

برآورد مؤلفه‌های واریانس مقادیر مرزی نامتجانس در فرایند انتقال به سمت پایین مسئله مقدار دومرزی تعیین ژئوئید با مرزهای ثابت و آزاد

عباسعلی جمعه‌گی^{۱*} و عبدالرضا صفری^۲

^۱ کارشناس ارشد عملیات نقشه برداری مدیریت اکتشاف شرکت ملی نفت ایران، تهران، ایران

^۲ دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری دانشکده فنی دانشگاه تهران، تهران، ایران

(دریافت: ۹۱/۲/۳۱، پذیرش نهایی: ۹۱/۱۰/۵)

چکیده

مدل‌سازی میدان گرانی و تعیین ژئوئید به روش مسئله مقدار مرزی، یک مسئله معکوس و بدوضع است که نیاز به پایدارسازی دارد. روش‌های متداول پایدارسازی هنگامی جواب صحیح را برآورد خواهند کرد که ماتریس وزن مشاهدات معلوم باشد و این شرط جزء فرضیات مسائل معمول پایدارسازی است. مشکل هنگامی حادث می‌شود که از تلفیق مشاهدات گوناگون با وزن‌های متفاوت و نامعلوم برای تعیین ژئوئید در قالب یک مسئله مقدار مرزی بدوضع، استفاده شود. از آنجاکه همه مشاهدات ژئودزی تحت تاثیر میدان گرانی زمین صورت می‌گیرد، حاوی اطلاعات گرانشی‌اند؛ و همچنین ترکیب مشاهدات گرانشی از انواع گوناگون در مسائل مقدار مرزی، موجب افزایش درجه آزادی و دستیابی به دقت‌های بالاتر می‌شود. لذا در این مقاله برای حل مشکل استفاده از مشاهدات نامتجانس در حکم مقادیر مرزی و تعیین وزن نسبی آنها، از روش کخ-کوشه، در برآورد مؤلفه‌های واریانس به‌منزله برآوردی از وزن نسبی مشاهدات از انواع (۱) اندازه بردار شتاب گرانی حاصل گرانی‌سنجی، (۲) ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و (۳) ژئوئید حاصل از GPS/Leveling، در مسئله مقدار دومرزی تعیین ژئوئید با مرزهای ثابت و آزاد که مسئله‌ای بدوضع است، استفاده شده است. از مزایای این روش هم‌زمانی حل مسائل بدوضع و وزن‌دهی به مشاهدات و مقادیر مرزی است. بدین ترتیب در این تحقیق نخستین بار، امکان تلفیق انواع مقادیر مرزی نامتجانس از قبیل ژئوئید حاصل از GPS/Leveling و ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای با وزن نسبی مناسب در کنار مشاهدات شتاب جاذبه، برای تعیین ژئوئید و مدل‌سازی میدان گرانی با قدرت تفکیک زیاد فراهم شد. صحت وزن نسبی برآورد شده به‌منظور تلفیق مشاهدات از انواع متفاوت در یک مسئله مقدار مرزی در منطقه پارس ساحلی، به‌صورت عددی مورد آزمایش قرار گرفته است. نتایج حاصل، مؤید موفقیت این روش در تلفیق انواع مشاهدات گرانشی و برآورد وزن نسبی مناسب، به‌منظور مدل‌سازی میدان گرانی و تعیین ژئوئید است.

واژه‌های کلیدی: مؤلفه واریانس مشاهدات، ژئوئید تلفیقی، انتقال به سمت پایین، تبدیل برونز، میدان گرانی، مسئله مقدار مرزی،

ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، GPS/Leveling

Variance component estimation of heterogeneous boundary values in downward continuation step for geoid determination involved fix-free two-boundary value problem

Jomegi, A. A.¹ and Safari, A.²

¹M.Sc. in Survey, Department of Survey, Exploration Directorate, National Iranian Oil Company, Tehran, Iran

²Associate Professor, Department of Geomatics, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 20 May 2012, Accepted: 25 Dec 2012)

Abstract

Geoid computation with boundary value problem is an inverse and Ill-posed problem in

potential theory that needs regulation.

Ardalan and Grafarend (2001) proposed Free-Fixed Two Boundary Value Problem (F.F.T. B.V.P) for geoid computation that enable to combination of heterogeneous gravity observation. In this B.V.P., any observation that has gravity information could be used as Boundary value; for example gravity acceleration from gravimetry, gravity potential from leveling, geoid from GPS/Leveling and geoid from Satellite Altimetry, astronomical observation and etc. Gravity Field of the earth has an influence on the geodetic observations. So all of geodetic observations have gravity information and used in geoid determination as boundary value in B.V.P (Safari, 2004).

In precise geoid computation and gravity field modeling, combination of gravity observation with different type makes high degree of free down and precision. In this paper, geoid from GPS/Leveling ($h(\mathbf{x})$) and satellite altimetry ($h(\mathbf{x})$) is used as boundary value beside the gravity acceleration observation ($\gamma(\mathbf{x})$) for gravity field modeling. The steps of geoid computation are given by Jomegi, 2006.

The fix- free two boundary value problem is a Laplace-Poisson partial differential equation (Ardalan, 1999). The summary of the Over determine Nonlinear Fix- Free Two Boundary Value Problem is given in table 1.

In table 1, the w is gravity potential, ω is angular of velocity of the earth, σ is mass density of the earth, G is Newton gravitational constant, $E\{ \}$ is mathematical expectation operator, μ_γ is the mathematical expectation of the norm of gravity acceleration vector,

$\mu_{h_{\text{Satellite Altimetry}}}$ is the mathematical expectation of geoid from satellite altimetry,

$\mu_{h_{\text{GPS/leveling}}}$ is the mathematical expectation of geoid from GPS/Leveling, w_0 is geoid's

potential, \mathbf{x} position vector of point on the physical surface of the earth or geoid and \mathbf{X} is position vector of point on the reference ellipsoid.

For solving this B.V.P., the external space of the reference ellipsoid $\mathbb{E}_{a,b}^2$ should be harmonic, this means where there are no masses. For this problem and linearization of F.F.T.B.V.P, the reference effect involve ellipsoidal harmonic expansion of the earth up to degree/ order 360/360 and residual topography, is removed from quantities in table 1. Therefore, the B.V.P. for gravity observations converts to B.V.P. for incremental quantities. The summary of the Over determine linear Fix- Free Two Boundary Value Problem for incremental quantities is given in table 3.

As we see in table 3, after the removal step, the field differential equation becomes a Laplace equation for out of the reference ellipsoid $\mathbb{E}_{a,b}^2$.

The ellipsoidal Abel-Poisson integral is the solution of field differential equation on the reference ellipsoid with boundary data type of gravity acceleration. For more study about Abel-Poisson integral, refer to (Ardalan, 1999) (Safari, 2004) (Jomegi, 2006).

The ellipsoidal Abel-Poisson integral observation equation is shown in table 4. The inverse Ellipsoidal Able- Poisson integral equation converts incremental gravity acceleration on the observation point, located on the earth to incremental gravity potential at the reference ellipsoid. This means downward continuation.

In table 4, $(\Gamma_\lambda, \Gamma_\phi, \Gamma_\eta)$ are three components of the reference gravity acceleration vector (Γ) in Jacobi Ellipsoidal coordinates $\{\lambda, \phi, \eta\}$, $\varpi(\phi')$ is weight function and $K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)$ is the modified Abel-Poisson kernel.

The aim of gravity field modeling and geoid determination is computation of gravity potential on the reference ellipsoid. So, in this paper, the ellipsoidal Abel-Poisson integral

is used as an observation equation for gravity acceleration beside the equation of geoid from Satellite altimetry and GPS/Leveling to compute of incremental potential on the reference ellipsoid is shown in equation 1.

$$\begin{cases} 1. \delta W(\mathbf{X}) = \delta \hat{h}(\mathbf{X}) \frac{GM}{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cosh^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}} \\ 2. \delta W(\mathbf{X}) = \delta h(\mathbf{X}) \frac{GM}{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cosh^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}} \\ 3. \delta \Gamma(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{e}_r | \delta \Gamma(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{e}_r | \delta \Gamma(\mathbf{x}) \rangle + \mathcal{O}(\delta \Gamma^2(\mathbf{x})) \end{cases} \quad (1)$$

This equation system is over determine and Ill-Posed problem (Jomegi, 2006). So the regularization should be used for computation of incremental potential on the reference ellipsoid.

Regularization has been applied by implicitly assuming that the weight matrix of measurements is known. If measurements are assumed heteroscedastic with different unknown variance components, not all regularization techniques may be proper to apply, unless techniques of variance component estimation are directly implemented. Although variance component estimation techniques have been proposed by R.Koch, to simultaneously estimate the variance components and provide the regularization together. The steps of R.Koch method is shown in figure 1.

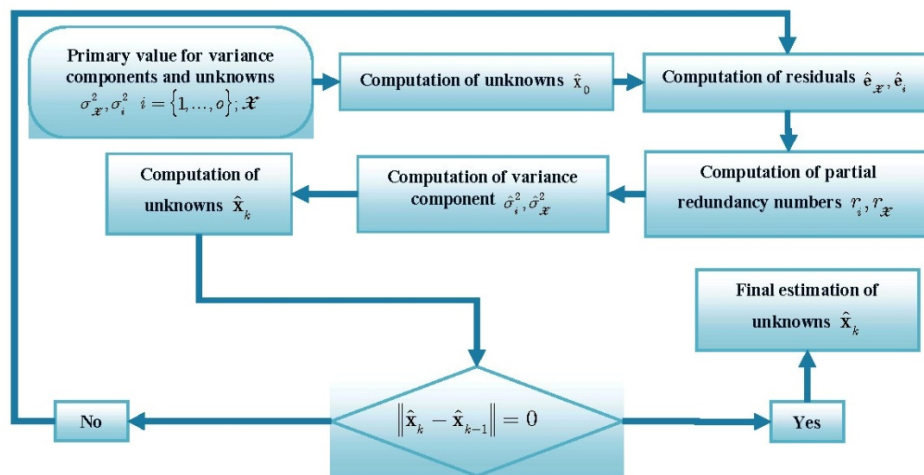


Figure1. Technique of variance component estimation By R.Koch.

In this research for the first time, a new method for variance estimation by R.Koch (Koch K-R, Kusche J, 2002) is used for estimation of variance component and regularization of boundary value in type of (1) gravity acceleration vector, (2) geoid from satellite altimetry and (3) geoid from GPS/Leveling involved in over determine, linear Free-Fixed Two Boundary Value Problem. With this method, all of gravity observation could be used for gravity field modeling and geoid computation together involved in FFTBVP.

The verity of this method is tested in Coastal region of Pars. The result shows the ability of R.Koch method to use in gravity field modeling by heterogeneous gravity observations.

Keywords: Variance component, Combined geoid, Downward continuation, Bruns transformation, Gravity field, Boundary value problem, Satellite altimetry, GPS/Leveling

۱ مقدمه

مدل‌سازی میدان گرانی و تعیین ژئوئید در خشکی‌ها مسئله‌ای معکوس در نظریه پتانسیل است و از طریق حل معکوس مسائل مقدار مرزی صورت می‌گیرد (هافمن و موریتز، ۲۰۰۵). در مسائل مقدار مرزی تعیین ژئوئید، معمولاً تنها امکان به‌کارگیری یک نوع مشاهده، درحکم مقدار مرزی وجود دارد. بدین‌لحاظ در سال‌های اخیر تلاش‌های گسترده‌ای در بازنگری مسائل مقدار مرزی تعیین ژئوئید صورت گرفته که برای مثال می‌توان به مسئله مقدار دومرزی تعیین ژئوئید با مرزهای ثابت و آزاد اشاره کرد؛ که با ساختار خاص خود امکان تلفیق هر نوع تابعه میدان گرانی را درحکم مقدار مرزی، در مسئله تعیین ژئوئید فراهم آورده است (اردلان، ۱۹۹۹). مشکلی که در به‌کارگیری هم‌زمان تابعک‌های میدان گرانی در قالب یک دستگاه معادلات خطی، وجود دارد مسئله تعیین وزن (مؤلفه‌های واریانس) این مشاهدات است (کخ و کوشه، ۲۰۰۲). این موضوع دارای حساسیت ویژه‌ای است، چرا که اختصاص یک وزن نسبی بزرگ (بدون پشتوانه واقعی) به یک نوع مشاهده، می‌تواند جواب حاصل را کاملاً تحت تاثیر آن نوع مشاهده قرار داده و اثر انواع دیگر مشاهدات را در جواب نهایی به‌طور کامل محو کند. از این موضوع در ژئودزی با عنوان "ترکیب مشاهدات نامتجانس در حل یک مسئله" نام برده می‌شود. در این زمینه جامعه ژئودزی فعالیت‌های گسترده‌ای را به عمل آورده که برای نمونه‌هایی از تلاش‌های اخیر می‌توان به مقالات (هلمرت، ۱۹۲۴؛ رایو، ۱۹۷۳؛ گرافارند و دی هون، ۱۹۷۸؛ کخ ۱، ۱۹۹۰؛ کخ ۲، ۱۹۹۰؛ ایو، ۱۹۹۱؛ لرچ، ۱۹۹۱؛ ایو و کخ، ۱۹۹۴؛ زو و رامل، ۱۹۹۴؛ کخ، ۲۰۰۰؛ کروکت و همکاران، ۲۰۰۰ و زو و همکاران، ۲۰۰۶) اشاره کرد.

افزودن مشاهدات بیشتر به یک مسئله، همواره موجب

افزایش درجه آزادی و بالا رفتن کیفیت نتیجه می‌شود (مارتینک، ۱۹۹۸). بنابراین، حال که راه برای ترکیب مشاهدات از انواع گوناگون در حل مسئله تعیین ژئوئید از راه مسئله مقدار دومرزی تعیین ژئوئید با مرزهای ثابت و آزاد گشوده شده است (اردلان، ۱۹۹۹)، ضروری است که راه‌حلی علمی و دقیق به‌منظور تعیین وزن نسبی مشاهدات از انواع گوناگون یافته و به ابزارهای تعیین ژئوئید به روش یادشده، اضافه شود. این موضوع هدف تحقیق حاضر است، تا در نتیجه آن بتوان از هر نوع مشاهده ژئودزی یا کمیت مرتبط با میدان گرانی، در حل این مسئله مقدار مرزی به‌صورت هم‌زمان استفاده کرد. لازم به توضیح است که همه مشاهدات ژئودزی چون تحت تاثیر میدان گرانی زمین صورت می‌گیرند، حاوی اطلاعات گرانشی یا مشتقات پتانسیل گرانی از درجات متفاوت‌اند. (اردلان، ۱۹۹۹).

از اطلاعاتی که به‌کارگیری آن در حل مسائل مقدار مرزی ژئوئید می‌تواند بسیار مفید باشد، ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای (نودسن و پروولی، ۱۹۹۳؛ اولگیاتی و همکاران، ۱۹۹۵؛ چراما، ۱۹۹۷؛ ژاوت و سرایل، ۱۹۹۷؛ لی و سیدرز، ۱۹۹۷؛ وانگ، ۱۹۹۷؛ جانگ، ۱۹۹۸؛ لمان، ۱۹۹۹؛ روگر، ۲۰۰۰ و وانج و استمر، ۲۰۰۳) و ژئوئید حاصل از GPS/Leveling (شوبرگ، ۱۹۹۱؛ جونگ، ۱۹۹۷؛ بسیک و همکاران، ۱۹۹۹؛ کنیرز، ۱۹۹۹؛ اندریدسانوس و همکاران، ۲۰۰۰؛ جربینچارسکی و همکاران، ۲۰۰۵؛ کازوگلو و ساکا، ۲۰۰۵؛ مارتین و همکاران، ۲۰۰۵؛ نهاندرچی و سلطانپور، ۲۰۰۶ و بن احمد داهو و همکاران، ۲۰۰۶) است. این اطلاعات در تحقیق حاضر برای تلفیق با مشاهدات از نوع اندازه بردار شتاب گرانی حاصل از گرانی‌سنجی مطرح و از روش کخ و کوشه (۲۰۰۲) به‌منظور تعیین مؤلفه‌های واریانس مشاهدات و مجهولات استفاده شده است. به این طریق

ژئوئید حاصل از GPS/Leveling، تعریف می‌شود. به‌علاوه فرض بر معلوم بودن مختصات GPS همه داده‌های مرزی است. بنابراین سطح زمین در خشکی M_h^2 و دریا M_g^2 با در اختیار داشتن مختصات GPS یک مرز ثابت را تشکیل می‌دهد. مقدار پتانسیل w_0 روی ژئوئید M_g^2 ، تشکیل‌دهنده مقدار مرزی روی مرز آزاد است. تعریف مسئله مقدار دومرزی غیرخطی با مرزهای ثابت و آزاد در جدول ۱ آورده شده است (اردلان، ۱۹۹۹؛ صفری، ۲۰۰۴).

این مسئله، یک مسئله مقدار مرزی غیرخطی، مخلوط و مایل است (صفری، ۲۰۰۴؛ جمعه‌گی، ۲۰۰۶).

در جدول ۱، w پتانسیل گرانی، γ اندازه بردار شتاب گرانی، σ چگالی زمین، ω سرعت دوران زمین، μ_γ امید ریاضی اندازه بردار شتاب گرانی، $\mu_{\text{Satellite Altimetry}}$ امید ریاضی ارتفاع ژئوئید حاصل از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، $\mu_{\text{GPS/leveling}}$ امید ریاضی ارتفاع ژئوئید حاصل از مشاهدات GPS/Leveling، G ثابت جهانی جاذبه، w_0 پتانسیل ژئوئید، x بردار موقعیت روی سطح زمین، X بردار موقعیت روی سطح بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ ، e_ω بردار یک‌جه در امتداد محور دوران زمین، M جرم زمین، D فضای درونی زمین، ∂G_e^+ مرز خارجی پوسته زمین، ∂G_e^- مرز درونی پوسته زمین و $\mathbb{E}_{a,b}^2, M_h^2, M_g^2$ بیانگر رویه‌های در بر گیرنده داده‌های مرزی است. برای اطلاعات بیشتر به (جمعه‌گی، ۲۰۰۶) مراجعه شود.

همه کمیت‌های فیزیکی به‌کاررفته در این مسئله را می‌توان به دو مؤلفه (۱) مرجع و (۲) تفاضلی یا باقی‌مانده تفکیک کرد (اردلان، ۱۹۹۹). جدول ۲، نشان‌دهنده این تفکیک برای چهار کمیت پتانسیل گرانی، اندازه بردار شتاب گرانی، چگالی زمین و سرعت دوران زمین، به دو مؤلفه مرجع (نشان داده شده با حروف یونانی بزرگ) و تفاضلی یا باقی‌مانده (مشخص شده با پیشوند یونانی دلتا) است.

نخستین بار در مسئله مقدار دومرزی تعیین ژئوئید با مرزهای ثابت و آزاد، راه‌حلی برای برآورد وزن نسبی مقادیر مرزی عرضه شده است.

حال در اینجا به ترتیب به معرفی مختصر مسئله مقدار دومرزی تعیین ژئوئید با مرزهای ثابت و آزاد، معادله انتگرالی آبل-پواسون بیضوی درحکم معادله مشاهده انتقال به سمت پایین و روش کخ و کوشه برای برآورد مؤلفه‌های واریانس، و در نهایت تعیین مؤلفه‌های واریانس انواع مشاهدات: (۱) اندازه بردار شتاب گرانی، (۲) ژئوئید حاصل از GPS/Leveling و (۳) ژئوئید حاصل از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای در مسئله انتقال به سمت پایین، در یک بررسی موردی در منطقه پارس ساحلی خواهیم پرداخت.

۲ مسئله مقدار دومرزی مدل‌سازی میدان گرانی و تعیین ژئوئید با مرزهای ثابت و آزاد با اطلاعات بیش از حداقل موردنیاز

ژئوئید طبق تعریف گاوس و لیستینگ، سطح هم‌پتانسیلی است که به شیوه کمترین مربعات، سطح متوسط آبهای آزاد جهان را تقریب می‌زند (اردلان، ۱۹۹۹). این تعریف شاید به‌منظور تعیین ژئوئید دریایی (ژئوئید در آب‌های آزاد) به‌طور مستقیم مورد استفاده قرار گیرد اما در قاره‌ها، تعیین ژئوئید براساس رابطه برونز (Bruns) (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۱)، نیازمند تعیین پتانسیل گرانی روی یک سطح مرجع است، که بخشی از آن درون زمین قرار دارد (اردلان، ۱۹۹۹؛ صفری، ۲۰۰۴).

در اینجا برای تعیین ژئوئید، مسئله مقدار دومرزی غیرخطی با مرزهای ثابت و آزاد، با استفاده از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی پواسون برای داده‌های مرزی از نوع مشاهدات اندازه بردار شتاب گرانی، مشاهدات ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و مشاهدات

جدول ۱، مسئله مقدار دومرزی غیرخطی با مرزهای ثابت و آزاد (جمعه‌گی، ۲۰۰۶).

1. $\text{div grad } w(\mathbf{x}) = 2\omega^2$ (outside the Earth's masses) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathcal{D} \cup \partial \mathcal{G}_e^+$
2. $\text{div grad } w(\mathbf{x}) = -4\pi G\sigma(\mathbf{x}) + 2\omega^2$ (internal space plus boundary of the planet the Earth) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \cup \partial \mathcal{G}_e^-$
3. $E\left\{\|\text{grad } w(\mathbf{x})\|_2\right\} = \mu_\gamma$ (boundary value data of type modulus of gravity) $\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{G}_e = \mathbb{M}_h^2$
4. $E\left\{h(\mathbf{X})\right\} = \mu_{h_{\text{Satellite Altimetry}}}$ (boundary value data of type satellite altimetry) $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{E}_{a,b}^2$
5. $E\left\{\hat{h}(\mathbf{X})\right\} = \mu_{h_{\text{GPS/leveling}}}$ (boundary data of the type geoidal heights from GPS/Leveling data) $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{E}_{a,b}^2$
6. $w(\mathbf{x}) = w_0$ (boundary data at the free boundary of the type geoid potential) $\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{G}_e = \mathbb{M}_g^2$
7. $\lim_{\|\mathbf{x}\|_2 \rightarrow \infty} w(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \omega^2 \|\mathbf{x} - \langle \mathbf{x} | \mathbf{e}_\omega \rangle \mathbf{e}_\omega\|_2^2 + \frac{GM}{\|\mathbf{x}\|_2} + \mathcal{O}_w\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^3}\right)$ (regularity condition at infinity)

جدول ۲. تقسیم کمیت‌های واقعی به دو بخش کمیت مرجع و کمیت تفاضلی براساس نظریه آشوب (اردلان، ۱۹۹۹).

$\gamma = \Gamma + \delta\Gamma$	$w = W + \delta W$
$h(\mathbf{X}) = \delta h(\mathbf{X}) + h_g(\mathbf{X})$	$\omega^2 = \Omega^2 + 2\langle \Omega \delta\Omega \rangle + \delta\Omega^2$
$\hat{h}(\mathbf{X}) = \delta \hat{h}(\mathbf{X}) + \hat{h}_g(\mathbf{X})$	$\sigma = \Sigma + \delta\Sigma$

می‌توان از راه انتگرال آبل - پواسون بیضوی، پتانسیل جاذبه تفاضلی $\delta W(\mathbf{X})$ را روی بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ به دست آورد که به آن "انتقال به سمت پایین مقادیر مرزی" گفته می‌شود (اردلان، ۱۹۹۹؛ صفری، ۲۰۰۴؛ جمعه‌گی، ۲۰۰۶). معادلات مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و GPS/Leveling به‌منزله قیود وزن‌دار (Weighted constrain) به‌بهرتر برآورد شدن $\delta W(\mathbf{X})$ روی سطح بیضوی کمک می‌کنند. در جدول ۴ معادله انتگرالی آبل - پواسون بیضوی برای اندازه شتاب گرانی تفاضلی آورده شده است. برای اطلاعات بیشتر در مورد معادله انتگرالی آبل - پواسون بیضوی به (جمعه‌گی، ۲۰۰۶) مراجعه شود.

در جدول ۴، $\{\Gamma_\lambda, \Gamma_\phi, \Gamma_\eta\}$ سه مولفه بردار شتاب گرانی مرجع Γ بر حسب دستگاه مختصات خمیده خط بیضوی ژاکوبی با مؤلفه‌های $\{\lambda, \phi, \eta\}$ بوده، $\varpi(\phi')$ تابع وزن است که موجب تعامد هماهنگ‌های بیضوی روی بیضوی مرجع می‌شود (تانگ و گرافارند، ۱۹۸۹). $S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}$ مساحت سطح بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ و $\{g_{\lambda\lambda}, g_{\phi\phi}, g_{\eta\eta}\}$ مولفه‌های تانسور متریک دستگاه مختصات خمیده خط بیضوی ژاکوبی است. K^L کرنل تغییر یافته انتگرال آبل - پواسون پس از حذف میدان مرجع است. برای جزئیات

پس از حذف بخش مرجع از مشاهدات، مسئله مقدار دومرزی غیرخطی با مرزهای ثابت و آزاد در فضای گرانی قابل خطی‌سازی است. همچنین بدین ترتیب مسئله مقدار دومرزی، به مسئله مقدار دومرزی برای کمیت‌های تفاضلی هماهنگ (هارمونیک) (صادق در معادله دیفرانسیل لاپلاس) تبدیل می‌شود. جدول ۳ نشان‌دهنده مسئله مقدار مرزی برای کمیت‌های تفاضلی هماهنگ خطی شده، است. در جدول ۳، $\nabla_{\mathbf{e}_\Gamma}$ نشان‌دهنده مشتق امتدادی در امتداد بردار یکه \mathbf{e}_Γ است که در امتداد بردار شتاب گرانی مرجع Γ است. L درجه و مرتبه بسط میدان گرانی جهانی است.

۳ معادله انتگرالی آبل - پواسون بیضوی درحکم

معادله - مشاهده انتقال به سمت پایین مقادیر مرزی برای بخش بدون جرم فضای بیرونی زمین مقادیر مرزی $\delta\Gamma(\mathbf{x})$ در انتگرال آبل - پواسون (جواب مسئله مقدار دومرزی فوق، با مقادیر مرزی از نوع اندازه بردار شتاب گرانی) صدق می‌کند. بنابراین چنانچه بدنبال پتانسیل گرانی تفاضلی $\delta W(\mathbf{X})$ روی بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ باشیم، انتگرال آبل - پواسون بیضوی را می‌توان درحکم یک معادله مشاهده به‌کار برد. با داشتن مقادیر تفاضلی شتاب گرانی

روند حل دستگاه به‌روش کمترین مربعات، به‌نحو صحیح اعمال شوند. در این تحقیق از روش ابداع شده کخ و کوشه در (کخ و کوشه، ۲۰۰۲) برای برآورد صحیح مؤلفه‌های واریانس در مسائل بدوضع استفاده شده است.

۴ نحوه برآورد مؤلفه‌های واریانس در مسائل بدوضع به روش کخ و کوشه

کخ و کوشه (۲۰۰۲) روش جدیدی برای تعیین مؤلفه‌های واریانس در مسائل بدوضع، عرضه کردند که در این بخش بیان خواهد شد.

همان‌طور که ذکر شد در تعیین ژئوئید می‌توان از تابعک‌های مشاهداتی گوناگون میدان گرانی زمین استفاده کرد. بنابراین دستگاه معادلات مشاهدات انتقال به سمت پایین به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_i \mathbf{x} = \mathbf{b}_i + \mathbf{e}_i, \\ D(\mathbf{b}_i | \sigma_i^2) = \sigma_i^2 \mathbf{P}_i^{-1} \quad i = \{1, \dots, o\} \end{cases} \quad (2)$$

که در رابطه فوق، \mathbf{A}_i ماتریس ضرایب مجهولات برای مشاهدات نوع i ام با بُعد $n_i \times u$ ، \mathbf{x} بردار مجهولات با بُعد $u \times 1$ ، σ_i^2 مولفه واریانس مشاهدات نوع i ام، \mathbf{P}_i ماتریس وزن مشاهدات نوع i ام با بُعد $n_i \times n_i$ ، بردار \mathbf{b}_i بردار مشاهدات نوع i ام با بُعد $n_i \times 1$ و \mathbf{e}_i بردار خطای مشاهدات نوع i ام با بُعد $n_i \times 1$ هستند، به‌طوری که $n = \sum_{i=1}^o n_i$ است.

دستگاه معادلات (۲)، برای مشاهدات از نوع اندازه بردار شتاب گرانی، ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و ژئوئید حاصل از مشاهدات GPS/Leveling ناپایدار است (جمعه‌گی، ۲۰۰۶) و لذا بایستی با استفاده از روش‌های پایدارسازی (Regulation)، جوابی پایدار (کراندار) برای مسئله برآورد شود. در این تحقیق از روش کخ برای پایدار ساختن دستگاه معادلات یادشده و برآورد هم‌زمان مؤلفه‌های واریانس استفاده خواهد شد.

بیشتر به (مارتینک و گرافارند، ۱۹۹۷؛ صفری، ۲۰۰۴) مراجعه شود. $\{a, b, \varepsilon\}$ به ترتیب نیم‌قطر طول، نیم‌قطر اقصر و خروج از مرکز خطی بیضوی مرجع $\mathbb{B}_{a,b}^2$ است. $\Delta\lambda'\Delta\phi'$ المان سطحی انتگرال آبل پواسون پس از گسسته‌سازی و بیانگر قدرت تفکیک انتگرال‌گیری نیز هست. i_{\max} و j_{\max} نیز حد بالای شبکه انتگرال‌گیری پس از گسسته‌سازی را روی بیضوی مرجع نشان می‌دهند.

بر طبق آنچه که گذشت، پتانسیل تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع $\mathbb{B}_{a,b}^2$ حاصل از مرحله انتقال به سمت پایین، جواب پایدار شده دستگاه معادلات مشاهدات زیر است:

$$\begin{cases} 1. \delta W(\mathbf{X}) = \delta h(\mathbf{X}) \frac{GM}{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cosh^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}} \\ 2. \delta W(\mathbf{X}) = \delta h(\mathbf{X}) \frac{GM}{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cosh^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}} \\ 3. \delta \Gamma(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{e}_r | \delta \Gamma(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{e}_t | \delta \Gamma(\mathbf{x}) \rangle + \mathcal{O}(\delta \Gamma^2(\mathbf{x})) \end{cases} \quad (1)$$

در دستگاه معادلات (۱)، رابطه (۱)، معادله مشاهده ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، رابطه (۲)، معادله مشاهده ژئوئید حاصل از GPS/Leveling، رابطه (۳)، معادله مشاهده انتگرالی گسسته آبل-پواسون بیضوی اصلاح شده، برای مشاهدات اندازه بردار شتاب گرانی است.

دستگاه معادلات (۱) یک دستگاه بدوضع (ill-posed) است، چرا که جواب حاصل از روش کمترین مربعات، کراندار نیست (اردلان، ۱۹۹۹) (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۴) (صفری، ۲۰۰۴) (صفری و همکاران، ۲۰۰۵). برای حصول جوابی صحیح و معنی‌دار، لازم است از روش‌های پایدارسازی در خوش‌وضع (well-posed) ساختن دستگاه، استفاده شود. با این حال اکثر روش‌های پایدارسازی معمول، قابلیت برآورد مؤلفه‌های واریانس برای تعداد بیش از یک نوع مشاهده را ندارند. از طرف دیگر به‌منظور برآورد صحیح پتانسیل تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع $\mathbb{B}_{a,b}^2$ ، لازم است، مؤلفه‌های واریانس مشاهدات و مجهولات در

جدول ۳. مسئله مقدار دومرزی خطی با مرزهای ثابت و آزاد (جمعه‌گی، ۲۰۰۶).

$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta W(\mathbf{x}) &= 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta W(\mathbf{x}) &= -4\pi\delta\Sigma(\mathbf{x}) \\ \delta\Gamma(\mathbf{x}) &= \ \nabla_{\mathbf{e}_r} \delta W(\mathbf{x})\ _2 \\ \delta h(\mathbf{X}) &= \delta W(\mathbf{X}) \frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cosh^2 \eta - \cos^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}{gm} \\ \delta h(\mathbf{X}) &= \delta W(\mathbf{X}) \frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cosh^2 \eta - \cos^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}{gm} \\ \delta w_0(\mathbf{x}) &= \delta W_0 \\ \lim_{\ \mathbf{x}\ _2 \rightarrow \infty} \delta W(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}_{\delta\omega} \left(\frac{1}{\ \mathbf{x}\ _2^{L+1}} \right) \end{aligned}$	$\left. \begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{G}_c^- \\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{G}_c^+ \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}_c^+ = \mathbb{M}_h^2 \\ \forall \mathbf{X} \in \mathbb{E}_{a,b}^2 \\ \forall \mathbf{X} \in \mathbb{E}_{a,b}^2 \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}_g = \mathbb{M}_g^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Field Diff. Equ.} \\ \text{Boundary Value} \\ \text{Regularity condition at Infinity} \end{array}$
---	--

جدول ۴. صورت گسسته معادله انتگرالی آبل-پواسون بیضوی برای شتاب گرانی تفاضلی.

$$\begin{aligned} \delta\Gamma(\mathbf{x}) &= \gamma(\mathbf{x}) - \Gamma(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{e}_r \mid \delta\Gamma(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \frac{\Gamma_\lambda}{\|\Gamma\|} \frac{1}{S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} a \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi_{ij}} \cos \phi_{ij} \right. \\ &\quad \times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \lambda} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\Gamma_\phi}{\|\Gamma\|} \frac{1}{S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} a \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi_{ij}} \cos \phi_{ij} \\ &\quad \times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \phi} \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\Gamma_\eta}{\|\Gamma\|} \frac{1}{S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} a \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi_{ij}} \cos \phi_{ij} \right. \\ &\quad \left. \times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \eta} \right] \delta W^L(\lambda', \phi') \end{aligned}$$

در رابطه (۳) \mathcal{X} ، مقادیر اولیه مجهولات، $\sigma_{\mathcal{X}}^2$ مقدار اولیه‌ای برای مولفه واریانس مجهولات و $\mathbf{P}_{\mathcal{X}}$ ماتریس وزن مجهولات با بُعد $u \times u$ است. بنابراین با افزودن این اطلاعات به رابطه دستگاه معادلات زیر برای انتقال به سمت پایین حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_i \mathbf{x} = \mathbf{b}_i + \mathbf{e}_i; & D(\mathbf{b}_i | \sigma_i^2) = \sigma_i^2 \mathbf{P}_i^{-1} \\ \mathbf{x} = \mathcal{X} + \mathbf{e}_{\mathcal{X}}; & D(\mathcal{X} | \sigma_{\mathcal{X}}^2) = \sigma_{\mathcal{X}}^2 \mathbf{P}_{\mathcal{X}}^{-1} \end{cases} \quad (۴)$$

از تعبیر فوق، چنین استنباط می‌شود که اضافه کردن مشاهداتی نظیر ژئوئید حاصل از GPS/Leveling و ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، باعث پایداری بیشتر مسئله می‌شود؛ چرا که در این نوع مشاهدات، مقادیر مرزی

نمودار گردشی تعیین مولفه‌های واریانس به‌روش کخ برای مسائل بدووضع در شکل ۱ نشان داده شده است. پایداری‌سازی مسئله در روش کخ و گوشه با اضافه کردن اطلاعات زیر، به دستگاه معادلات در یک فرایند تکرار حاصل می‌شود (کخ و گوشه، ۲۰۰۲):

$$(۱) \quad \text{مقادیر اولیه مجهولات}$$

$$(۲) \quad \text{ماتریس واریانس-کواریانس مجهولات}$$

یعنی معادلات زیر به معادلات مشاهدات اضافه خواهند شد:

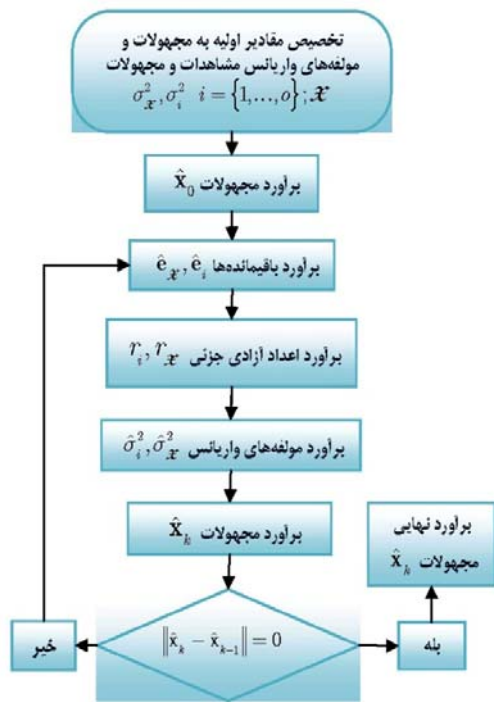
$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathcal{X} + \mathbf{e}_{\mathcal{X}} \\ D(\mathcal{X} | \sigma_{\mathcal{X}}^2) = \sigma_{\mathcal{X}}^2 \mathbf{P}_{\mathcal{X}}^{-1} \end{cases} \quad (۳)$$

جزئی مشاهدات و مجهولات نامیده می‌شوند؛ و نشان‌دهنده سهم مشاهدات b_i و اطلاعات اولیه \mathcal{X} در درجه آزادی کلی مدل (۲) هستند. این درجات آزادی جزئی را می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$$r_i = n_i - \text{trace} \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \mathbf{A}_i^t \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{N}^{-1} \right) \quad (13)$$

$$r_{\mathcal{X}} = u - \text{trace} \left(\frac{1}{\sigma_{\mathcal{X}}^2} \mathbf{P}_{\mathcal{X}} \mathbf{N}^{-1} \right) \quad (14)$$

در رابطه (۱۳) تعداد مشاهدات نوع i ام است، به طوری که $n = \sum_{i=1}^a n_i$ و در رابطه (۱۴) تعداد مجهولات مسئله است.



شکل ۱. الگوریتم تعیین مولفه‌های واریانس به روش کخ برای مسائل بدووضع.

۵ بررسی موردی

به منظور تشکیل دستگاه معادلات (۱) برای انتقال به سمت پایین کمیت‌های تفاضلی و برآورد وزن نسبی مشاهدات به روش کخ، از مشاهدات گرانشی از نوع

از نوع پتانسیل جاذبه تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع در حکم مقادیر مرزی معلوم، در اختیار هستند.

حال می‌توان \hat{x} را در حکم برآورد مجهول \mathcal{X} ، از راه معادلات نرمال زیر به دست آورد (کخ و کوشه، ۲۰۰۲):

$$\left(\frac{1}{\sigma_1^2} \mathbf{A}_1^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\sigma_k^2} \mathbf{A}_k^t \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k + \frac{1}{\sigma_{\mathcal{X}}^2} \mathbf{P}_{\mathcal{X}} \right) \hat{x} = \frac{1}{\sigma_1^2} \mathbf{A}_1^t \mathbf{P}_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \frac{1}{\sigma_k^2} \mathbf{A}_k^t \mathbf{P}_k \mathbf{b}_k + \frac{1}{\sigma_{\mathcal{X}}^2} \mathbf{P}_{\mathcal{X}} \mathcal{X} \quad (5)$$

با معرفی پارامتر پایدارسازی λ و وزن نسبی مشاهدات ω_i به صورت زیر:

$$\lambda = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{\mathcal{X}}^2} \quad (6)$$

$$\omega_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \omega_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}, \dots, \omega_{k-1} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_k^2} \quad (7)$$

رابطه (۵) بدین صورت تغییر می‌یابد:

$$\left(\mathbf{A}_1^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \omega_1 \mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 + \dots + \omega_{k-1} \mathbf{A}_k^t \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k + \lambda \mathbf{P}_{\mathcal{X}} \right) \hat{x} = \mathbf{N} \hat{x} = \mathbf{A}_1^t \mathbf{P}_1 \mathbf{b}_1 + \omega_1 \mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \omega_{k-1} \mathbf{A}_k^t \mathbf{P}_k \mathbf{b}_k + \lambda \mathbf{P}_{\mathcal{X}} \mathcal{X} \quad (8)$$

در رابطه (۵) مؤلفه‌های واریانس $\sigma_{\mathcal{X}}^2$ ، $i = \{1, \dots, k\}$ ، به روش تکرار تعیین می‌شوند. برای شروع، مقادیر اولیه‌ای برای مجهولات و مولفه‌های واریانس انتخاب شده و تکرار تا هنگامی که همگرایی حاصل شود (یعنی $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}\| = 0$) ادامه می‌یابد. مولفه‌های واریانس از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i^t \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{e}}_i}{r_i} \quad i \in \{1, \dots, k\} \quad (9)$$

و

$$\hat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{\mathcal{X}}^t \mathbf{P}_{\mathcal{X}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathcal{X}}}{r_{\mathcal{X}}} \quad (10)$$

در روابط (۹) و (۱۰) بردار باقیمانده برآورد شده مشاهدات و $\hat{\mathbf{e}}_{\mathcal{X}}$ بردار باقیمانده برآورد شده مجهولات بوده که از روابط ذیل به دست می‌آیند:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{A}_i \hat{x} - \mathbf{b}_i \quad (11)$$

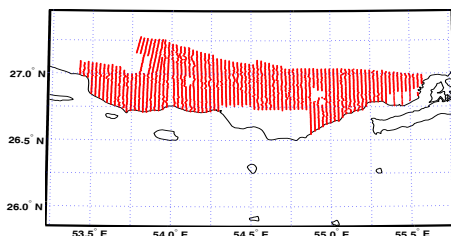
$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathcal{X}} = \hat{x} - \mathcal{X} \quad (12)$$

در روابط (۹) و (۱۰)، $r_{\mathcal{X}}$ و r_i به ترتیب درجات آزادی

شکل‌های ۴، ۵ و ۶ به ترتیب نشان‌دهنده مشاهدات تفاضلی حاصل از اندازه بردار شتاب گرانی روی سطح زمین، ژئوئید ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و ژئوئید GPS/Leveling روی سطح بیضوی مرجع هستند.

برای محاسبه پتانسیل جاذبه تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع $E_{a,b}^2$ یک شبکه منظم $2' \times 2'$ در منطقه پارس ساحلی، در محدوده $53.37^\circ \leq \lambda \leq 55.63^\circ$ و $26.00^\circ \leq \phi \leq 27.32^\circ$ ایجاد شد. بنابراین مجهولات یا به عبارت دیگر تعداد نقاطی که از طریق انتقال به سمت پایین لازم است پتانسیل جاذبه تفاضلی در آنها تعیین شود، برابر ۲۲۰۵ شد. شکل ۷ نشان‌دهنده نقاط شبکه منظم روی سطح بیضوی مرجع است.

از پتانسیل جاذبه تفاضلی حاصل از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و مشاهدات GPS/Leveling، در حکم مجهولات وزن‌دار در فرایند انتقال به سمت پایین استفاده شد. تعداد معادلات - مشاهدات که در حکم مجهولات وزن‌دار وارد محاسبات کمترین مربعات انتقال به سمت پایین شده‌اند، ۱۱۶۴ است و از این تعداد، ۱۱۴۸ نقطه مربوط به مشاهدات حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و ۱۶ نقطه مربوط به مشاهدات GPS/Leveling است. شکل ۷ مکان مشاهدات وزن‌دار از نوع ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای را با رنگ آبی و مکان مشاهدات وزن‌دار از نوع GPS/Leveling را با مثلث نشان داده است.



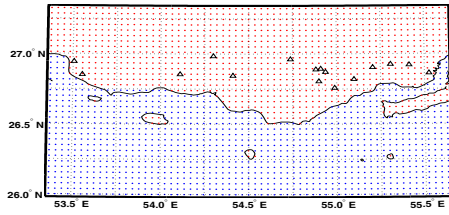
شکل ۷. پراکندگی ۶۳۵۰ نقطه‌ی گرانی‌سنجی پارس ساحلی.

اندازه بردار شتاب گرانی، ژئوئید حاصل از GPS/Leveling و ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، منطقه تحقیقاتی پارس ساحلی به مساحتی تقریبی 20000 km^2 ، در محدوده $26.00^\circ \leq \phi \leq 27.32^\circ$ و $53.37^\circ \leq \lambda \leq 55.63^\circ$ در جنوب کشور، استفاده شد. در این منطقه مدیریت اکتشاف شرکت ملی نفت ایران اقدام به اندازه‌گیری ۶۳۵۰ نقطه گرانی در فواصل حدودی ۵۰۰ متری در جهت عرض جغرافیایی و ۲۰۰۰ متری در جهت طول جغرافیایی در قسمت خشکی کرده است. موقعیت این نقاط با GPS دو بسامدی تعیین و اندازه شتاب گرانی با گرانی‌سنج دقیق به دقت میکروگال، به صورت نسبی اندازه‌گیری و به نقطه گرانی مطلق درجه یک کشوری واقع در فرودگاه بندر عباس متصل شده است (گروه غیرلرزه‌ای مدیریت اکتشاف، ۱۳۸۴). پراکندگی این نقاط در شکل ۲ نشان داده شده است. تغییرات اندازه بردار شتاب گرانی در منطقه پارس ساحلی بر مبنای مشاهدات صورت گرفته در شکل ۳ آورده شده است.

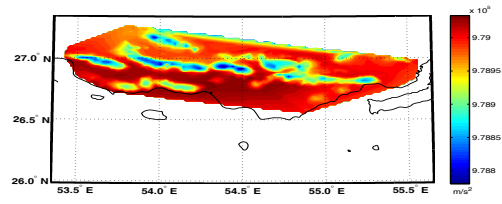
قسمت اصلی محاسبات، حل معکوس مسئله مقدار مرزی دیریکله با مقادیر مرزی روی سطح بیضوی است. از آنجا که مسئله مقدار مرزی دیریکله جواب خاصی از معادله دیفرانسیل لاپلاس در دستگاه مختصات بیضوی ژاکوبی است، فقط برای کمیت‌های هماهنگ صادق است. بدین خاطر لازم است قبل از اجرای فرایند انتقال به سمت پایین، طی مرحله حذف، مشاهدات از انواع گوناگون را به مشاهدات تفاضلی هماهنگ تبدیل کنیم. این مرحله که جزئیات آن در (صفری، ۲۰۰۴؛ جمعه‌گی، ۲۰۰۶) عرضه شده، شامل دو مرحله اصلی زیر است:

(۱) حذف اثرات میدان ناشی از مدل ژئوپتانسیلی جهانی بر حسب ضرایب هماهنگ بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به علاوه میدان گریز از مرکز.

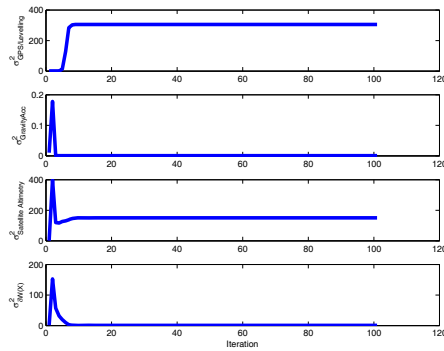
(۲) حذف اثرات میدان جاذبه جرم‌های واقع در فاصله نزدیک روی سطح بیضوی حول نقاط مشاهداتی.



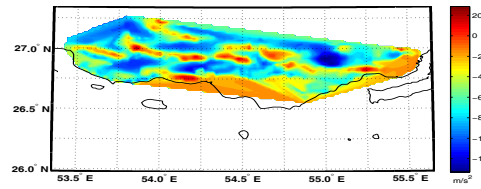
شکل ۷. توزیع نقاط روی سطح بیضوی شامل نقاط مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای (به رنگ آبی) و مشاهدات GPS/Leveling (با علامت مثلث) و نقاط دیگر (به رنگ سرخ).



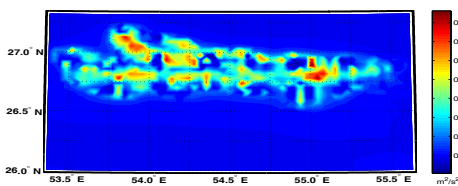
شکل ۳. تغییرات شتاب گرانی در پارس ساحلی، براساس مشاهدات گرانشی.



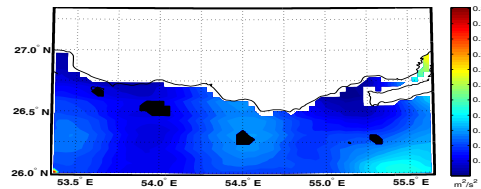
شکل ۸. منحنی همگرایی مولفه‌های واریانس مشاهدات و مجهولات. پارامتر پایدارسازی بهینه حاصل از تکرار ۶۸ 9.4×10^{-7} است.



شکل ۴. تغییرات شتاب جاذبه تفاضلی در ایستگاه‌های مشاهداتی اندازه بردار شتاب گرانی.

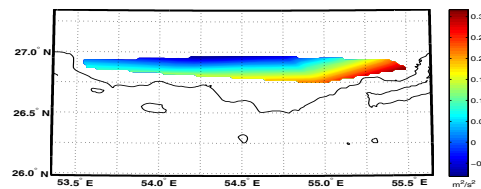


شکل ۹. پتانسیل گرانی تفاضلی بر اساس انتقال به سمت پایین کمیت‌های تفاضلی.



شکل ۵. تغییرات پتانسیل تفاضلی به‌دست آمده از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای.

برای اجرای فرایند انتقال به سمت پایین کمیت‌های تفاضلی، به‌منظور به‌دست آوردن جوابی معتبر برای پتانسیل جاذبه تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع، از روش کخ استفاده شده است. ماتریس ضرایب حاصل از مشاهدات



شکل ۶. تغییرات پتانسیل تفاضلی در ایستگاه‌های GPS/Leveling.

اندازه بردار شتاب گرانی زمینی، $A_{Gravity Acc.}$ ، ماتریسی با ابعاد 1859×2205 است. ماتریس ضرایب حاصل از مشاهدات ژئوئید ارتفاعسنجی ماهواره‌ای، $A_{Satellite Altimetry}$ ، ماتریسی با ابعاد 1148×2205 است. ماتریس ضرایب حاصل از مشاهدات GPS/Leveling، $A_{GPS/Leveling}$ ، ماتریسی با ابعاد 16×2205 است. در این تحقیق، پارامتر پایداریسازی به صورت $\sigma_{\delta W(X)}^2 / \sigma_{Gravity Acc.}^2$ تعریف، و مقدار آن 9.4×10^{-7} در تکرار ۶۸ برآورد شد. شکل ۸ نشان‌دهنده مراحل تکرار برای تعیین مولفه‌های واریانس مشاهدات از انواع (۱) اندازه بردار شتاب گرانی، (۲) مشاهدات GPS/Leveling و (۳) مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای است. در جدول ۵ نتایج به دست آمده برای مولفه‌های واریانس آورده شده است. در شکل ۹، پتانسیل جاذبه تفاضلی بعد از انتقال به سمت پایین، حاصل از تکرار ۶۸، در حکم نتیجه نهایی، نشان داده شده است.

۶ نتیجه‌گیری

پتانسیل گرانی روی سطح بیضوی مرجع $\mathbb{H}_{a,b}^2$ در حکم جواب مسئله مقدار مرزی پواسون را می‌توان از تابعک‌های مشاهداتی متفاوتی، به‌طور جداگانه برآورد کرد. ترکیب مشاهدات نامتجانس نیازمند برآورد وزن نسبی صحیح مشاهدات از انواع گوناگون است که می‌تواند از راه برآورد مولفه‌های واریانس مشاهدات از انواع گوناگون صورت گیرد.

واریانس مشاهدات از نوع اندازه بردار شتاب گرانی در مسئله انتقال به سمت پایین برابر $(0.35 mGal)^2$ ، مولفه واریانس مشاهدات از نوع ژئوئید حاصل از GPS/Leveling در مسئله انتقال به سمت پایین مقدار $(17.48 m^2/s^2)^2$ و مولفه واریانس مشاهدات از نوع ژئوئید حاصل از ارتفاعسنجی ماهواره‌ای در مسئله انتقال به سمت پایین مقدار $(12.24 m^2/s^2)^2$ برآورد شد. مولفه واریانس پتانسیل تفاضلی برآورد شده روی سطح بیضوی مرجع نیز $(0.36 m^2/s^2)^2$ به دست آمد. این مولفه‌های واریانس معادل دقت 1.78 m برای مشاهدات از نوع ژئوئید GPS/Leveling و 1.25 m برای مشاهدات از نوع ژئوئید Satellite/Altimetry است. این دقت‌ها در واقع مقادیری هستند که برای "تأمین وزن نسبی صحیح" این مشاهدات در مقابل مشاهدات از نوع اندازه بردار شتاب گرانی لازم می‌شود. چیزی که شاید برآورد آن با ذهنیت ما از دقت GPS/Leveling غیرممکن باشد، و این لزوم و اهمیت داشتن ابزاری برای برآورد وزن نسبی مشاهدات نامتجانس را مشخص می‌سازد.

بنابر این می‌توان نتیجه گرفت که با تجربه انجام گرفته راه برای تلفیق هر نوع از انواع مشاهدات گرانشی در مسئله تعیین ژئوئید، صاف و هموار گردیده است.

جدول ۵. نتایج به دست آمده برای مؤلفه‌های واریانس.

$(0.35 mGal)^2$	برآورد نهایی مولفه واریانس مشاهدات از نوع اندازه بردار شتاب گرانی $(\sigma_{Gravity Acc.}^2)$
$(17.48 m^2/s^2)^2$	برآورد نهایی مولفه واریانس مشاهدات از نوع GPS/Leveling $(\sigma_{GPS/Leveling}^2)$
$(12.24 m^2/s^2)^2$	برآورد نهایی مولفه واریانس مشاهدات از نوع ارتفاعسنجی ماهواره‌ای $(\sigma_{Satellite Altimetry}^2)$
$(0.36 m^2/s^2)^2$	برآورد نهایی مولفه واریانس مجهولات (پتانسیل گرانی تفاضلی روی سطح بیضوی) $(\sigma_{\delta W(X)}^2)$

در این تحقیق، تلفیق مشاهدات از انواع ۱ اندازه بردار شتاب گرانی زمینی، ۲ ژئوئید ارتفاعسنجی ماهواره‌ای و ۳ ژئوئید GPS/Leveling در مسئله انتقال به سمت پایین ژئوئید، صورت پذیرفت. برای این منظور روش کخ و کوشه مورد استفاده قرار گرفت؛ تا ضمن پایداریسازی مسئله انتقال به سمت پایین، مولفه‌های واریانس مشاهدات و مجهولات نیز برآورد شوند. بر اساس نتایج جدول ۵ مولفه

- nach der Methode der kleinsten Quadrate, 3. Auflage. Teubner, Leipzig.
- Hofmann, B. and Moritz, H., 2005 Physical Geodesy, Springer-Verlag Vienna.
- Hwang, 1997, Analysis of some systematic errors affecting altimeter-derived sea surface gradient with application to geoid determination over Taiwan, *Journal of Geodesy*, **71**(2), 113-130.
- Jomegi, A., 2006, Geoid computation at coastal area using gravity, satellite altimetry and GPS/Leveling data, M.Sc. Thesis, Tehran University.
- Kavzoglu, T. and Saka, M. H., 2005, Modelling local GPS/levelling geoid undulations using artificial neural networks, *Journal of Geodesy*, **78**(9), 520-527.
- Kenyeres, A., 1999, Completion of the nationwide GPS-gravimetric geoid solution for Hungary, *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, **24**(1), 85-90.
- Knudsen, P., Brovelli, M., 1993, Collinear and cross-over adjustment of Geosat ERM and Seasat altimeter data in the Mediterranean Sea, *Surveys in Geophysics*, **14**(4-5), 449-459.
- Koch, K. R. and Kusche, J., 2002, Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *J Geod.*, **76**, 259-268.
- Koch, K. R., 1990 Bayesian inference with geodetic applications. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Koch, K. R., 1990, Bayesian inference for variance components, *Manuscr Geod.*, **12**, 309-313.
- Koch, K. R., 2000, Einführung in die bayes-statistik, Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Lehmann, R., 1999, Studies in altimetry-gravimetry problems for geoid determination, *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, **24**(1), 1999, 47-51.
- Lerch, F. L., 1991, Optimum data weighting and error calibration for estimation of gravitational parameters, *Bull Geod.*, **65**, 44-52.
- Li, J. and Sideris, M. G., 1997, Marine gravity and geoid determination by optimal combination of satellite altimetry and shipborne gravimetry data, *Journal of Geodesy*, **71**(4), 209-216.
- Martín, A., Anquela, A. B., Padín, J. and Berné J. L., 2005, Detection of local geoid deformations by gravity disturbances from GPS/gravimetric observations, *Studia Geophysica et Geodaetica*, **49**(1), 43-62.
- Martinec, Z., 1998, Boundary value problems for gravimetric determination of precise geoid, Springer, (lecture notes in earth sciences; 73).
- منابع
- گروه غیرلرزه‌ای (۱۳۸۴)، گزارش تعبیر و تفسیر گرانی و مغناطیس ناحیه فارس ساحلی، اداره ژئوفیزیک، مدیریت اکتشاف شرکت ملی نفت ایران.
- Adjaout, A. and Sarrailh, M., 1997, A new gravity map, a new marine geoid around Japan and the detection of the Kuroshio current, *Journal of Geodesy*, **71**(12), 725-735.
- Andritsanos, V. D., Fotiou, A., Paschalaki, E., Pikridas, C., Rossikopoulos, D. and Tziavos, I. N., 2000, Local geoid computation and evaluation, *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, **25**(1), 63-69.
- Ardalan A. A., 1999, High-resolution regional geoid computation in the world geodetic datum 2000 based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity, Ph.D. thesis, Stuttgart University.
- Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2001, Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula): case studies, *Journal of Geodesy*, **75**, 544-552.
- Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2004, High-resolution geoid computation without applying Stokes's formula; case study: high-resolution geoid of Iran, *Journal of Geodesy*, **78**, 138-156.
- Bašić, T., Brkić M. and Sünkel, H., 1999, A new, more accurate geoid for Croatia, *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, **24**(1), 67-72.
- Benahmed Daho, S. A., Kahlouche, S. and Fairhead, J. D., 2006, A procedure for modelling the differences between the gravimetric geoid model and GPS/levelling data with an example in the north part of Algeria, *Computers & Geosciences*, In Press, Corrected Proof, Available online 15 June 2006.
- Crocetto, N, Gatti, M. and Russo, P., 2000 Simplified formulae for the BIQUE estimation of variance components in disjunctive observation groups, *J. Geod.*, **74**, 447-457.
- Grafarend, E. and d'Hone, A., 1978, Gewichtsschätzung in geodatischen Netzen Reihe A, 88. Deutsche Geodatische Kommission, München.
- Gremenitcharsky, R. S., Rangelova, E. V. and Sideris, M. G., 2005, Transformation between gravimetric and GPS/levelling-derived geoids using additional gravity information, *Journal of Geodynamics*, **39**(5), 527-544.
- Helmert, F. R., 1924, Die Ausgleichsrechnung

- Safari, A., 2004 Ellipsoidal boundary value problem for geoid computations via modulus of gravity, astronomical longitude, astronomical latitude, and satellite altimetry observations. Ph.D thesis, Department of Surveying and Geomatics Engineering University of Tehran (In Persian).
- Schrama, E. J. O., 1997, Satellite altimetry, ocean dynamics and the marine geoid, Lecture Notes in Earth Sciences, **65**, 405-454.
- Sjöberg, E., 1991, Åland GPS levelling campaign in 1987, Journal of Geodesy, **65**(4), 209-217.
- Thong, N. C. and Grafarend, E. W., 1989, A Spheroidal model of the terrestrial gravitational field, Manuscr Geod., **14**, 285-304.
- Wunsch, C., Stammer, D., 2003, III: OCEAN CIRCULATION: global ocean data assimilation and geoid measurements, Space Science Reviews, **108**(1-2), 147-162.
- Xu, P. and Rummel, R., 1994b, A simulation study of smoothness methods in recovery of regional gravity fields, Geophys J Int., **117**, 472-486.
- Xu, P., Shen, Y., Fukuda, Y. and Liu, Y., 2006 variance component estimation in linear inverse ill-posed models, Journal of Geodesy, Published online.
- Zhang, Ch., 1998, Estimation of dynamic ocean topography in the Gulf Stream area using the Hotine formula and altimetry data, Journal of Geodesy, **72**(9), 499-510.
- Zhong, D., 1997, Robust estimation and optimal selection of polynomial parameters for the interpolation of GPS geoid heights, Journal of Geodesy, **71**(9), 552-561.
- Martinec, Z., and Grafarend, E. W., 1997 Construction of Green's function to the external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution, Journal of Geodesy, **71**, 562-570.
- Nahavandchi, H., and Soltanpour, A., 2006, Improved determination of heights using a conversion surface by combining gravimetric quasi-geoid/geoid and GPS-levelling height differences, Studia Geophysica et Geodaetica, **50**(2), 165-180
- Olgiati, A., Balmino, G., Sarrailh, M. and Green, C. M., 1995, Gravity anomalies from satellite altimetry: comparison between computation via geoid heights and via deflections of the vertical, Journal of Geodesy, **69**(4), 252-260.
- Ou, Z., 1991, Approximate Bayes estimation for variance components. Manuscr Geod, **16**, 168-172.
- Ou, Z., and Koch, K. R., 1994 Analytical expressions for Bayes estimates of variance components. Manuscr Geod., **19**, 284-293.
- Rao, C. R., 1973, Linear statistical inference and its applications, Wiley, New York.
- Roger, H., 2000, Modelling the geoid and sea-surface topography in coastal areas, Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy, **25**(1), 9-16.
- Safari A., Ardalan A., Grafarend, A and Erik, W., 2005, A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: The geoid of Iran, Journal of Geodynamics, **39**, 545-568.