

بررسی اثر پخش عددی بر دقت حل عددی معادلات آب کم عمق

سرمد قادر^{۱*}، علیرضا محب‌الحجه^۱ و مرضیه شریفی دوست^۲

^۱دانشیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

^۲دانش‌آموخته کارشناسی ارشد هواشناسی، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۹/۷/۱۰، پذیرش نهایی: ۹۱/۷/۱۸)

چکیده

هنگام حل عددی شکل اولیری معادلات آب کم عمق، مهار ناپایداری غیرخطی و جلوگیری از بروز آن لازم است. یک راه حل رایج، اضافه کردن یک جمله فرایخش به معادله تاوایی است. در تحقیق حاضر، سه روش با توانایی تفکیک زیاد یعنی روش‌های آبرفشرده مرتبه ششم، فشرده مرتبه چهارم و روش طیفی وار و نیز روش مرتبه دوم مرکزی برای حل عددی معادلات آب کم عمق در صفحه f مورد استفاده قرار می‌گیرند. سپس اثر استفاده از توان‌های متفاوت در جمله فرایخش بر دقت حل معادلات آب کم عمق در طرحواره‌های متفاوت مورد آزمایش قرار می‌گیرد. همچنین نحوه به کارگیری یک پالایه فشرده در حکم راه حلی جایگزین برای مهار ناپایداری غیرخطی در روش‌های فشرده نیز بررسی می‌شود. در انتها نتایج حاصل از شبیه‌سازی معادلات آب کم عمق با استفاده از روش‌های مورد بررسی و اثر میزان پخش عددی بر دقت حل آنها، از دو دیدگاه خطای جرم و نبود توازن مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که برای روش مرتبه دوم مرکزی که یک روش با توانایی تفکیک پایین است، انتخاب توان جمله فرایخش با توجه به تفکیک شبکه محدودیت دارد. از دیدگاه خطای جرم و نیز نبود توازن، استفاده از جمله فرایخش مرتبه دوم، نتیجه معکوس بر دقت حل می‌گذارد. همچنین استفاده از جمله فرایخش مرتبه شش و پالایه فشرده مرتبه هشت با استفاده از روش آبرفشرده مرتبه ششم و روش طیفی وار نتیجه تقریباً یکسانی را به دست می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: معادلات آب کم عمق، روش آبرفشرده، فرایخش، روش طیفی وار، پالایه فشرده

Assessing the influence of numerical diffusion on the accuracy of numerical solution of the shallow water equations

Ghader, S.¹, Mohebalhojeh, A. R.¹ and Sharifidoost, M.²

¹Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

²M.Sc. in Meteorology, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 02 Oct 2010, Accepted: 09 Oct 2012)

Abstract

To control the nonlinear numerical instability, throughout the time evolution of the Eulerian form of the nonlinear rotating shallow water equations, it is necessary to add numerical diffusion to the solution. It is clear that, this extra numerical diffusion degrades the accuracy of the numerical solution and should be kept as small as possible. In a conventional approach a hyper-diffusion is used to maintain the numerical stability. In the present work, the influence of using different orders of hyper-diffusion on the accuracy of the numerical solution of the shallow water equations generated by some high-order numerical methods is examined. Furthermore, application of an eighth-order compact spatial filter as an alternative way to provide the numerical diffusion is considered.

In the present work, the vorticity-divergence-mass representation of the shallow water equations is considered for numerical simulation. To advance the governing equations in time the semi-implicit approach combined with the three level leapfrog method for the time discretization of the temporal derivatives, is used. The second-order central, the fourth-order compact, the sixth-order super compact finite difference and the pseudo-spectral methods are applied to spatial differencing of the shallow water equations.

For a quantitative assessment of accuracy, the global measures of the distribution of mass between potential vorticity iso-levels, called mass error, is used. In addition, based on the results of some recent investigations, decomposing a flow into a balanced part representing vortical flow and an unbalanced part representing freely propagating inertia-gravity waves has found significant usefulness in the accuracy analysis of the numerical solution of the primitive equations. Therefore, in this work the representation of balance and imbalance are also used for quantitative assessment of the numerical accuracy.

It is found that the numerical diffusion plays a crucial role in the accuracy of numerical solution. Results show that using lower order hyper-diffusion terms degrades the numerical accuracy. Furthermore, results show that using higher orders of hyper-diffusion for the sixth-order super compact and pseudo-spectral method is essential. In addition, it is observed that based on the quantitative measures of the mass error, using a sixth-order hyper-diffusion term or using the eighth-order compact spatial filter has nearly a similar effect on the numerical accuracy of the shallow water equations generated by the sixth-order super compact finite difference and the pseudo-spectral methods. The same conclusion is valid based on the quantitative measures of the imbalance in particular for hyper-diffusion terms with orders greater than two.

Key words: Shallow water equations, Super compact method, Hyper-diffusion, Pseudo-spectral method, Compact filter

۱ مقدمه

است. لازم به ذکر است که فرابخش اضافه شده هیچ گونه ارتباطی به پخش فیزیکی ندارد و می باید تا حد امکان کم باشد.

تحقیق حاضر به بررسی اثر به کارگیری جملات فرابخش متفاوت بر دقت حل عددی شکل اویلری معادلات آب کم عمق بر حسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع می پردازد. در کار مربوط به قادر و همکاران (۲۰۰۹)، اثر روش های مختلف حل عددی بر دقت حل معادلات آب کم عمق با یکدیگر مقایسه شده است، در حالی که در این تحقیق تأثیر جملات فرابخش و نیز پالایه فشرده بر دقت حل عددی معادلات آب کم عمق در هریک از روش ها مورد بررسی قرار می گیرد. در واقع این نکته که استفاده از جمله فرابخش می تواند از وقوع

هنگام حل عددی شکل اویلری معادلات آب کم عمق بر حسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع (یا متغیرهای وابسته دیگر) می باید ناپایداری غیرخطی را در حل عددی به نحوی مهار و از بروز آن جلوگیری کرد. یکی از راه حل های رایج که بسیاری از محققان، از جمله دریچل و همکاران (۱۹۹۹) برای معادلات آب کم عمق و دیگران برای شبیه سازی سایر شاره های تراکم ناپذیر (از جمله یائو و همکاران، ۱۹۹۵؛ ماریوتی و همکاران، ۱۹۹۴) به کار گرفته اند، شامل اضافه کردن یک جمله میراکننده به شکل اویلری معادله تاوایی، هنگام حل عددی است. وظیفه اصلی این جمله فرابخش (Hyperdiffusion) از دیدگاه عددی، حفظ پایداری حل و جلوگیری از وقوع ناپایداری غیرخطی در طی انتگرال گیری از معادلات

تاوایی، واگرایی و ارتفاع معرفی می شود و سپس روش های گسسته سازی مکانی معادلات را ذکر می کنیم. در بخش ۳ معادله تاوایی بیان می شود و علاوه بر جملات فرایخش پالایه مکانی ای که به جای جمله فرایخش می تواند در معادله تاوایی مورد استفاده قرار گیرد، معرفی می شود. در بخش ۴ نیز نتایج حاصل از حل عددی ذکر می شود و در ادامه در بخش ۵ به مقایسه دو روش آبرفشرده مرتبه شش و روش طیفی وار می پردازیم و در انتها در بخش ۶ از مباحث صورت پذیرفته نتیجه گیری خواهد شد.

۲ معادلات آب کم عمق

در تحقیق حاضر معادلات آب کم عمق در صفحه f بر حسب متغیرهای تاوایی (ζ) ، واگرایی (δ) و ارتفاع به صورت زیر در نظر گرفته می شود (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta + f)\mathbf{v}] \quad (1)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathcal{H} h' = f(\zeta - fh') + 2J(u, v) - \nabla \cdot (\mathbf{v}\delta) \quad (2)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \delta = -\nabla \cdot (\mathbf{v}h') \quad (3)$$

در معادلات بالا f پارامتر کوریولیس، \mathbf{v} میدان سرعت با مولفه های u و v به ترتیب در دو راستای x و y روی صفحه دکارتی، $c = (g\bar{h})^{1/2}$ ، $J(u, v) = (\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y) - (\partial u/\partial y)(\partial v/\partial x)$ \bar{h} ارتفاع میانگین و \mathcal{H} بیان کننده عملگر هلمهولتز پیراسته است که به صورت $\mathcal{H} = c^2 \nabla^2 - f^2$ تعریف می شود. همچنین از متغیر جدید h' برای بیان ارتفاع استفاده شده است، که به صورت $h = \bar{h}(1+h')$ تعریف می شود. همچنین در ادامه سمت راست دو معادله واگرایی و ارتفاع با استفاده

ناپایداری غیرخطی در شبیه سازی های عددی، جلوگیری کند، بر اساس بسیاری از پژوهش های موجود (برای مثال دورن، ۱۹۹۹) و نیز نتایج عرضه شده در پژوهش فعلی، امری شناخته شده است. اما افزودن میرایی مصنوعی به صورت جمله فرایخش، در عین جلوگیری از بروز ناپایداری غیرخطی، می تواند بر دقت حل عددی تأثیر منفی بگذارد. در واقع در انتخاب و تنظیم روش افزودن میرایی، لازم است هم زمان با حفظ پایداری حل عددی، میزان تأثیر منفی بر دقت حل تا حد امکان کاهش یابد.

مسئله تأثیر منفی میرایی مصنوعی، هنگامی که از روش های با توانایی تفکیک زیاد (مانند روش طیفی وار یا روش های فشرده) برای حل عددی معادلات استفاده می شود، اهمیت بیشتری پیدا می کند. چرا که از یک طرف برای افزایش دقت حل عددی، روشی با دقت زیاد مورد استفاده قرار گرفته است، ولی از طرف دیگر، استفاده نکردن از میرایی متناسب با ذات روش عددی به کار گرفته، می تواند با اثر گذاشتن نامطلوب بر دقت، باعث کاهش دقت حل عددی شود.

با توجه به نکاتی که در بالا ذکر شد، مقاله حاضر اثر روش های متفاوت وارد کردن میرایی مصنوعی را بر دقت حل عددی معادلات آب کم عمق در صفحه f ، مورد بررسی قرار خواهد داد. در پژوهش حاضر برای حل معادلات آب کم عمق و گسسته سازی مکانی آنها از چهار روش حل عددی استفاده شده که شامل روش های تفاضل متناهی آبرفشرده (Super compact) مرتبه ششم، فشرده مرتبه چهارم، مرتبه دوم مرکزی و روش طیفی وار هستند. در نهایت با محاسبه خطاهای حل عددی از دیدگاه های متفاوت، تأثیر میزان پخش پیشنهادی بر دقت حل عددی معادلات، مورد بررسی بیشتر قرار می گیرد.

در ادامه ابتدا معادلات آب کم عمق بر حسب متغیرهای

این میدان را از روی میدان‌های واگرایی و تاوایی محاسبه کرد. برای رسیدن به این منظور، از معادلات پواسون به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\nabla^2 \psi = \zeta, \quad \nabla^2 \chi = \delta \quad (6)$$

پس از حل معادلات بالا و به دست آمدن تابع جریان (ψ) و پتانسیل سرعت (χ)، مؤلفه‌های میدان باد را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

برای حل معادلات بیضوی هلمهولتز و پواسون در کار حاضر، از روش گرادیان هم‌یوغ (Conjugate Gradient) استفاده می‌کنیم. برای جزئیات مربوط به این الگوریتم به مراجع اسمولارکی یویچ و مارگولین (۱۹۹۴، ۲۰۰۰) و ایزرلس (۱۹۹۶) مراجعه شود.

۲-۲ روش‌های گسسته‌سازی مکانی معادلات

همان‌طور که ذکر شد، برای گسسته‌سازی بخش مکانی معادلات آب کم‌عمق در این تحقیق از چهار روش حل عددی استفاده می‌شود.

جزئیات مربوط به فرمول‌بندی روش‌های فشرده مرتبه چهارم و آب‌فشرده مرتبه ششم در کار اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۵) آمده است. در اینجا فقط روابط آب‌فشرده مرتبه ششم برای برآورد مشتق اول و دوم بیان می‌شود. مجموعه اول برای برآورد مشتق اول، شامل φ ، φ' و φ''' است.

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1} - \varphi_{j-1} - 2d\varphi'_j - \frac{1}{60}d^3\varphi'''_{j-1} \\ - \frac{3}{10}d^3\varphi'''_j - \frac{1}{60}d^3\varphi'''_{j+1} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_{j+1} - 2\varphi'_j + \varphi'_{j-1} - \frac{1}{12}d^2\varphi''_{j-1} \\ - \frac{5}{6}d^2\varphi''_j - \frac{1}{12}d^2\varphi''_{j+1} = 0 \end{aligned}$$

از تعریف $S_\delta = f(\zeta - fh') + 2J(u, v) - \nabla \cdot (\mathbf{v}\delta)$ و $S_h = -\nabla \cdot (\mathbf{v}h')$ نمایش داده می‌شود. هنگام حل عددی، این معادلات با استفاده از روش نیمه‌ضمنی (Semi implicit) (ریچی، ۱۹۸۸) فرمول‌بندی می‌شوند. در ادامه به نحوه فرمول‌بندی معادلات با استفاده از روش پیش‌گفته خواهیم پرداخت.

۱-۲ فرمول‌بندی نیمه‌ضمنی

در روش نیمه‌ضمنی لازم است تا با جملات مسئول انتشار امواج گرانی در معادلات آب کم‌عمق به صورت خاصی برخورد شود. جملات مسئول انتشار امواج گرانی در معادلات واگرایی و ارتفاع وجود دارند و به همین دلیل روش نیمه‌ضمنی تنها بر این معادلات اعمال می‌شود. پس از اعمال روش نیمه‌ضمنی و به کارگیری روش لیپ‌فراگ برای گسسته‌سازی زمانی معادلات و اجرای پاره‌ای محاسبات جبری، معادلات (۲) و (۳) به شکل دو معادله هلمهولتز درمی‌آیند.

با تعریف دو متغیر جدید به صورت $\bar{h}' = (h'^{n+1} + h'^{n-1})/2$ و $\bar{\delta} = (\delta^{n+1} + \delta^{n-1})/2$ می‌توان دو معادله هلمهولتز به دست آمده را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left(\mathcal{H} - \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) \bar{h}' = \quad (4)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{h'^{n-1}}{\Delta t} + S_h^n \right) + \left(\frac{\delta^{n-1}}{\Delta t} + S_\delta^n \right) \\ \bar{\delta} = -\frac{\bar{h}'}{\Delta t} + \left(\frac{h'^{n-1}}{\Delta t} + S_h^n \right) \end{aligned} \quad (5)$$

در روابط بالا، بالانویس n نشان‌دهنده گام زمانی است. در این صورت با داشتن مقادیر \bar{h}' و $\bar{\delta}$ و استفاده از دو متغیر تعریف شده، مقدار δ و h' را در زمان $n+1$ به دست می‌آوریم.

هنگام حل عددی معادله (۴) با توجه به وجود جملات S_δ^n و S_h^n در این رابطه، به میدان باد نیاز است و می‌باید

فرارفت-پخش تبدیل شده است و برای حفظ پایداری خطی برای گسسته‌سازی زمانی آن، صرف نظر از مرتبه میرایی، می باید جمله میراکننده در سمت راست معادله (۱۰) با استفاده از یک روش پس رو گسسته شود. با گسسته‌سازی معادله (۱۰) خواهیم داشت:

$$\zeta^{n+1} = \zeta^{*n+1} + 2\Delta t D(\zeta^{n+1}) \quad (11)$$

که در آن، $\zeta^{*n+1} = \zeta^{n-1} - 2\Delta t \nabla \cdot [(\zeta^n + f)\mathbf{v}^n]$ ، جواب معادله تاوایی میرا نشده (۱) در مرحله زمانی $n+1$ است. بنابراین جواب معادله تاوایی میرا شده در مرحله زمانی $n+1$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \zeta^{n+1} &= (1 - 2\Delta t D)^{-1} \zeta^{*n+1} \\ &\equiv (1 + 2\Delta t D)\zeta^{*n+1} + \text{h.o.t} \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن، h.o.t جملات مرتبه بالاتر را نشان می دهد. قطع $(1 - 2\Delta t D)^{-1}$ به دو جمله اول آن یعنی $(1 + 2\Delta t D)$ موجب می شود تا طرحواره گام زمانی برای تاوایی صریح شود. هر یک از عملگرهای ضمنی $(1 - 2\Delta t D)^{-1}$ یا عملگر صریح $(1 + 2\Delta t D)$ را می توان در حکم یک عملگر پالاینده در نظر گرفت. نمونه های شناخته شده چنین عملگرهایی به صورت زیر است:

$$D_p = -\nu_p (-1)^{p/2} \nabla^p \quad (13)$$

که در آن، p نشان دهنده میزان پخش و ν_p ضریب پخش، عدد بسیار کوچکی است که با توجه به تعداد نقاط شبکه و پارامترهای دیگر محاسبه می شود. در اینجا با پیروی از دریچل و همکاران (۱۹۹۹) ضریب پخش را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$\nu_p = \frac{\bar{h} Q}{k_{\max}^p}, k_{\max} = n_g / 2 \quad (14)$$

در روابط فوق n_g تعداد نقاط شبکه و Q به صورت زیر

تعریف می شود:

$$Q = \max \left| \frac{\zeta - fh'}{h} \right| \quad (15)$$

که مقدار بیشینه روی همه نقاط حوزه محاسبه، به دست

و مجموعه دوم برای برآورد مشتق دوم، شامل φ ، φ'' و φ'''' است.

$$\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1} - d^2 \varphi_j'' - \frac{1}{360} d^4 \varphi_{j-1}'''' \quad (9)$$

$$-\frac{7}{90} d^4 \varphi_j'''' - \frac{1}{360} d^4 \varphi_{j+1}'''' = 0$$

$$\varphi_{j+1}'' - 2\varphi_j'' + \varphi_{j-1}'' - \frac{1}{12} d^2 \varphi_{j-1}''''$$

$$-\frac{5}{6} d^2 \varphi_j'''' - \frac{1}{12} d^2 \varphi_{j+1}'''' = 0$$

جزئیات مربوط به روش طیفی وار را نیز دوران (۱۹۹۹) عرضه کرده است.

۳ معادله تاوایی

تحول زمانی تاوایی با تقریب خوبی از حضور امواج گرانی-لختی کوچک دامنه تأثیر نمی پذیرد و بنابراین برای گسسته‌سازی زمانی معادله تاوایی می توان از روش های متفاوتی استفاده کرد. در اینجا برای همخوانی با دو معادله دیگر، گسسته‌سازی زمانی این معادله نیز به روش لپ فراگ صورت می گیرد.

تجربیات عددی، نشان داده است که برای جلوگیری از بروز ناپایداری غیرخطی و مهار خطای ناشی از اندرکنش جملات غیرخطی در طول حل عددی، نیاز است تا مقداری پخش عددی به حل وارد شود که این هدف با اضافه کردن میرایی به معادله تاوایی، تأمین می شود. یکی از راه حل های رایج که بسیاری از محققان به کار گرفته اند، شامل اضافه کردن یک جمله میراکننده به شکل اویلری معادله تاوایی، هنگام حل عددی است. شکل میراشده معادله تاوایی (۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta + f)\mathbf{v}] + D(\zeta) \quad (10)$$

که در آن، D یک عملگر میراکننده را نشان می دهد. معادله فوق یک معادله فرارفت نیست و به معادله

برای به دست آوردن یک پالایه مرتبه هشتم، ضرایب موجود در معادله (۱۶) را می‌باید به صورت زیر انتخاب کرد:

$$\alpha_0 = 0.5, \alpha_1 = 0.66624, \alpha_2 = 0.16688 \quad (17)$$

$$2a_0 = 0.99965, a_1 = 0.66652, a_2 = 0.16674$$

$$a_3 = 4 \times 10^{-5}, a_4 = -5 \times 10^{-6}$$

هنگام حل عددی، پالایه (۱۶) در هر دو راستای محورهای مختصات مورد استفاده قرار می‌گیرد. الگوریتم‌های عددی متفاوت را می‌توان با ترکیب پالایه‌های مکانی با روش تفاضل محدود آب‌فشرده مرتبه دو، چهار و شش و نیز روش طیفی وار ساخت. بهتر است که یک نام قراردادی برای رجوع دادن به الگوریتم‌های عددی مشابه انتخاب کنیم. الگوریتم‌های آب کم عمق تفاضل محدود، برای عملگرهای نوع پخشی مرتبه p در معادله (۱۳) با نماد SC_{ord}^{Dp} نمایش داده می‌شوند و برای پالایه گسسته مرتبه هشت از نماد SC_{ord}^{F8} استفاده می‌شود. زیرنویس ord ، مرتبه روش تفاضل متناهی را نشان می‌دهد، که در اینجا مساوی با ۲، ۴ و ۶ است. p در بالا همان عددی است که برای عملگر پخشی در معادله (۱۳) مورد استفاده قرار می‌گیرد. به همین شیوه برای روش طیفی وار از قراردادهای PS^{Dp} و PS^{F8} استفاده می‌کنیم.

۴ نتایج حل عددی

برای آنکه امواج گرانی هنگام حل عددی تحریک نشوند و بتوان سهم درست آنها را در طول حل عددی در نظر گرفت، می‌باید با توجه به شرط پایداری ($c\Delta t / \Delta x \leq 1$) میزان گام زمانی را به اندازه کافی کوچک در نظر گرفت. در این کار شبکه‌های یکنواخت با تفکیک ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ و ۵۱۲ به ترتیب با گام‌های زمانی ۰/۰۱، ۰/۰۵، ۰/۰۲۵ و ۰/۰۱۲۵ مورد استفاده قرار می‌گیرند. لازم به ذکر است که در حین کار مشخص شد که در شبکه با تفکیک ۵۱۲، در کاربست برخی از روش‌ها لازم است که برای حفظ

می‌آید. عملگرهای با $p > 2$ معمولاً فرایخش نامیده می‌شوند. انتخاب توان p در جمله فرایخش اضافه شده به معادله تاوایی که عددی صحیح است، برای روش‌های عددی گوناگون، متفاوت است. در واقع در یک حل عددی، هرچه بتوان از توان بزرگ تری استفاده کرد، میراشدن امواج با مقیاس کوچک تر بیشتر صورت می‌گیرد و بنابراین میرایی کمتری در امواج با مقیاس بزرگ خواهیم داشت و در نتیجه از دقت حل کمتر کاسته می‌شود.

قاعده اصلی ما این است که اثر عملگر پخشی باید موجب حفظ پایداری عددی شود و از طرفی کمترین تأثیر منفی را بر دقت حل معادلات داشته باشد. در اینجا سه توان متفاوت ۲، ۴ و ۶ را برای p انتخاب می‌کنیم و اثر این عملگرها را بر دقت حل معادلات آب کم عمق در طرحواره‌های متفاوت مورد آزمایش قرار خواهیم داد.

۳-۱ پالایه مکانی

راه حل دیگری که برای جلوگیری از به وجود آمدن ناپایداری غیرخطی در طی حل عددی معادلات آب کم عمق وجود دارد، استفاده از یک پالایه مکانی به جای جمله فرایخش در طول حل عددی است. در ادامه به معرفی پالایه مکانی فشرده مرتبه هشت که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است، می‌پردازیم.

با استفاده از کار کوک و کابوت (۲۰۰۵) برای یک میدان گسسته F با مقادیر F_j در یک جهت (مانند x) رابطه پالایه به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{i=0}^{i=2} \alpha_i (\hat{F}_{j-i} + \hat{F}_{j+i}) = \sum_{i=0}^{i=4} a_i (F_{j-i} + F_{j+i}) \quad (16)$$

که در آن، \hat{F}_j مقدار پالایه F در نقطه j است.

حال با انتخاب‌هایی که برای ضرایب رابطه (۱۶) وجود دارد، می‌توان پالایه‌هایی با خواص طیفی گوناگون به دست آورد. کوک و کابوت (۲۰۰۵) نشان دادند که

داده می شوند و پس از آن به تشریح نتایج پرداخته می شود.

در روش اول برای محاسبه میزان خطا، توانایی روش برای پایسته نگه داشتن میزان جرم میان دو پربند (Contour) تاوایی پتانسیلی در حکم ملاک در نظر گرفته می شود. پایستگی مادی تاوایی پتانسیلی و پایستگی محلی جرم، منجر به پایستگی کلی جرم بین دو پربند تاوایی پتانسیلی می شود.

باید توجه کرد که معادلات پیوستگی (۱) و (۲)، منجر به پایستگی مادی تاوایی پتانسیلی که کمیت دینامیکی مهمی با تعریف زیر است، می شوند:

$$q = \frac{f + \zeta}{1 + h'} \quad (18)$$

خطاهای گسسته سازی در مشتقات مکانی و طرحواره گام زمانی در معادلات تاوایی و جرم از یک طرف، و استفاده از میرایی تاوایی از طرف دیگر، پایستگی مادی تاوایی پتانسیلی را در شکل گسسته معادلات آب کم عمق از بین می برد. در اینجا میرایی تاوایی نقش دو گانه ای بازی می کند. یعنی از یک طرف موجب میرایی تاوایی پتانسیلی می شود و از طرف دیگر تا حدی خطاهای گسسته سازی در تاوایی را کاهش می دهد و میرا می کند. تحلیل این مطلب که کدام اثر حاکم خواهد بود، را می توان با استفاده از آزمایش های عددی دقیق مشخص کرد. در هر مورد، تغییرات جرم بین دو پربند تاوایی پتانسیلی می تواند نشانه ای به ما بدهد از اینکه چطور پایستاری مادی تاوایی پتانسیلی و پایستاری محلی جرم با الگوریتم های عددی حفظ می شود.

برای اندازه گیری خطای جرم مطابق با کار در پچل و همکاران (۱۹۹۹) میدان تاوایی پتانسیلی اولیه را به ناحیه هایی به صورت R_j ($j = -N, \dots, N$) تقسیم بندی می کنیم که هر کدام از این نواحی با یک تراز q_j متناظر است. مقدار جرم در هر ناحیه به صورت

پایداری عددی در ضمن انتگرال گیری، گام زمانی را کمی کوچک تر از 0.0125 در نظر گرفت.

در حل عددی حاضر ناحیه حل، یک حوزه با مرزهای دوره ای مضاعف است و محدوده تغییرات هریک از محورهای مختصات در بازه $[-\pi, \pi]$ قرار دارد. برای حل عددی $\bar{h} = 1$ ، شعاع راسبی $L_R = c/f = 0.5$ و $f = 4\pi$ مورد استفاده قرار گرفته است. استفاده از پارامتر کوریولیس، به صورت نشان داده شده، متضمن این نکته است که هر واحد از زمان برابر با یک روز است. با تعیین شرایط اولیه برای میدان تاوایی پتانسیلی می توان سایر کمیت های وابسته یعنی تاوایی، ارتفاع و واگرایی را با توجه به اصل وارون پذیری تاوایی پتانسیلی (هاسکینز و همکاران، ۱۹۸۵) و با استفاده از شرایط توازن (محب الحجه و دریچل، ۲۰۰۱) محاسبه کرد. برای راه اندازی ناپایداری، یک پریشیدگی (Perturbation) با دامنه کوچک به میدان تاوایی پتانسیلی اعمال می شود. جزئیات مربوط به شرایط اولیه و پریشیدگی را دریچل و همکاران (۱۹۹۹) عرضه کرده اند. با توجه به تولید امواج گرانی-لختی، برای کاستن از حساسیت نسبت به شرایط اولیه، از یک پریشیدگی ده برابر کوچک تر از پریشیدگی استفاده شده در کار دریچل و همکاران (۱۹۹۹) استفاده می کنیم.

در این بخش نتایج حاصل از شبیه سازی معادلات آب کم عمق با استفاده از روش های عددی مورد بررسی و اثر میزان پخش عددی بر دقت حل آنها مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرد. از آنجا که ابزار تحلیلی خاصی برای بررسی دقت حل معادلات حاکم، در اختیار ما نیست، بررسی دقت حل حاضر از دو طریق صورت می گیرد. در روش اول میزان خطای تولید شده از روش های متفاوت (خطای جرم) و در روش دوم میزان نبود توازن های پدید آمده با هر یک از روش ها، به منزله ملاک سنجش، مورد استفاده قرار می گیرد. در اینجا ابتدا هریک از این روش ها شرح

زیر محاسبه می‌شود:

$$m_j = \iint_{R_j} h dx dy \quad (19)$$

در حالت ایده آل مقدار m_j با زمان تغییر نمی‌کند ولی همان گونه که در بالا ذکر شد، هنگام حل عددی، به دلیل تقریب‌های وارد شده، مقدار m_j تغییر می‌کند و در واقع همین تغییرات، برای اندازه‌گیری میزان خطای تولید شده در طول فرایند شبیه‌سازی عددی به کار گرفته می‌شوند. میزان خطا در زمان t به صورت ریشه میانگین مربعات (root mean square) (rms) اختلاف میان $m_j(t)$ و $m_j(0)$ تعریف می‌شود. در نتیجه این خطا (که مقدار آن با تقسیم بر جرم کل $4\pi^2 \bar{h}$ بهنجار شده است) به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi^2 \bar{h}} \left(\frac{1}{2N} \sum_j [m_j(t) - m_j(0)]^2 \right)^{1/2} \quad (20)$$

مجموع بالا برای همه j ها به جز $j = 0$ محاسبه می‌شود. ناحیه R_0 شامل همه ذرات شاره دارای تاوایی پتانسیلی زمینه، یعنی بی‌هنجاری صفر است. اضافه کردن این ناحیه در مجموع بالا، به‌طور تقریبی مقدار ε را در روش‌های شبیه‌سازی عددی افزایش می‌دهد، که دلیل آن پخش تاوایی پتانسیلی در این نوع از شبیه‌سازی‌ها است.

برای محاسبه m_j می‌باید R_j را با دقت بسیار خوبی مشخص کرد. مطابق با روش دریچل و همکاران (۱۹۹۹) و همچنین یائو و همکاران (۱۹۹۵)، مقادیر q و h را به یک شبکه ریزتر از شبکه موردنظر، برای مثال به شبکه‌ای هشت برابر ریزتر در هر جهت، درون‌یابی می‌کنیم. سپس مقدار j در شبکه ریز با استفاده از نزدیک‌ترین عدد صحیح به مقدار $(q - \bar{q}) / \Delta q$ (مقدار Δq به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta q = \frac{q_{\max} - q_{\min}}{n_c + 1} \quad (21)$$

در رابطه بالا $n_c + 1$ نشان‌دهنده نواحی تاوایی پتانسیلی

است که با n_c پربند از یکدیگر جدا شده‌اند.)، محاسبه و مقدار h در این نقطه که در مساحت یک مربع از خانه‌های شبکه ریز ضرب شده، به m_j اضافه می‌شود.

در روش دوم تحلیل همان‌طور که اشاره شد، میزان نبود توازن ایجاد شده در طول حل عددی مورد توجه قرار می‌گیرد. تقسیم کردن یک شارش به یک بخش متوازن که شارش تاواری (Vortical) را نشان می‌دهد و یک بخش نامتوازن که انتشار آزادانه امواج گرانی لختی را نشان می‌دهد، نقش مهمی در بررسی دقت حل عددی معادلات بسط دارد. برای محاسبه نبود توازن، می‌بایست ابتدا میدان‌های متوازن را محاسبه کرد و سپس اختلاف میان میدان‌های حاصل از حل عددی و میدان‌های متوازن، میزان نبود توازن را به دست خواهد داد. میدان‌های متوازن با وارون کردن میدان تاوایی پتانسیلی با استفاده از شرایط توازن (محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۰ و ۲۰۰۱؛ محب‌الحجه، ۲۰۰۲) به دست می‌آیند. در کار حاضر از شرایط توازن $\partial^2 \delta / \partial t^2 = \partial^3 \delta / \partial t^3 = 0$ استفاده شده است. روش اندازه‌گیری نبود توازن به صورت زیر است.

در گام‌های زمانی نیم‌روزه، توزیع آنی تاوایی پتانسیلی، وارون شده و یک بردار حالت توازن $X_{bal} = \{u_{bal}, v_{bal}, ch'_{bal}\}$ را تولید می‌کند. بردار پیش‌گفته از بردار حالت معادلات آب کم‌عمق $X = \{u, v, ch'\}$ کسر می‌شود و بردار حالتی برای نبود توازن به صورت $X_{imb} = \{u_{imb}, v_{imb}, ch'_{imb}\}$ به دست می‌دهد. اندازه نبود توازن به صورت نرم l_2 بردار نبود توازن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|X_{imb}\| = \left\{ \frac{1}{2} \bar{h} \left(\frac{2\pi}{n_g} \right)^2 \sum_{i,j=1}^{n_g} (u_{imb}^2 + v_{imb}^2 + c^2 h'_{imb}{}^2) \right\}^{1/2} \quad (22)$$

در ادامه به تشریح نتایج به دست آمده می‌پردازیم.

همچنین در هر دو شکل ۲-الف و ۳-الف که برای شبکه با تفکیک ۱۲۸ رسم شده است، میزان خطای جرم در روز اول انتگرال گیری برای الگوریتم های SC_6^{F8} و PS^{F8} به صورت قابل توجهی کاهش می یابد و با افزایش زمان مجدداً افزایش پیدا می کند. این مطلب نشان می دهد که استفاده از پالایه فشرده مرتبه هشت در انتگرال گیری های کوتاه مدت می تواند نتیجه بهتری نسبت به جملات فرایخس در دقت حل عددی داشته باشد. در هر دو شکل مشاهده می شود که خطای جرم برای جمله فرایخس مرتبه دو به طور قابل توجهی بیشتر است و بنابراین این جمله بر دقت حل عددی معادلات تأثیر منفی می گذارد.

شکل ۴ میانگین زمانی نبود توازن بر حسب تفکیک شبکه را برای الگوریتم های مختلف با میرایی های متفاوت نمایش می دهد. در شکل ۴-الف میزان نبود توازن تولید شده از جمله فرایخس مرتبه دو با استفاده از الگوریتم مرتبه دوم مرکزی، از همه جملات فرایخس دیگر کمتر است و دلیل آن همان طور که قبلاً نیز ذکر شد، ضعف روش عددی مورد استفاده است. اما در شکل های ۴-ب، ۴-ج و ۴-د که به ترتیب برای الگوریتم های آبرفشرده مرتبه چهار، مرتبه شش و روش طیفی وار رسم شده است، ملاحظه می کنیم که برای شبکه های با تفکیک زیاد، میانگین زمانی نبود توازن برای جمله فرایخس مرتبه دو به صورت قابل توجهی کاهش می یابد.

اختلاف میان مقادیر میانگین نبود توازن در شبکه های با تفکیک متفاوت، از یک طرف به دلیل ایجاد خطاهای گسسته سازی و در نتیجه تولید نبود توازن و از طرف دیگر، نقش مثبت میرایی تاوایی در از بین بردن نبود توازن است.

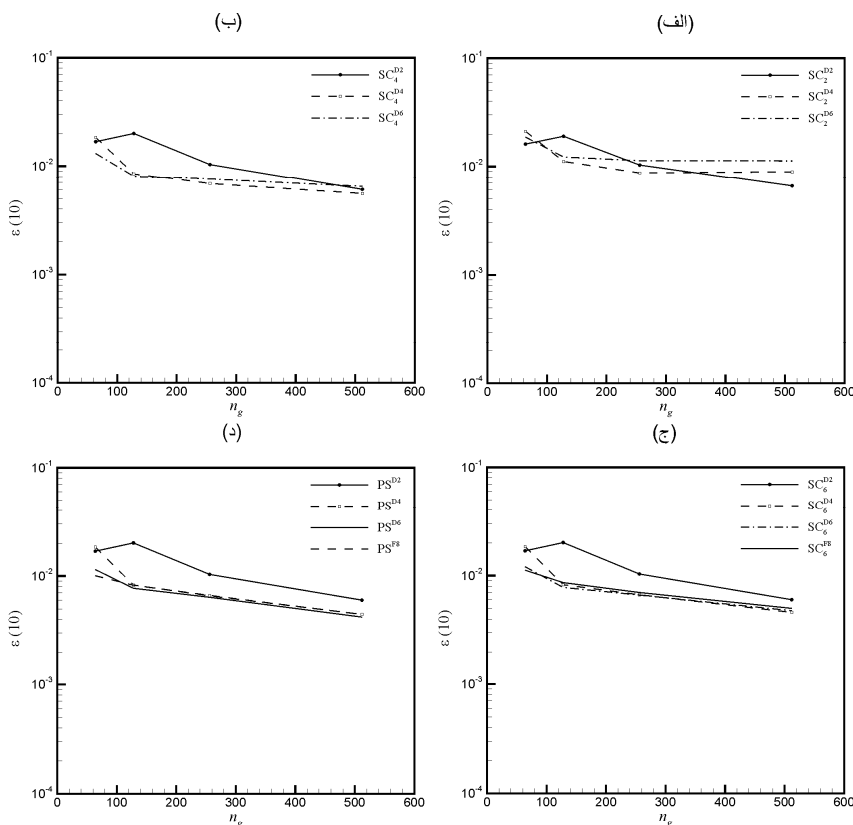
تاوایی پتانسیلی کاهش می یابد و در نتیجه میزان نبود توازن ایجا د شده افزایش پیدا می کند. در مورد پالایه فشرده مرتبه هشت، چون میزان میرایی تاوایی

شکل ۱ خطای جرم بر حسب تفکیک شبکه برای روز دهم انتگرال گیری برای جملات پخش متفاوت و پالایه فشرده مرتبه هشت، برای الگوریتم های متفاوت به کار رفته در این تحقیق را نشان می دهد. در شکل ۱-الف مشاهده می شود که برای روش مرتبه دوم مرکزی و برای شبکه های با تفکیک زیاد، جمله فرایخس مرتبه دو خطای جرم کمتری نسبت به جمله فرایخس مرتبه شش تولید کرده است و در شبکه با تفکیک ۵۱۲ حتی خطای جرم آن کمتر از جمله فرایخس مرتبه چهارم است. این مطلب نشان می دهد که برای روش مرتبه دوم مرکزی که روشی با توانایی تفکیک کم است، انتخاب توان جمله فرایخس با توجه به تفکیک شبکه محدودیت دارد. برای شبکه های با تفکیک کم و متوسط می توان از جمله فرایخس با توان دو و چهار استفاده کرد، ولی برای شبکه های با تفکیک زیاد (مانند شبکه ۵۱۲) جمله فرایخس با توان چهار به بالا منجر به ایجاد ناپایداری محاسباتی در حل عددی می شود. با توجه به این شکل مشاهده می شود که با افزایش توانایی تفکیک روش عددی مورد استفاده، خطای جرم جمله فرایخس مرتبه دوم زیاد می شود و از سایر جملات فاصله می گیرد. همچنین برای روش های عددی با توانایی تفکیک زیاد (روش آبرفشرده مرتبه شش و روش طیفی وار) و در شبکه های با تفکیک زیاد، خطای جرم مربوط به جملات فرایخس مرتبه چهار و شش و نیز پالایه مرتبه هشت تفاوت ناچیزی با یکدیگر دارند.

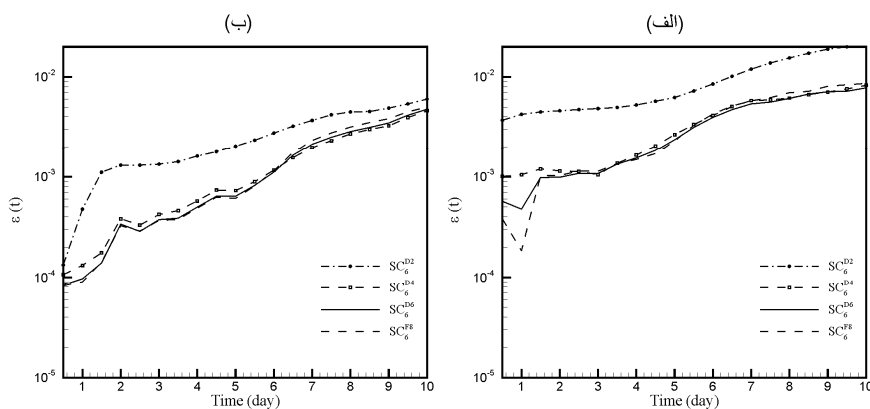
در شکل های ۲ و ۳ تحول زمانی خطای جرم به ترتیب برای الگوریتم های آبرفشرده مرتبه شش و روش طیفی وار با جملات پخشی متفاوت و پالایه مرتبه هشت برای شبکه های با تفکیک ۱۲۸ و ۵۱۲ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود از روز پنجم انتگرال گیری به بعد، خطای جرم برای الگوریتم آبرفشرده مرتبه شش و الگوریتم طیفی وار با جملات فرایخس مرتبه شش، نسبت به پالایه فشرده مرتبه هشت کاهش می یابد.

زیاد تاوایی پتانسیلی در ازبین بردن نبود توازن، و از طرف دیگر استفاده از یک شبکه با تفکیک زیاد که نقش مهمی در کاهش نبود توازن دارد، می‌تواند دست به دست هم دهند و مقدار نبود توازن را بسیار کاهش دهند.

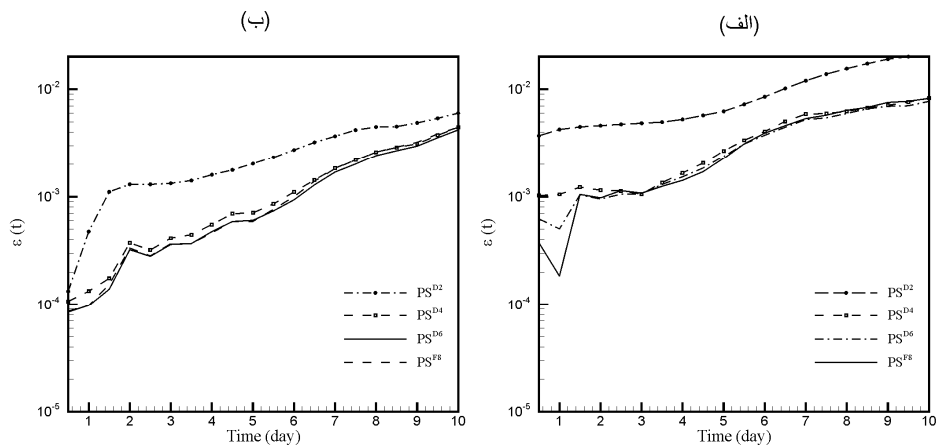
نسبت به جمله فرایخش مرتبه شش کمتر است، میزان نبود توازن تولید شده با استفاده از این پالایه، نسبت به جمله فرایخش مرتبه شش بیشتر خواهد بود. در مورد جمله فرایخش مرتبه دو در شبکه‌های با تفکیک زیاد نیز می‌توان گفت که از یک طرف میرایی



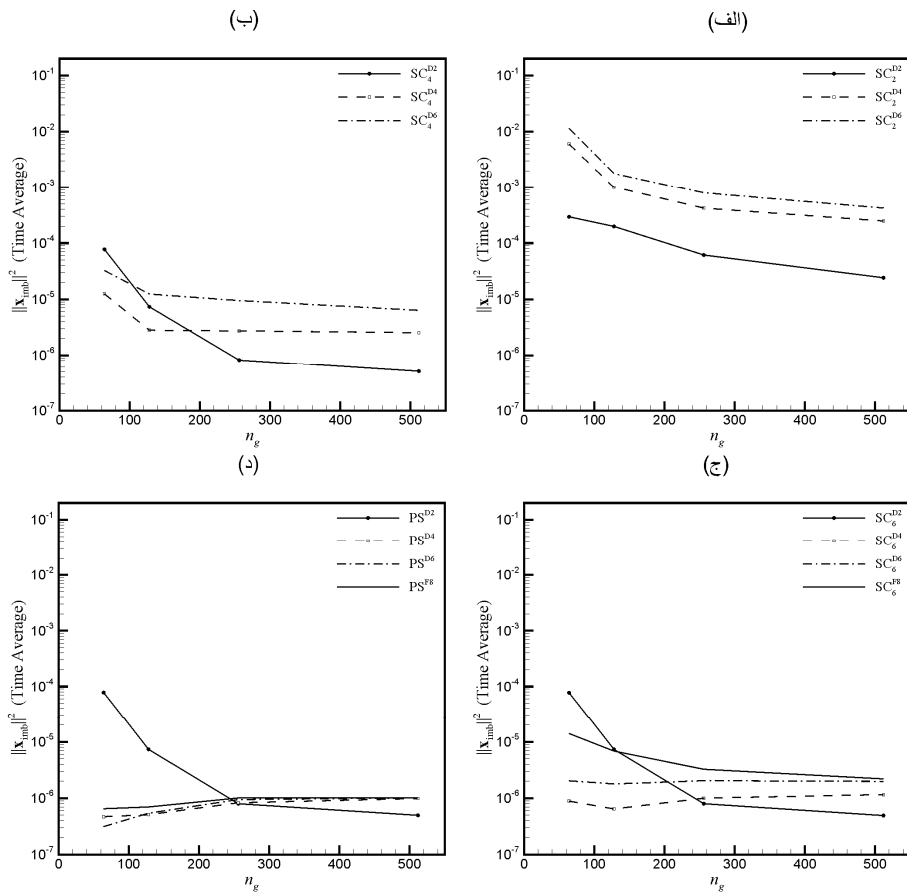
شکل ۱. خطای جرم برحسب تفکیک شبکه برای روز دهم انتگرال‌گیری برای جملات پخش متفاوت برای الگوریتم‌های (الف) SC_2 ، (ب) SC_4 ، (ج) SC_6 و (د) PS .



شکل ۲. تحول زمانی خطای جرم برای الگوریتم SC_6 با جملات پخشی مختلف و پالایه مرتبه هشت برای شبکه‌های با تفکیک (الف) ۱۲۸ و (ب) ۵۱۲.



شکل ۳. تحول زمانی خطای جرم برای الگوریتم PS با جملات پخش متفاوت و پایله مرتبه هشت برای شبکه‌های با تفکیک (الف) ۱۲۸ و (ب) ۵۱۲.



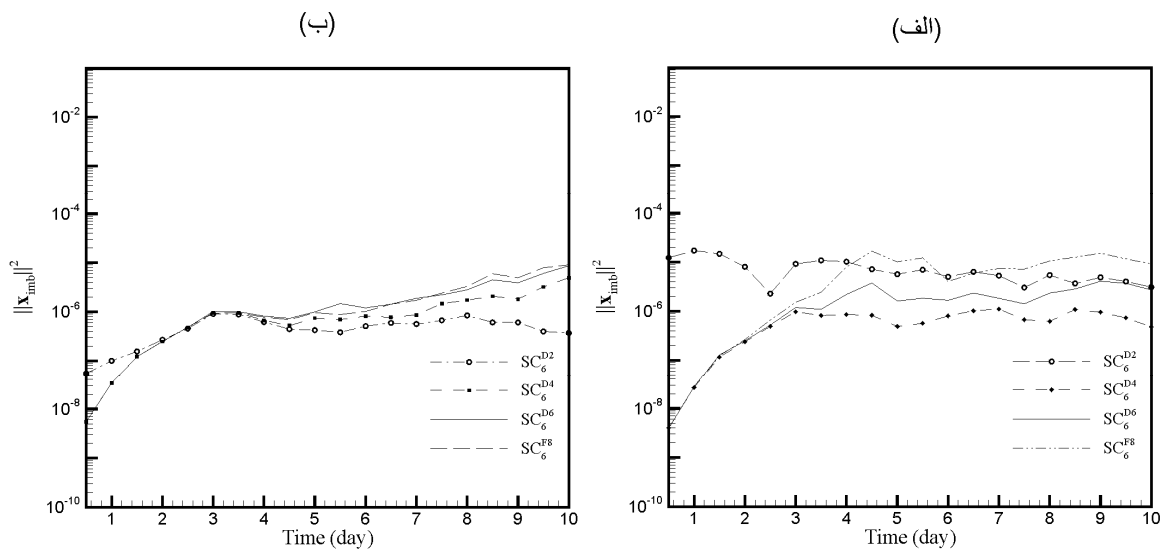
شکل ۴. میانگین زمانی نبود توازن برحسب تفکیک شبکه برای جملات پخش متفاوت برای الگوریتم‌های (الف) SC_2 ، (ب) SC_4 ، (ج) SC_6 و (د) PS .

مرتبه جمله فرایخش را افزایش دهیم، اندازه میرایی شکل‌های ۵ و ۶ نیز تحول زمانی نبود توازن را برای الگوریتم‌های SC_6 و PS با میرایی‌های متفاوت برای

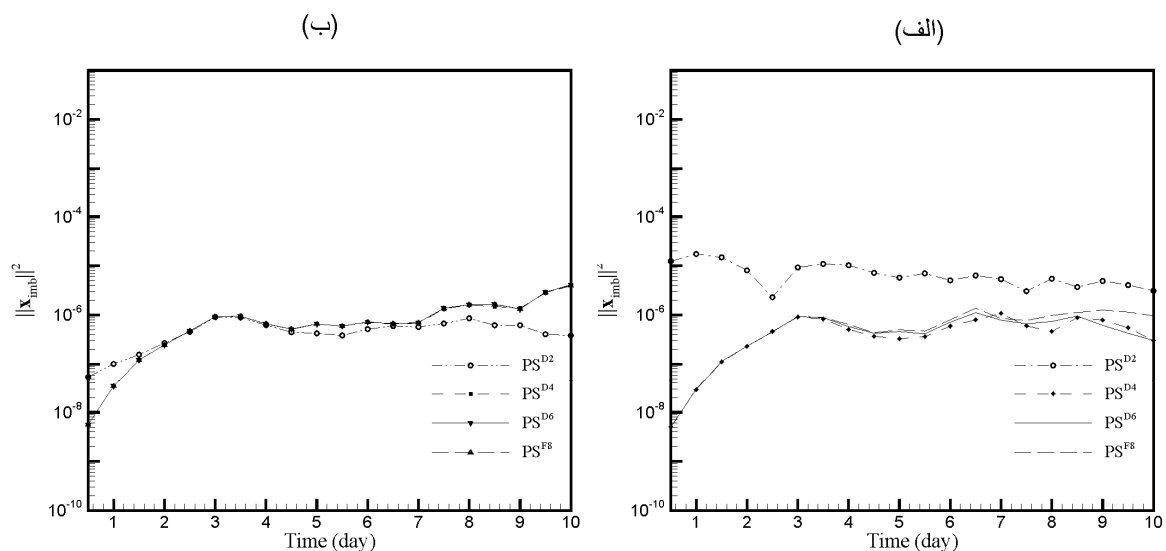
در واقع هریک از شکل‌های ۴-الف، ۴-ب، ۴-ج و ۴-د نشان می‌دهند که برای یک روش عددی خاص که میزان خطای گسسته‌سازی در آن یکسان است، هرچه

درک کنیم، از طیف انرژی نبود توازن بر حسب عدد موج استفاده می‌کنیم (برای مثال دریچل و همکاران، ۱۹۹۹). در شکل‌های ۷ و ۸ این طیف انرژی را برای روز دهم انتگرال‌گیری برای الگوریتم‌های متفاوت با اعمال میرایی‌های متفاوت، به ترتیب برای شبکه‌های ۱۲۸ و ۵۱۲ رسم کرده‌ایم.

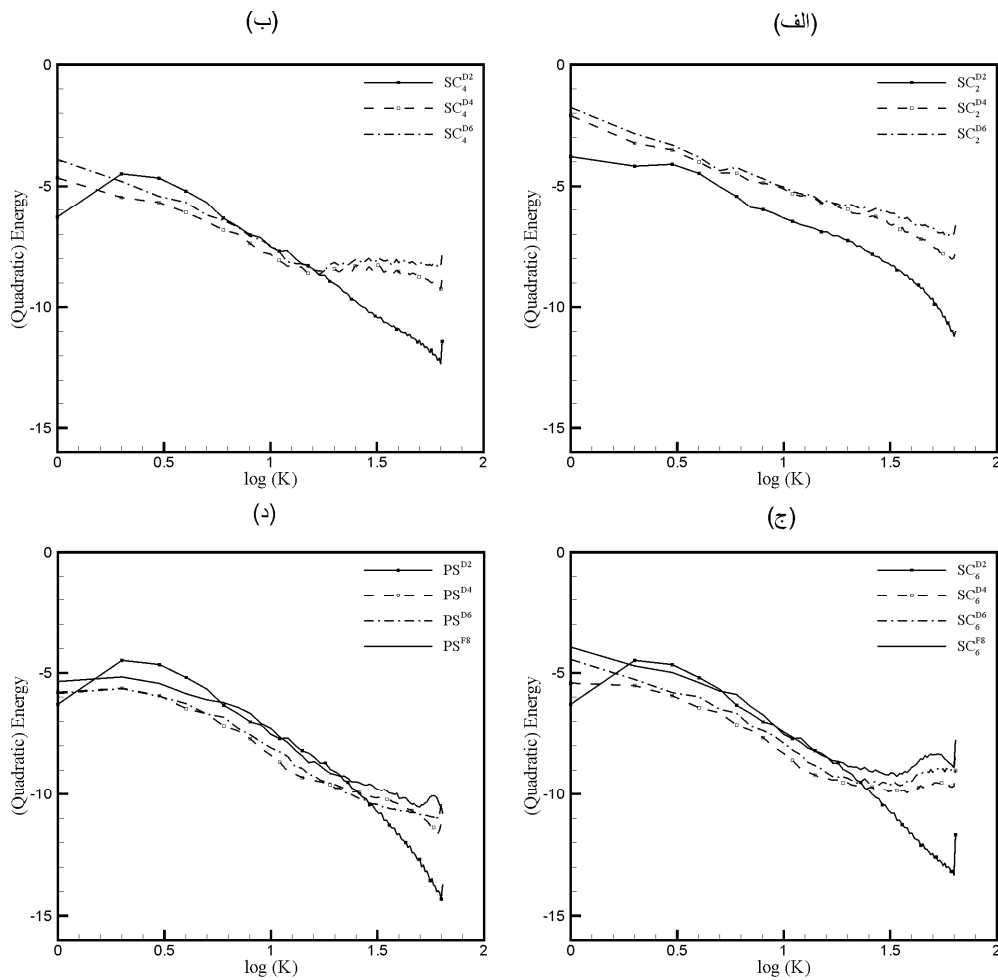
شبکه‌های ۱۲۸ و ۵۱۲ نشان می‌دهند. همان‌طور که در این شکل‌ها پیدا است، با افزایش دقت شبکه، به‌ویژه در روزهای اولیه انتگرال‌گیری، میزان نبود توازن به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. این شکل‌ها نیز نتایج به‌دست آمده در بالا را تأیید می‌کنند. برای اینکه میزان وابستگی نبود توازن به مقیاس را بهتر



شکل ۵. تحول زمانی نبود توازن برای الگوریتم SC_6 با جملات پخشی متفاوت و پالایه مرتبه هشت برای شبکه‌های با تفکیک (الف) ۱۲۸ و (ب) ۵۱۲.



شکل ۶. تحول زمانی نبود توازن برای الگوریتم PS با جملات پخشی متفاوت و پالایه مرتبه هشت برای شبکه‌های با تفکیک (الف) ۱۲۸ و (ب) ۵۱۲.

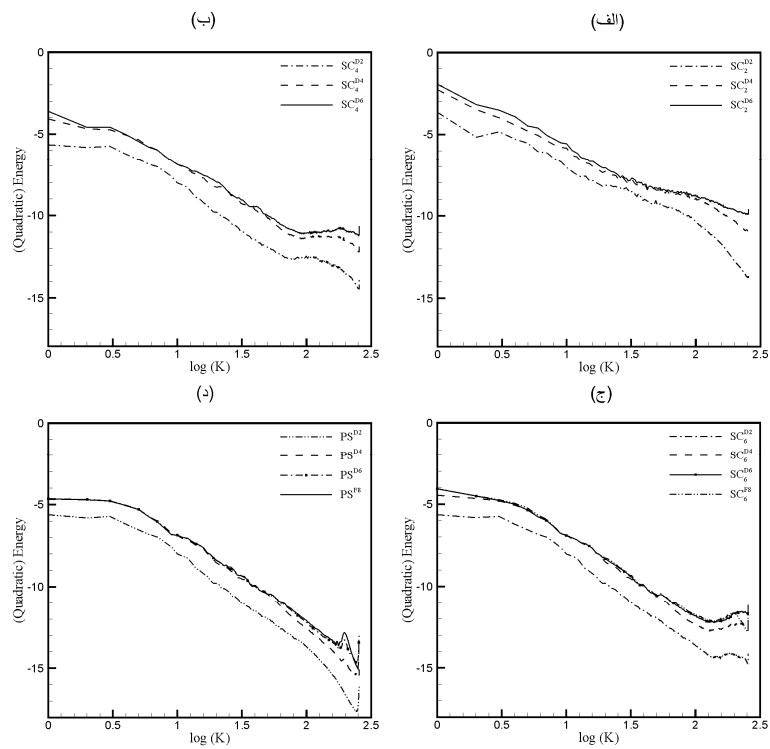


شکل ۷. طیف انرژی نبود توازن برحسب عدد موج برای روز دهم انتگرال‌گیری با جملات پخش متفاوت برای شبکه با تفکیک ۱۲۸ برای الگوریتم‌های (الف) SC_2 ، (ب) SC_4 ، (ج) SC_6 و (د) PS .

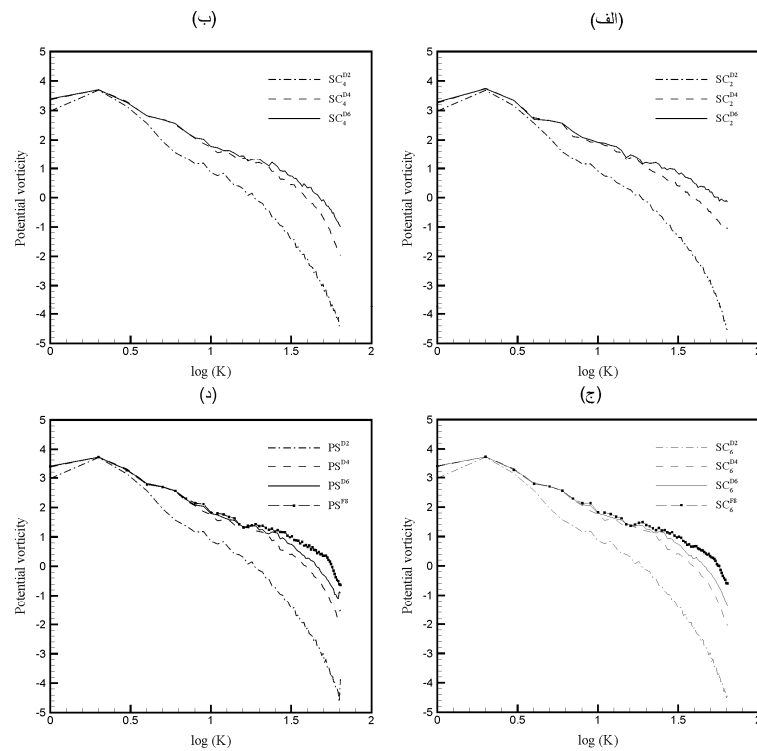
طیف انرژی قرار گیرند که این امری بدیهی محسوب می‌شود.

اگر طیف توان میدان تاوایی پتانسیلی را برحسب عدد موج در روز دهم انتگرال‌گیری برای الگوریتم‌های متفاوت و با اعمال میرایی‌های متفاوت، برای شبکه‌های ۱۲۸ و ۵۱۲ رسم کنیم، شکل‌های ۹ و ۱۰ را خواهیم داشت. در این شکل‌ها مشاهده می‌کنیم که هرچه میزان پخش اضافه‌شده به معادله تاوایی بیشتر باشد (جمله فرایخش مرتبه پایین‌تر)، طیف توان میدان تاوایی پتانسیلی کاهش می‌یابد. این موضوع هرچه به مقیاس ریزتر می‌رویم بیشتر نمایان می‌شود.

با مقایسه شکل‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌کنیم که افزایش تفکیک شبکه موجب می‌شود تا در همه مقیاس‌ها، طیف انرژی نبود توازن برای الگوریتم‌های متفاوت با اعمال جملات فرایخش مرتبه چهار، شش و نیز پالایه مرتبه هشت به یکدیگر نزدیک شوند، در حالی که طیف انرژی نبود توازن الگوریتم‌های متفاوت با اعمال جمله فرایخش مرتبه دوم از بقیه فاصله دارد. در شبکه‌های با تفکیک کمتر که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، به‌خصوص در مقیاس‌های ریز (طول موج‌های کوچک) این تفاوت مشهود است. همچنین مشاهده می‌کنیم که افزایش تفکیک شبکه، موجب می‌شود تا مقیاس‌های ریزتر نیز در



شکل ۸. طیف انرژی نبود توازن برحسب عدد موج برای روز دهم انتگرال‌گیری با جملات پخش متفاوت برای شبکه با تفکیک ۵۱۲ برای الگوریتم‌های (الف) SC_2 ، (ب) SC_4 ، (ج) SC_6 و (د) PS .

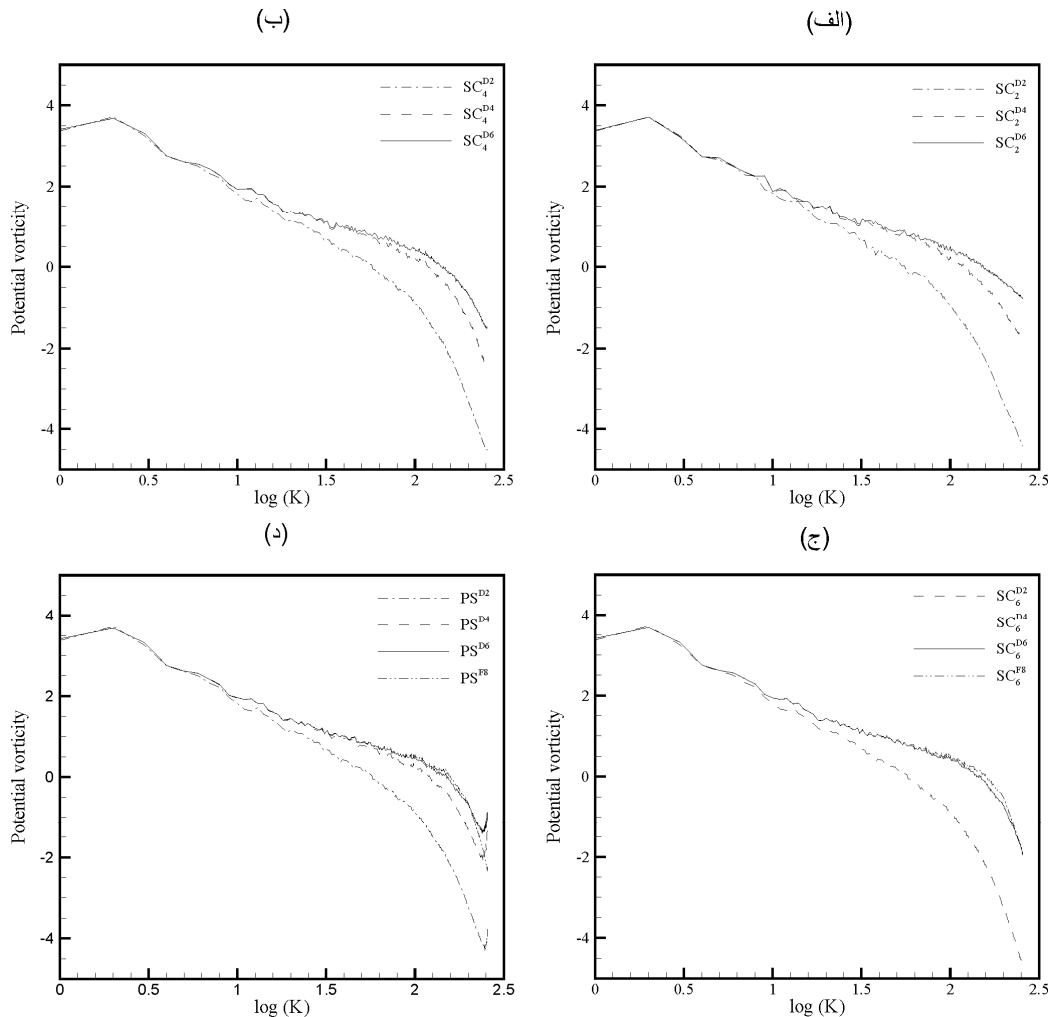


شکل ۹. طیف توان (power spectrum) میدان تاوایی پتانسیلی برحسب عدد موج برای روز دهم انتگرال‌گیری با جملات پخش متفاوت برای شبکه با تفکیک ۱۲۸ برای الگوریتم‌های (الف) SC_2 ، (ب) SC_4 ، (ج) SC_6 و (د) PS .

شکل‌ها نیز نشان می‌دهند که اثر میرایی جمله فرایخش مرتبه دوم روی مقیاس‌های متفاوت و به‌خصوص مقیاس‌های کوچک با سایر میرایی‌ها یعنی جملات فرایخش مرتبه چهار و شش و پالایه مرتبه هشت، کاملاً متفاوت است.

همچنین این شکل‌ها نشان می‌دهند که با افزایش تفکیک شبکه از ۱۲۸ به ۵۱۲ میرایی‌های جملات مرتبه چهار و شش و پالایه مرتبه هشت به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند درحالی‌که میرایی جمله مرتبه دوم همچنان با سایرین اختلاف دارد.

در مقیاس‌های درشت (اعداد موج کوچک) و به‌خصوص در شبکه‌های با تفکیک زیاد (تعداد نقاط شبکه بیشتر)، طیف توان میدان تاوایی پتانسیلی برای جملات فرایخش متفاوت و پالایه فشرده مرتبه هشت تفاوت کمی با یکدیگر دارند. در مورد پالایه مرتبه هشت نیز همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد، چون اندازه میرایی تاوایی نسبت به جمله فرایخش مرتبه شش کمتر است، بنابراین طیف توان میدان تاوایی پتانسیلی برای پالایه فشرده مرتبه هشت، بالاتر از جمله فرایخش مرتبه شش قرار می‌گیرد. این



شکل ۱۰. طیف توان میدان تاوایی پتانسیلی برحسب عدد موج برای روز دهم انتگرال‌گیری با جملات پخش متفاوت برای شبکه با تفکیک ۵۱۲ برای الگوریتم‌های (الف) SC₂، (ب) SC₄، (ج) SC₆ و (د) PS.

جدول ۲. میانگین زمانی نبود توازن.

method	$n_g = 128$	$n_g = 512$
SC_6^{D2}	7.3226E-006	4.9300E-007
SC_6^{D4}	6.4552E-007	1.1588E-006
SC_6^{D6}	1.7868E-006	1.9856E-006
SC_6^{F8}	6.8385E-006	2.1968E-006
PS^{D2}	7.3459E-006	4.9769E-007
PS^{D4}	5.1041E-007	9.8847E-007
PS^{D6}	5.4301E-007	1.0146E-006
PS^{F8}	6.9890E-007	1.0070E-006

۵ نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، اثر پخش عددی بر دقت حل عددی شکل اویلری معادلات آب کم عمق با استفاده از روش های با توانایی تفکیک زیاد مورد بررسی قرار گرفت. روش های مورد استفاده برای گسسته سازی مکانی معادلات روش های آب فشرده مرتبه ششم، فشرده مرتبه چهارم، طیفی وار و مرتبه دوم مرکزی هستند. همچنین علاوه بر افزودن جمله فرایخش به معادله تاوایی، امکان استفاده از یک پالایه فشرده مرتبه هشتم به جای جمله پیش گفته، هنگام اعمال روش های آب فشرده و روش طیفی وار، مورد توجه قرار گرفت.

نتایج به دست آمده برای روش مرتبه دوم مرکزی که روشی با توانایی تفکیک کم است، نشان می دهد که انتخاب توان جمله فرایخش با توجه به تفکیک شبکه محدودیت دارد. برای شبکه های با تفکیک کم و متوسط می توان از جمله فرایخش با توان دو و چهار استفاده کرد،

همان طور که در بالا اشاره شد، مقادیر خطای جرم و نبود توازن در دو روش آب فشرده مرتبه شش و روش طیفی وار نشان می دهد که این دو روش قابل رقابت با یکدیگرند. در جدول های ۱ و ۲ به مقایسه این دو روش از راه مقادیر خطای جرم و نبود توازن پرداخته ایم. جدول ۱ مقدار خطای جرم برای روز دهم انتگرال گیری و جدول ۲ میانگین زمانی نبود توازن را نشان می دهد. با استفاده از این جدول ها، درمی یابیم که میزان خطای جرم و نیز نبود توازن حاصل از روش طیفی وار برای جملات فرایخش مرتبه بالاتر از دو کمتر از روش آب فشرده مرتبه شش است. البته مقادیر خطای جرم و نبود توازن حاصل از دو روش، بسیار به هم نزدیک اند، اما مقادیر فوق نشان می دهد که برای جملات فرایخش مرتبه های بالا، روش طیفی وار می تواند در حل عددی معادلات آب کم عمق با اعمال جملات فرایخش مناسب تر باشد.

جدول ۱. خطای جرم برای روز دهم انتگرال گیری.

method	$n_g = 128$	$n_g = 512$
SC_6^{D2}	2.0086E-002	6.0233E-003
SC_6^{D4}	7.7939E-003	4.6050E-003
SC_6^{D6}	7.7939E-003	4.7717E-003
SC_6^{F8}	8.6291E-003	5.0145E-003
PS^{D2}	2.0090E-002	6.0131E-003
PS^{D4}	8.2697E-003	4.4565E-003
PS^{D6}	7.7248E-003	4.2088E-003
PS^{F8}	8.2371E-003	4.4468E-003

- Springer, 465pp.
- Esfahanian, V., Ghader, S. and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of the super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere, *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **131**, 2109-2129.
- Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R. and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of the super compact finite-difference schemes for the f-plane shallow water equations, *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 2393-2406.
- Hoskins, B. J., McIntyre, M. E. and Robertson, A. W., 1985, On the use and significance of isentropic potential-vorticity maps, *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **111**, 877-946. Also *Corrigendum*, **113**, 401-404.
- Iserles, A., 1996, *A first course in the numerical analysis of differential equations*, Cambridge University Press, 378pp.
- Mariotti, A., Legras, B. and Dritschel, D. G., 1994, Vortex stripping and the erosion of coherent structures in two-dimensional flows, *Phys. Fluids.*, **6**, 3954-3962.
- Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2000, On the representation of gravity waves in numerical models of the shallow water equations, *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **126**, 669-688.
- Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2001, Hierarchies of balance conditions for the f-plane shallow water equations, *J. Atmos. Sci.*, **58**, 2411-2426.
- Mohebalhojeh, A. R., 2002, On shallow water potential vorticity inversion by Rossby number expansion, *Equations*, *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **128**, 679-694.
- Ritchie, H., 1988, Application of the semi-Lagrangian method to a spectral model of the shallow water equations, *Mon. Wea. Rev.*, **116**, 1687-1698.
- Smolarkiewicz, P. K. and Margolin, L. G., 1994, Variational solver for elliptic problems in atmospheric flows, *Appl. Math. Comp. Sci.*, **4**, 527-551.
- Smolarkiewicz, P. K. and Margolin, L. G., 2000, Variational methods for elliptic problems in fluid models, in proceedings of the ECMWF workshop on developments in numerical methods for very high resolution global models.
- Yao, H. B., Dritschel, D. G. and Zabusky, N. J., 1995, High-gradient phenomena in 2D vortex interactions, *Phys. Fluids.*, **7**(3), 539-548.
- ولی برای شبکه‌های با تفکیک زیاد (مانند شبکه ۵۱۲)، افزودن جمله فرایخش با توان چهار به بالا به دلیل میزان میرایی بسیار کم وارد شده به حل عددی در مهار ناپایداری غیرخطی ناموفق است.
- جمع‌بندی نتایج به دست آمده برای روش‌های مورد بررسی از دیدگاه خطای جرم و نیز نبود توازن نشان می‌دهد که جمله فرایخش مرتبه دوم خطای جرم و نبود توازن زیادی نسبت به جملات فرایخش مرتبه‌های بالاتر و پالایه مرتبه هشت، تولید می‌کند. این مسئله نشان می‌دهد که هنگام شبیه‌سازی معادلات آب کم عمق با استفاده از روش‌های متفاوت (به ویژه روش‌های با توانایی تفکیک زیاد مانند آبرفشرده مرتبه ششم، فشرده مرتبه چهارم و طیفی وار)، استفاده از جمله فرایخش مرتبه دوم نتیجه معکوس بر دقت حل می‌گذارد. محاسبه طیف انرژی نبود توازن و طیف توان تاوایی پتانسیلی نیز این نتایج را تأیید می‌کند. همچنین نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که استفاده از جمله فرایخش مرتبه شش و پالایه فشرده مرتبه هشت با استفاده از روش آبرفشرده مرتبه ششم و روش طیفی وار نتیجه تقریباً یکسانی را به دست می‌دهند.
- تشکر و قدردانی
- نویسندگان از دانشگاه تهران به خاطر حمایت از این کار تحقیقاتی سپاسگزار می‌کنند.
- منابع
- Cook, A. and Cabot, W., 2005, Hyperviscosity for shock-turbulence interactions, *J. Comput. Phys.*, **203**, 379-385.
- Dritschel, D. G., Polvani, L. M. and Mohebalhojeh, A. R., 1999, The contour-advective- semiLagrangian algorithm for the shallow-water equations, *Mon. Wea. Rev.*, **127**, 1151-1165.
- Durran, D. R., 1999, Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics,