودن L_i و P_i نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial BE_i^1}{\partial L_i} \geq 0$$

از این رو می‌توان گفت: در زنجیره تأمین دومحصولی مبتنی بر مفروضات مسئله، اثر شلاقی تابعی صعودی از پیش‌زمان است و بنابراین با کاهش آن می‌توان اثر شلاقی را کاهش داد.

مطالب مطرح‌شده تا کنون، مربوط به زنجیره تأمین دو مرحله‌ای بوده است. در ادامه به بحثی جدید در مدیریت زنجیره تأمین یعنی اندازه‌گیری اثر شلاقی در زنجیره تأمین سه مرحله‌ای با دو محصول خواهیم پرداخت.

محاسبه مقدار اثر شلاقی برای زنجیره‌های

تأمین سه‌مرحله‌ای

در زنجیره‌های تأمین سه‌مرحله‌ای با توجه به وجود دو حلقه، سفارش‌های رسیده از حلقه اول به منزله تقاضا برای حلقه دوم است؛ از همین اصل برای به دست آوردن اثر پدیده شلاقی در زنجیره‌های تأمین سه‌مرحله‌ای استفاده شده است، بر اساس اصل گفته‌شده و محاسبات انجام‌شده در بخش‌های قبلی، می‌توان اثر شلاقی را در اینگونه از زنجیره‌های تأمین دو محصولی به این ترتیب محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \phi_1^{i,5}(1,1) &= \phi_{11}^5 + \phi_{21}\phi_{12}(4\phi_{11}^3 + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + \phi_{22}^3) \\ \phi_1^{i,5}(1,2) &= \phi_{21}(\phi_{11}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) \\ &+ \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{22}(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) + (\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}^2))) + \phi_{22}^4 \\ \phi_1^{i,5}(2,1) &= \phi_{12}(\phi_{22}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) \\ &+ \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + (\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2))) + \phi_{11}^4 \\ \phi_1^{i,5}(2,2) &= \phi_{22}^5 + \phi_{21}\phi_{12}(4\phi_{22}^3 + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) + \phi_{11}^3) \end{aligned}$$

در نتیجه رابطه اثر شلاقی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$BE_3^1 = 1 + 2 \left(\frac{L_1}{5} \right) \left(1 + \frac{L_1}{5} \right) \left(1 - \frac{(\phi_{11}^5 + \phi_{21}\phi_{12}(4\phi_{11}^3 + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + \phi_{22}^3)) - (\phi_{21}(\phi_{11}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{22}(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) + (\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}^2))))}{(\phi_{12}(\phi_{22}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + (\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2))) + \phi_{11}^4} \right) \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \quad (23)$$

به همین صورت می‌توان محاسبات را برای پیش‌بینی تقاضای دوره پیش‌زمان به روش میانگین متحرک به ازای تعداد دوره‌های آخر بیشتر ادامه داد.

اگر توان IP ماتریس ϕ_1' نمایش دهیم:

$$\phi_1'^p = \begin{bmatrix} \phi_1'^p(1,1) & \phi_1'^p(1,2) \\ \phi_1'^p(2,1) & \phi_1'^p(2,2) \end{bmatrix}$$

با توجه به روابط به دست آمده مشخص می‌شود که می‌توان روابط اثر شلاقی را در قالب کلی زیر قرار داد:

$$BE_{p_1}^1 = 1 + 2 \left(\frac{L_1}{p_1} \right) \left(1 + \frac{L_1}{p_1} \right) \left(1 - \phi_1'^{p_1}(1,1) - \phi_1'^{p_1}(2,1) \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \right) \quad (24)$$

$$BE_{p_2}^2 = 1 + 2 \left(\frac{L_2}{p_2} \right) \left(1 + \frac{L_2}{p_2} \right) \left(1 - \phi_1'^{p_2}(2,2) - \phi_1'^{p_2}(1,2) \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} \right) \right) \quad (25)$$

وجود اثر شلاقی

رابطه 17 بار دیگر در نظر گرفته می‌شود، از نظر ریاضی و با توجه به مقادیر مختلف $\gamma_{ii}(P_i)$ که در بخش‌های قبلی به دست آمد، می‌توان ثابت کرد که برای هر یک از محصولات ($i=1,2$) رابطه زیر برقرار است:

$$\gamma_{ii}(p_i) \leq \gamma_{ii} \quad (26)$$

از این رو می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{ii}(p_i)}{\gamma_{ii}} &\leq 1 \\ 1 - \frac{\gamma_{ii}(p_i)}{\gamma_{ii}} &\geq 0 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه مقادیر L_i و P_i مثبت هستند، نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{L_i}{p_i} \right) \left(1 + \frac{L_i}{p_i} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{ii}(p_i)}{\gamma_{ii}} \right) \geq 0$$

بنابراین می‌توان دریافت که یک زنجیره تأمین دو محصولی (مبتنی بر مفروضات مساله) همواره دستخوش اثر شلاقی است. در شرایط استفاده از داده‌های مربوط به

$$BE_3^2 = 1 + 2 \left(\frac{L_2}{3} \right) \left(1 + \frac{L_2}{3} \right) \left(\frac{1 - (\phi_{22}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11} + 2\phi_{22}))}{-\phi_{21}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{22}^2)} \right) \left(\frac{\gamma_{12}}{(1 + \frac{L_2}{3})^2 \gamma_{22} + (\frac{L_2}{3})^2 \gamma_{22} - 2(1 + \frac{L_2}{3})(\frac{L_2}{3})} \right) \quad (35)$$

$$BE_4^1 = 1 + \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(1 + \frac{L_1}{4} \right) \left(\frac{1 - (\phi_{11}^4 + \phi_{11}\phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2))}{-\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2)} \right) \left(\frac{\gamma_{12}}{(1 + \frac{L_1}{4})^2 \gamma_{11} + (\frac{L_1}{4})^2 \gamma_{11} - 2(1 + \frac{L_1}{4})(\frac{L_1}{4})(\phi_{11}^4 + \phi_{11}\phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2))} \right) \gamma_{11} \quad (36)$$

$$BE_4^2 = 1 + \left(\frac{L_2}{2} \right) \left(1 + \frac{L_2}{4} \right) \left(\frac{1 - \phi_{22}^4 + \phi_{21}\phi_{12}\phi_{22}(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}^2)}{-\phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2)} \right) \left(\frac{\gamma_{12}}{(1 + \frac{L_2}{4})^2 \gamma_{22} + (\frac{L_2}{4})^2 \gamma_{22} - 2(1 + \frac{L_2}{4})(\frac{L_2}{4})(\phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2))} \right) \gamma_{12} \quad (37)$$

$$BE_5^1 = 1 + 2 \left(\frac{L_1}{5} \right) \left(1 + \frac{L_1}{5} \right) \left(\frac{1 - (\phi_{11}^5 + \phi_{21}\phi_{12}(4\phi_{11}^3 + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + \phi_{22}^3))}{\phi_{12}(\phi_{22}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + (\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2)) + \phi_{11}^4)} \right) \left(\frac{\gamma_{12}}{(1 + \frac{L_1}{5})^2 \gamma_{11} + (\frac{L_1}{5})^2 \gamma_{11} - 2(1 + \frac{L_1}{5})(\frac{L_1}{5})(\phi_{11}^5 + \phi_{21}\phi_{12}(4\phi_{11}^3 + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + \phi_{22}^3))} \right) \gamma_{11} \quad (38)$$

$$BE = 1 + 2 \left(\frac{L}{p} \right) \left(1 + \frac{L}{p} \right) \left(1 - \frac{\gamma(p)}{(1 + \frac{L}{p})^2 \gamma + (\frac{L}{p})^2 \gamma - 2(1 + \frac{L}{p})(\frac{L}{p})\gamma(p)} \right) \quad (28)$$

که به تفکیک به ازای محصولات مختلف و Pهای مختلف به این صورت است:

$$BE_{p_i}^t = 1 + 2 \left(\frac{L_i}{p_i} \right) \left(1 + \frac{L_i}{p_i} \right) \left(1 - \frac{\gamma_i(p_i)}{(1 + \frac{L_i}{p_i})^2 \gamma_i + (\frac{L_i}{p_i})^2 \gamma_i - 2(1 + \frac{L_i}{p_i})(\frac{L_i}{p_i})\gamma_i(p_i)} \right) \quad (29)$$

برای مثال به ازای P=1 برای محصول اول می‌توان نوشت:

$$BE_1^1 = 1 + 2L_1(1 + L_1) \left(1 - \phi_{11} - \phi_{12} \right) \left(\frac{\gamma_{12}}{(1 + L_1)^2 \gamma_{11} + (L_1)^2 \gamma_{11} - 2(1 + L_1)(L_1)(\gamma_{11}\phi_{11} + \gamma_{12}\phi_{12})} \right) \quad (30)$$

و به ازای P=1 به ازای محصول دوم می‌توان نوشت:

$$BE_1^2 = 1 + 2L_2(1 + L_2) \left(1 - \phi_{22} - \phi_{21} \right) \left(\frac{\gamma_{12}}{(1 + L_2)^2 \gamma_{22} + (L_2)^2 \gamma_{22} - 2(1 + L_2)(L_2)(\gamma_{12}\phi_{21} + \gamma_{22}\phi_{22})} \right) \quad (31)$$

به همین ترتیب به ازای Pها و محصولات مختلف می‌توان نوشت:

$$BE_2^1 = 1 + L_1 \left(1 + \frac{L_1}{2} \right) \left(1 - (\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) - \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) \right) \quad (32)$$

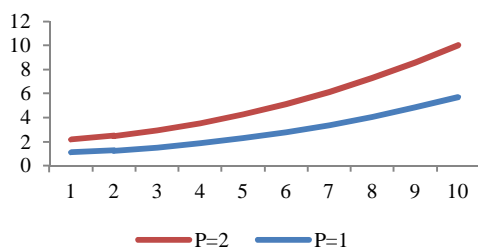
$$BE_2^2 = 1 + L_2 \left(1 + \frac{L_2}{2} \right) \left(1 - (\phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) - \phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) \right) \quad (33)$$

$$\left(\frac{\gamma_{12}}{(1 + \frac{L_2}{2})^2 \gamma_{22} + (\frac{L_2}{2})^2 \gamma_{22} - 2(1 + \frac{L_2}{2})(\frac{L_2}{2})(\gamma_{12}\phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) + \gamma_{22}(\phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12}))} \right) \quad (34)$$

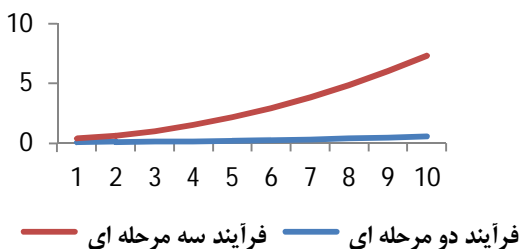
$$BE_3^1 = 1 + 2 \left(\frac{L_1}{3} \right) \left(1 + \frac{L_1}{3} \right) \left(1 - (\phi_{11}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(2\phi_{11} + \phi_{22})) \right) \left(\frac{\gamma_{12}}{(1 + \frac{L_1}{3})^2 \gamma_{11} + (\frac{L_1}{3})^2 \gamma_{11} - 2(1 + \frac{L_1}{3})(\frac{L_1}{3})} \right) \quad (35)$$

$$\left(\frac{\gamma_{12}}{(1 + \frac{L_1}{3})^2 \gamma_{11} + (\frac{L_1}{3})^2 \gamma_{11} - 2(1 + \frac{L_1}{3})(\frac{L_1}{3})} \right) \left(\frac{\gamma_{12}}{(\phi_{11}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(2\phi_{11} + \phi_{22}))\gamma_{11} + \phi_{12}(\phi_{11}^2 + \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2)\gamma_{12}} \right) \quad (36)$$

مقایسه نتایج به دست آمده با واقعیت با استفاده از فرمول (40) نشان‌دهنده متوسط خطای 0/005 در حالت‌های مختلف است که می‌توان نتیجه گرفت که مدل با یک خطای قابل اغمازی درست عمل می‌کند. با اندازه‌گیری مقدار اثر شلاقی در این شرکت بر اساس فرمول‌های بالا نتایج جالبی به دست آمد که از آن جمله می‌توان به شکل‌های زیر اشاره کرد:



شکل 1: محاسبه اثر شلاق برای محصول دوم بر حسب پیش‌زمان در تعداد دوره‌های پیش‌بینی مختلف (P)



شکل 2: مقایسه اثر شلاقی محصول دوم در فرآیند دومرحله‌ای و سه‌مرحله‌ای بر اساس L برای P.

با بررسی شکل‌ها و نتایج به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که با تعیین بهینه تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی، یعنی با افزایش دقت پیش‌بینی، می‌توان اثر پدیده شلاقی را کاهش داد. همچنین با بررسی نتایج به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش تعداد مراحل در زنجیره تأمین مقدار، اثر پدیده شلاقی به مقدار قابل توجهی افزایش می‌یابد. بنابراین می‌توان با کاهش تعداد مراحل در زنجیره‌های تأمین تا حد قابل توجهی از میزان اثر پدیده شلاقی کاست. برای بررسی درستی و نادرستی فرمول‌های به دست آمده، علاوه بر مقایسه با واقعیت، با شبیه‌سازی زنجیره در 12000 بار اجرا و محاسبه واریانس سفارش و تقاضا و محاسبه خطا، اختلاف

$$BE_5^2 = 1 + 2 \left(\frac{L_2}{5} \right) \left(1 + \frac{L_2}{5} \right) \left(1 - (\phi_{22}^5 + \phi_{21}\phi_{12}(4\phi_{22}^3 + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) + \phi_{11}^3)) - \phi_{21} \left(\phi_{11}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{22}(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) + (\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}^2)) + \phi_{22}^4 \right) \right) \left(\frac{\gamma_{12}}{(1 + \frac{L_2}{5})^2 \gamma_{22} + (\frac{L_2}{5})^2 \gamma_{22} - 2(1 + \frac{L_2}{5})(\frac{L_2}{5})} \right) \left(\phi_{12}(\phi_{22}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + (\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2)) + \phi_{11}^4) \gamma_{12} + (\phi_{22}^5 + \phi_{21}\phi_{12}(4\phi_{22}^3 + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) + \phi_{11}^3)) \gamma_{22} \right) \right) \quad (39)$$

اندازه‌گیری اثر شلاقی به صورت مطالعه موردی

برای بررسی اعتبار فرمول‌های به دست آمده و تحلیل رفتار اثر شلاقی در زنجیره‌های تأمین سه مرحله‌ای، بر اساس تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی و پیش‌زمان تحویل سفارش‌ها در روش پیش‌بینی میانگین متحرک، به ارائه یک مطالعه موردی خواهیم پرداخت. به همین منظور از داده‌های مربوط به یکی از کارخانجات زیر مجموعه وزارت نیرو که در زنجیره تأمین ترانسفورماتورهای برق قرار دارد، استفاده شده است. این کارخانه اطلاعات مربوط به پیش‌بینی با روش میانگین متحرک برای یک و دو دوره را در اختیار دارد. فرآیند برداری تقاضای محصول 1 و محصول 2 در این زنجیره تأمین به این صورت است:

$$\begin{cases} D_t^1 = 0.5D_{t-1}^1 + 0.2D_{t-1}^2 \\ D_t^2 = 0.6D_{t-1}^1 + 0.7D_{t-1}^2 \end{cases}$$

با بررسی شرط ایستایی فرآیند، به این نتیجه می‌رسیم که فرآیند، ایستا است، بنابراین می‌تواند به عنوان مطالعه موردی برای این مقاله مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به اینکه در این شرکت فقط از اطلاعات یک یا دو دوره قبل استفاده می‌شود، بنابراین برای بررسی درستی و نادرستی فرمول‌های به دست آمده P=2، P=1 در نظر گرفته شد. اگر فرمول زیر را برای خطا در نظر بگیریم:

$$e_{ij}^k = (BE_{ij}^k)^{math} - (BE_{ij}^k)^{sim} \quad (40)$$

حاصله نشان می‌دهد که با تعیین بهینه تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی در روش میانگین متحرک و کاهش پیش‌زمان، می‌توان اثر پدیده شلاقی را کاهش داد. برای تأیید درستی فرمول‌های به دست آمده، نتایج حاصل از محاسبات ریاضی با اعداد حاصل از واقعیت و همچنین اعداد حاصل از شبیه‌سازی مقایسه شده است که با توجه به میزان بسیار کم خطا می‌توان درستی فرمول‌های به دست آمده را تأیید کرد. با توجه به اهمیت مدیریت زنجیره تأمین، نیاز به استفاده از معیاری برای ارزیابی میزان کارایی اقدام‌های انجام گرفته در آن ضروری است. این مقاله، معیار مورد نظر را برای این ارزیابی در اختیار قرار می‌دهد و می‌تواند برای اولویت‌بندی پروژه‌های بهبود تعریف‌شده در زنجیره تأمین، مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به مفروضات در نظر گرفته شده نظیر تعداد مراحل و روش پیش‌بینی، می‌توان در مطالعات آینده مدل‌هایی را در نظر گرفت که تعداد مراحل بیشتر و روش‌های پیش‌بینی متفاوتی را در نظر بگیرند و به واقعیت نزدیکتر باشند.

قابل اغمازی بین مدل ریاضی و شبیه‌سازی به دست آمده است. اگر فرمول زیر را برای خطا در نظر بگیریم:

$$e_{ij}^k = (BE_{ij}^k)^{math} - (BE_{ij}^k)^{sim}$$

i نشان‌دهنده پیش‌زمان مورد نیاز و j تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی و k نشان‌دهنده محصول است، در این صورت برای مثال برای $i=2, j=4, k=1$

$$e_{24}^1 = (BE_{24}^1)^{math} - (BE_{24}^1)^{sim} = 1.251 - 1.248 = 0.003$$

به همین ترتیب برای سایر موارد هم می‌توان آزمایش کرد. در نتیجه خطا در حد قابل قبول و قابل اغماض است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از مدل سری‌های زمانی میزان تقاضا، محصولات همبسته در مدت زمان تحویل کالا پیش‌بینی شده و مقدار پدیده اثر شلاقی، با در نظر گرفتن یک سری مفروضات، بر اساس عوامل طول مدت پیش‌زمان و تعداد دوره‌های مورد استفاده برای پیش‌بینی در روش میانگین متحرک به دست آمده است که نتایج

مراجع

- 1- Chen, F., Drezner, Z., Ryan, J.K. and Smith-Levi (2000). "Quantifying the bullwhip effect in a simple supply chain: The impact of forecasting, lead times and informatio." *Management Science*, 46, PP. 436-443.
- 2- Zhang, S. and Wang, M. (2005). "Delayed demand information and dampened bullwhip effect." *Operations Research Letters*, 33, 289-294.
- 3- Makui, A. and Madadi, A. (2007). "The bullwhip effect and Lyapunov exponent." *Applied Mathematics and Computation*, 189, PP. 35-40.
- 4- Kim, J.G., Chatfield, D., Harrison, T.P. and Hayya, J.C. (2006). "Quantifying the bullwhip effect in supply chain with stochastic lead time." *European Journal of the Operational Research*, Vol. 173, 617-636.
- 5- Jaksic, M. and Rusjan, B., "The effect of replenishment policies on the bullwhip effect: A transfer function approach." *European Journal of Operational Research*, Vol. 184, 946-961.
- 6- Duc, H.T.T., Luong, H.T. and Kim, Y.D.A. (2008). "Measure of bullwhip effect in supply chains with a mixed autoregressive-moving average demand process." *European Journal of Operational Research*, 187, 243-256.
- 7- Gilbert, K.C. and Chatpattananan, V. (2006). "An ARIMA supply chain model with a generalized ordering policy." *Journal of Modeling in Management*, 1, 33-51.
- 8- Dejonckheere, J., Disney, S.M., Lambrecht, M.R. and Towill, D.R. (2003). "Measuring and avoiding the bullwhip effect: A control theoretic approach." *European Journal of Operational Research*, 147. Vol. 147, 567-590.
- 9- Hayya, J.C., Kim, J.G., Disney, S.M., Harrison, T.P. and Chatfield, D. (2006). "Estimation in supply chain inventory management." *International Journal of Production Research*, Vol. 44, 1313-1330.

- 10- Gaalman, G. and Disney, S.M. (2005). "Investigation of an order-up-to policy with conditional forecasting and arbitrary lead-times." Budapest, Hungary : EurOMA International Conference on Operations and Global Competitiveness, 19-22.
 - 11- Gaalman, G. and Disney, S.D. (2007). "On bullwhip in a family of order up to policies with ARMA (2,2) demand and arbitrary lead-time." *International Journal of Production Economics*.
 - 12- Luong, H.T. and Phien, N.H. (2007). "Measure of bullwhip effect in supply chains with autoregressive demand process." *European Journal of Operational Research*, 2007, Vol. 183, PP. 1086-1097, 197-209.
 - 13- Disney, S.M. and Towill, D.R. (2003). "Vendor-managed inventory and bullwhip reduction in a two-level supply chain." *International Journal Operation & Production Management*, PP. 625-661.
 - 14- Hosoda, T. and Disney, S.M. (2006). "On variance amplification in a three-echelon supply chain with minimum mean square error forecasting." *Omega*, 34, PP. 344-358.
 - 15- Pujawan, I.N. (2004). "The effect of lot sizing on order variability." *European Journal of Operation Research*, 159, PP. 617-635.
 - 16- Krishnamoorthy, A., Ingalls, R.G. and Foote, B.L. (2005). "Reducing the bullwhip effect in supply chains with control-based forecasting." *International Journal of Simulation & Process Modeling*, Vol. 1, 90-110.
 - 17- Chandra, C. and Grabis, J. (2005). "Application of multi-steps forecasting for restraining the bullwhip effect and improving inventory performance under autoregressive demand." *European Journal of Operational Research*, Vol. 166, 337-350.
 - 18- Disney, S.M. and Grubbstrom, R.W. (2004). "Economic consequence of a production and inventory control policy." *International Journal of Production Research*, Vol. 42, 3149-3431.
 - 19- Disney, S.M. and Towill, D.R. (2006). "A methodology for benchmarking replenishment-induced bullwhip." *Supply Chain Management: An International Journal*, Vol. 11, 160-168.
 - 20- Xu, K., Dong, Y. and Evers, P.T. (2001). "Towards better coordination of the supply chain." *Transportation Research*, Vol. Part E 37. 35-54.
 - 21- Kelepouris, T., Miliotis, P. and Pramataris, K. (2008). "The impact of replenishment parameters and information sharing on the bullwhip effect: A computational study." *Computers & Operations Research*, Vol. 35, 3657-3670.
 - 22- Kleijnen, J.P.C. and Smits, M.T. (2003). "Performance metrics in supply chain management." *Journal of the Operational Research Society*, 54, PP. 507-514.
 - 23- Dhahri, I. and Chabchoub, H. (2007). "Nonlinear goal programming models quantifying the bullwhip effect in supply chain based on ARIMA parameters." *European Journal of Operation Research*, 177, PP. 1800-1810.
 - 24- Su, C.T. and Wong, J.T. (2008). "Design of a replenishment system for a stochastic dynamic production/forecast lot-sizing problem under bullwhip effect." *Expert Systems with Applications*, 34, PP. 173-180.
 - 25- Chen, Li. and Lee, H.L. (2009). "Information sharing and order variability control under a generalized demand model." *Management Science*, Vol. 55(5), 781-797.
 - 26- Chen, Li. and Lee, H.L. (2011). "Bullwhip Effect Measurement and Its Implications." *Manufacturing, Service, and Supply Chain Operations*.
-

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1- Bullwhip phenomenon effect
- 2- Statistical Approach
- 3- Z Transform Approach
- 4- Periodic Reordering System
- 5- Fixed Order System
- 6- Vector Auto-Regression
- 7- Order Up To Policy: OUt