

# پالایش داده‌های پتانسیلی گریس (GRACE) برای تعیین تغییرات میدان گرانی با استفاده از روش پایدارسازی تیخونوف تعمیم‌یافته در زیرفضای سوبولف

عبدالرضا صفری<sup>۱\*</sup>، محمدعلی شریفی<sup>۲</sup>، حمیدرضا باقری<sup>۳</sup> و یحیی الله توکلی<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup>دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

<sup>۲</sup>استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

<sup>۳</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

<sup>۴</sup>دانشجوی دکتری ژئودزی گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۱/۶/۱، پذیرش نهایی: ۹۲/۲/۲۴)

## چکیده

با پرتاب جفت‌ماهواره GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiments) در سال ۲۰۰۲، این امکان به وجود آمد که بتوان تغییرات میدان گرانی را به صورت ماهیانه را با دقت زیاد و در مقیاس جهانی به دست آورد. یکی از کاربردهای این مدل‌های ماهیانه در به دست آوردن تغییرات میدان گرانی ناشی از تغییرات جرم سطحی به علت پدیده‌های هیدرولوژیکی است. اما داده‌های پتانسیلی جفت‌ماهواره GRACE دارای نویه‌ای هستند که با افزایش درجه ضرایب ژئوپتانسیل افزایش می‌یابد. برای به دست آوردن مدل‌های تغییرات میدان گرانی (جرم سطحی) با استفاده از این داده‌ها، باید این نویه را حذف کرد. در این مقاله از دیدگاه مسائل معکوس مسئله کاهش نویه بررسی شده و از ایده راهبرد پایدارسازی تیخونوف تعمیم‌یافته در زیرفضای سوبولف برای کاهش نویه استفاده شده است. برای ارزیابی ایده معرفی شده، در حوزه آبی رودخانه می‌سی‌پی (Mississippi river basin) از مشاهدات چاههای پیزومتری (Global Land Data Assimilation ) GLDAS و مدل هیدرولوژی Piezometric Wells Systems و در حوزه‌های آبی آمازون (Amazon river basin)، آلبانی (Albany River)، سومالی (Somalia)، دانوب (Danube) و چین شمالی (North China) از مشاهدات در محل تخلیه (In-situ Run off) و داده‌های واگرایی شار رطوبت Hydro- (Moisture flux divergence) مشاهداتی با ابزاری مانند رادیوسوند (Radiosonde) و یا مدل‌های آب‌هواشناسی (Meteorology models)، استفاده شده است. ارزیابی نتایج نشان‌دهنده عملکرد مناسب روش عرضه شده بود و نتیجه به دست آمده از طریق راهبرد پایدارسازی «تیخونوف تعمیم‌یافته در زیرفضای سوبولف (Generalized Tikhonov in Sobolev Subspace)» نتایج بهتری نسبت به سایر روش‌ها به دست می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مدل تغییرات جرم سطحی، نویه، بسط مقدار منفرد، پایدارسازی، تیخونوف تعمیم‌یافته، زیرفضای سوبولف

## Time-variable gravity determination from the GRACE gravity solutions filtered by Tikhonov regularization in Sobolev subspace

Safari, A.<sup>۱</sup>, Sharifi, M. A.<sup>۲</sup>, Bagheri, H.<sup>۳</sup> and Allahtavakoli, Y.<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup>Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, College of Engineering, University of Tehran

<sup>۲</sup>Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, College of Engineering, University of Tehran  
<sup>۳</sup>M.Sc. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, College of Engineering, University of Tehran

<sup>۴</sup>Ph.D. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, College of Engineering, University of Tehran

(Received: 22 Aug 2012, Accepted: 14 May 2013)

## Summary

The GRACE mission has provided scientific community Time-variable gravity field solutions with high precision and on a global scale. The GRACE mission was launched on March 2003. This mission consists of two satellites that pursue each other in their orbit. Distance between two satellites in orbit is measured continuously to an accuracy of better than 1 micron using KBR system placed in satellites. As the satellite fly in the gravity field, this distance changes and by monitoring those changes the gravity field can be determined. To reduce non-gravitational accelerations, each satellite has an on-board accelerometer to measure these accelerations (Wahr and Schubert, 2007). Providing profiles of the atmosphere using GPS measurements for gaining knowledge about the atmosphere is another goal of this mission.

One of the products of this mission is GRACE LEVEL-2. This product consists of monthly spherical harmonic coefficients up to degree 120. One application of these coefficients is to determine time-variable gravity field. The time-variable gravity field is then used to solve for the time-variable-mass field (Wahr and schubert, 2007).

A mathematical model for determining the surface density (mass) variations using spherical harmonic coefficients is presented by Wahr et al. (1998). This mathematical model is as follows:

$$\Delta\sigma(\theta', \lambda') = \frac{a\rho_{avg}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)}{1+k_n} \Delta w_{nm}^{GRACE} \bar{e}_{nm}(\theta', \lambda') \quad (1)$$

Where  $\Delta\sigma$ ,  $\rho_{avg} = \frac{3M}{4\pi a^3} = 5517$ ,  $a$ ,  $k_n$ ,  $\Delta w_{nm}^{GRACE}$ ,  $\bar{e}_{nm}(\theta, \lambda)$ ,  $n$ ,  $m$  are surface density variations, mean earth density, mean earth radius, Love number of degree  $n$ , GRACE potential changes, fully normalized Legendre functions, degree and order respectively. Spherical harmonic coefficients from the GRACE are noisy which increase rapidly with increasing degree of geopotential coefficients. In addition, monthly surface mass variations map shows the presence of long, linear features, commonly referred as stripes (Swenson and Wahr, 2006).

Hence, in different methods of filtering it is tried to solve both problems. Filtering of the GRACE gravity solutions has been studied extensively. For some of the recent contributions we refer to Wahr et al. (1998), Chen et al.(2005), Swenson and Wahr (2006), Kusche (2007), Sasgen et al. (2006), , Swensonand Wahr (2011), Save et.al. (2012).

In this paper, for filtering the GRACE gravity solutions, we propose a new way of determining the surface mass change formula under the assumptions considered in Wahr et al. (1998) by means of Singular Value Expansion of the Newton's Integral equation as an Inverse Problem.

Let  $\{\Delta w(\mathbf{r})\}_{\text{surface mass}}$  be the potential change caused by just Earth's surface mass change, then:

$$\{\Delta w(\mathbf{r})\}_{\text{surface mass}} = \iint \frac{G a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Delta\sigma(\theta', \lambda') dS \quad (2)$$

or in operator form:

$$K(\Delta\sigma) = \{\Delta w(\mathbf{r})\}_{\text{surface mass}} \quad (3)$$

Where  $K$  is an integral operator with kernel  $k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Series expansion of the kernel  $k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  based on Associated Legendre functions is as follows:

$$k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{G a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_n \sum_m \frac{G}{r(2n+1)} \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{e}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{e}_{nm}(\theta', \lambda') \quad (4)$$

Now, by means of singular value expansion, singular system for this operator is as follows:

$$\begin{cases} s_i = \frac{4\pi G a^2}{r(2n+1)} \left(\frac{a}{r}\right)^n \\ u_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \bar{e}_{nm}(\theta, \lambda) \\ v_i(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \bar{e}_{nm}(\theta', \lambda') \end{cases} \quad (5)$$

where  $i = n^2 + n + m + 1$  and  $s_i$ ,  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  are singular values, right singular vectors, left singular vectors, respectively. In terms of singular value expansion, the surface density variation can be written as follows:

$$\Delta\sigma^{Exact} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot \frac{\langle u_i, \Delta w \rangle_{ex}}{s_i} v_i \quad (6)$$

where  $f_i$ s are filter coefficients that are determined by regularization methods. In this paper, filter coefficients are determined from regularization methods, such as Truncated SVE, Damped SVE and the Standard and Generalized Tikhonov methods in Sobolev subspace.

The numerical results show a good performance of the method “Generalized Tikhonov in Sobolev subspace”, which effectively reduces the noise and the stripes.

**Keywords:** Surface Mass Variations Model, Noise, Singular Value Expansion, Regularization, Generalized Tikhonov, Sobolev Subspace

## ۱ مقدمه

در مدار به طور پیوسته اندازه‌گیری می‌شود. ماموریت NASA یک طرح مشترک میان سازمان National Aeronautics and Space Administration و سازمان Deutsces Zentrum fur Luft-und Raumfahrt (DLR) آلمان است و هدف این ماموریت تعیین میدان گرانی زمین با توان تفکیک زیاد و تغییرات زمانی آن همچنین نیمرخ برداری جو زمین با استفاده از اندازه‌گیری‌های GPS (Global Positioning System) می‌باشد.

مدل‌سازی دقیق میدان گرانی زمین یکی از اهداف دانش ژئودزی است. به علت پوشش یکنواخت در کل جهان، مدل‌سازی جهانی میدان گرانی زمین با استفاده از ماهواره‌های گرانی‌سنجی صورت می‌گیرد. بر این اساس چندین ماموریت فضایی طراحی شده است که از آن جمله می‌توان به ماموریت GRACE اشاره کرد. ماموریت فضایی GRACE شامل دو ماهواره است که در یک مدار واحد همدیگر را تعقیب می‌کنند و فاصله بین دو ماهواره

تغییرات میدان گرانی در یک بازه کوتاه (مثلاً یک ماه)، فقط می‌تواند ناشی از تغییرات چگالی سطحی در یک لایه نازک از سطح زمین باشد. فرض دیگر اینکه فاصله همه نقاط روی سطح زمین از مرکز زمین برابر با شاعع متوسط کره زمین ( $r \approx a$ ) در نظر گرفته می‌شود. همچنین از دیدگاه آنها تغییرات چگالی سطحی به دست آمده از GRACE علاوه بر تغییرات مستقیم جرم سطحی، تحت تأثیر بارگذاری و تغییر شکل جرم سطحی نیز هست که باعث بوجود آمدن ترم دیگری در مدل می‌شود. مدل ریاضی عرضه شده (وار و همکاران، ۱۹۹۸) به شکل رابطه (۱) است:

$$\Delta\sigma(\theta', \lambda') = \frac{a\rho_{avg}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)}{1+k_n} \Delta w_{nm}^{GRACE} \bar{e}_{nm}(\theta', \lambda') \quad (1)$$

که در آن،  $\Delta\sigma$ ،  $a$ ،  $\rho_{avg}$   $= \frac{3M}{4\pi a^3} = 5517$ ،  $k_n$ ،  $m, n$  به ترتیب تغییرات چگالی سطحی، چگالی متوسط زمین، میانگین شاعع متوسط کره زمین، اعداد لاو از درجه  $n$ ، تغییرات ضرایب پتانسیلی، GRACE، تابع‌های لژاندر کاملاً نرمال شده و دارای درجه و مرتبه هستند.

برای نمایش مدل‌های تغییرات جرم سطحی معمولاً از کمیتی به نام «ارتفاع آب معادل (Equivalent Water Height)» استفاده می‌شود که مفهوم آن تغییر مقیاس چگالی سطحی به میزان تغییرات سطح آب بر حسب متر است. برای این کار فقط لازم است  $\Delta\sigma$  را بر چگالی متوسط آب  $\rho_w = 1000$  تقسیم کنیم و به رابطه (۲) برسیم (وار و شوبرت، ۲۰۰۷):

$$EWH = \frac{\Delta\sigma}{\rho_w} \quad (2)$$

ضرایب به دست آمده از GRACE دارای نوافه و همچنین رفتاری صعودی بر حسب درجات ضرایب هماهنگ است. همچنین در مدل‌های تغییرات میدان

برای به دست آوردن دانشی در خصوص جو، اعم از جو و یون‌سپهر، است. دو ماهواره این ماموریت در روز ۱۷ مارس ۲۰۰۲ به فضا پرتاب شده‌اند. این سامانه ماهواره‌ای اولین نسل از ماهواره‌های خوشای است که در آن از دو ماهواره مشابه که در یک مدار با ارتفاع ۴۵۰ کیلومتری از سطح زمین قرار دارند و در مداری تقریباً دایره‌ای و نزدیک قطب در حال حرکت‌اند، استفاده شده است (شکل ۱). اطلاعات مدار این ماهواره از دو کانال متفاوت حاصل می‌شود. موقعیت دو ماهواره از راه سامانه موقعیت‌یاب جهانی GPS با استفاده از گیرنده‌هایی که روی جفت‌ماهواره قرار دارند ثبت می‌شود که سرعت ثبت اطلاعات موقعیتی ماهواره در آن ۶۰ ثانیه است. فاصله نسبی میان این دو ماهواره و تغییرات این فاصله به صورت پیوسته با دقت زیادی با دستگاه KBR (Ranging System) تعییه شده در ماهواره‌ها اندازه‌گیری می‌شود (شکل ۱).

علاوه بر مشاهدات KBR، هر کدام از ماهواره‌های GRACE مجهز به یک شتاب‌سنج سه محوری در مرکز جرم خود هستند که شتاب‌های غیر جاذبی وارد بر ماهواره را اندازه‌گیری می‌کنند. سری زمانی حاصل از مشاهدات سامانه موقعیت‌یاب جهانی و مشاهدات KBR اطلاعات بسیار ارزنده‌ای از موقعیت، سرعت و شتاب نسبی دو ماهواره به دست می‌دهد.

یکی از محصولات این ماموریت، موسوم به Level-2 (هارمونیک)‌های کروی تابع پتانسیل برای هر ماه و حداقل تا درجه و مرتبه ۱۲۰ هستند. از کاربردهای این ضرایب می‌توان از به دست آوردن مدل‌های تغییرات چگالی سطحی ماهیانه در مقیاس جهانی نام برد.

مدل ریاضی برای تعیین تغییرات چگالی (جرم) سطحی با استفاده از ضرایب هماهنگ‌های کروی را وار و همکاران (۱۹۹۸) عرضه کرده‌اند. در این مدل فرض بر این است که

(هان، ۲۰۰۵) و فیلتر ناهمبسته‌سازی که به همراه فیلتر گاوی همسانگرد اعمال می‌شود (سونسون و وار، ۲۰۰۶) و فیلترهایی که مبنای کار آنها استفاده از ابزار کارآمد آنالیز تابع‌های متعامد تجربی همراه با فیلتر گاوی همسانگرد است (شrama و همکاران، ۲۰۰۷)، اشاره کرد. همچنین از دسته دوم می‌توان به فیلترهایی که با استفاده از طبیعت سیگنال و با کمینه کردن یک تابع هدف مانند خطای مربعی متوسط به دست می‌آیند اشاره کرد. فیلتر وینر، مانند فیلتر وینر همسانگرد (ساسگن و همکاران، ۲۰۰۶)، فیلتر وینر غیرهمسانگرد (کوش، ۲۰۰۷) و فیلتر وینر ناهمسانگرد غیرمتقارن (کلیس و همکاران، ۲۰۰۸)، از جمله این فیلترها محسوب می‌شوند.

هریک از این روش‌ها مزایا و معایبی دارند. مثلاً در روش کلیس و همکاران (۲۰۰۸)، به مثابه یکی از کارآمدترین روش‌ها، این کار با کمینه کردن متوسط جهانی خطای مربعی متوسط و با استفاده از ماتریس‌های وریانس-کووریانس کامل سیگنال و نوفه صورت گرفته است و سعی در ایجاد مدل‌های فیلتر شده ایده‌آل دارد. اما این روش معایبی نیز دارد، که از آن جمله می‌توان به برآورد نشدن دقیق ماتریس‌های وریانس-کووریانس کامل سیگنال و نوفه، و همچنین عملیات سنگین ماتریسی اشاره کرد. همچنین در روش ناهمبسته‌سازی سونسون و وار (۲۰۰۶)، گرچه نوارهای شمالی-جنوبی به خوبی حذف می‌شوند، ولی این روش سیگنال واقعی را در مکان‌های عاری از نوفه از بین می‌برد. در مورد فیلتر میانگین‌گیری گاوی همسانگرد نیز باید توجه داشت که این فیلتر، که جکلی (۱۹۸۱) آن را مطرح کرد، میزان مشارکت ضرایب درجهات بالا را کاهش می‌دهد، اما این کار ممکن است به از بین رفتن اطلاعات مفیدی از سیگنال واقعی منجر شود.

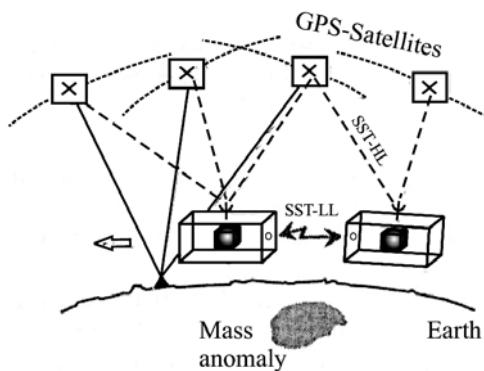
گرانی (جرم سطحی) نوارهای شمالی-جنوبی (Stripes) وجود دارد که سونسون و وار (۲۰۰۶) همبستگی بین ضرایب هماهنگ را دلیل وجود آنها اعلام کردند. علت بوجود آمدن این همبستگی، نوع حرکت مداری این ماهواره است که تراکم داده‌ها از قطب به سمت استوا را کاهش می‌دهد. شکل ۲ یکی از مدل‌های ماهیانه تغییرات جرم سطحی را نمایش می‌دهد.

در شکل ۲ از بازه تغییرات مقادیر ارتفاع آب معادل، وجود نوفه کاملاً قابل درک است، همین‌طور نوارهای شمالی-جنوبی نیز در این شکل به‌وضوح قابل رویت هستند. برای درک بهتر این نوارها مدل بالا، پس از اعمال یک فیلتر گاوی همسانگرد با شعاع میانگین‌گیری ۵۰۰ کیلومتر، در شکل ۳ نشان داده شده است. این فیلتر به‌منظمه ساده‌ترین روش پالایش (فیلترینگ) داده‌های گرانی را جکلی (۱۹۸۱) معرفی کرده است.

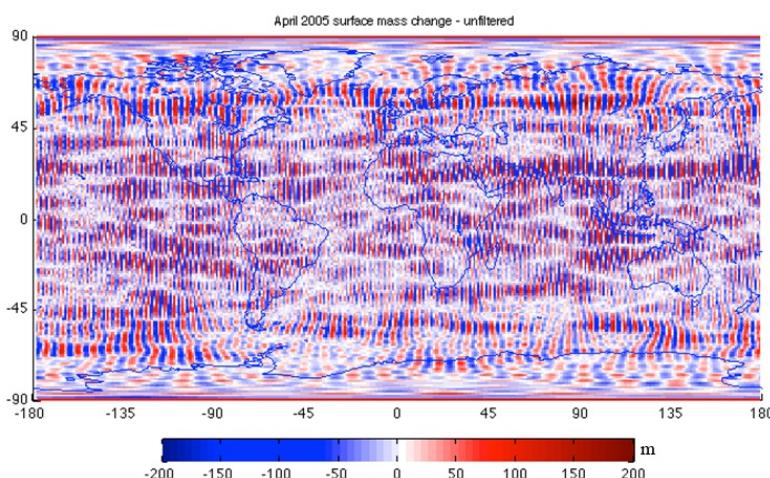
با اعمال فیلتر گاوی میزان تغییرات آب معادل در بازه ثبت شده تغییرات هیدرولوژیکی آب در چرخه طبیعت است.

اما کماکان نوارهای شمالی-جنوبی به‌وضوح دیده می‌شوند. از این‌رو در روش‌های متفاوت پالایش سعی می‌شود که هر دو مشکل حل شود. در بعضی روش‌ها که آنها را فیلترهای ریاضی (Deterministic) می‌نامند، در ابتدا مرحله اول با روشی که معمولاً استفاده از فیلتر گاوی معمولی است، صورت می‌گیرد و سپس نوارها با روشی دیگر حذف می‌شوند. در برخی دیگر از روش‌ها که فیلترهای آماری (Statistic) نامیده می‌شوند (مختراری، ۱۳۸۹)، هردو مرحله به‌طور همزمان صورت می‌گیرد.

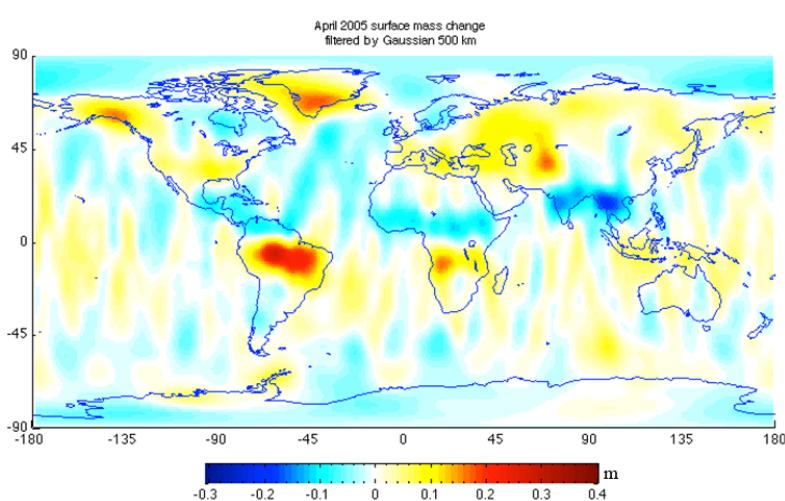
از دسته اول می‌توان به فیلترهایی مانند فیلتر گاوی همسانگرد (جکلی، ۱۹۸۱)، فیلتر گاوی ناهمسانگرد



شکل ۱. سامانه‌های موقعیت ماهواره GRACE



شکل ۲. مدل ماهیانه تغییرات جرم سطحی بدست آمده از GRACE بدون اعمال فیلتر.



شکل ۳. مدل ماهیانه تغییرات جرم سطحی بدست آمده از GRACE پس از اعمال فیلتر گاوسی با شعاع ۵۰۰ کیلومتر.

که در آن،  $\Delta w$  تغییرات پتانسیل (سطحی)،  $M$  جرم زمین،  $r$  فاصله تقریبی ماهواره‌ها از مرکز زمین ( $6800$  کیلومتر) و  $\Delta w_{nm}^{GRACE}$  ضرایب لزاندر مربوط به تغییرات پتانسیل حاصل از GRACE هستند.

وار و همکاران (۱۹۹۸) بر این اعتقادند که تغییرات در پتانسیل دارای دو منشأ است. اثر اول، اثر مستقیم تغییر جرم سطحی و اثر دوم اثر غیرمستقیم تغییر جرم، است. تغییر جرم سطحی باعث تغییرات در بارگذاری و تغییر شکل زمین صلب خواهد شد (وار و همکاران، ۱۹۹۸):

$$\{\Delta w_{nm}\}_{\text{solid Earth}} = k_n \{\Delta w_{nm}\}_{\text{surface mass}} \quad (4)$$

$k_n$  عدد لاو مربوط به درجه  $n$  است. در نتیجه ضرایب تغییر کلی پتانسیل از رابطه (۵) قابل محاسبه خواهد بود:

$$\begin{aligned} \Delta w_{nm}^{GRACE} &= \\ &\{\Delta w_{nm}\}_{\text{surface mass}} + \{\Delta w_{nm}\}_{\text{solid Earth}} \quad (5) \\ &= (1 + k_n) \{\Delta w_{nm}\}_{\text{surface mass}} \end{aligned}$$

در این تحقیق با استفاده از روش بسط مقادیر منفرد و با همان فرضیاتی که وار و همکاران (۱۹۹۸) در نظر گرفته‌اند رابطه تغییرات چگالی سطحی را به دست می‌آوریم.

حال اگر تغییر پتانسیلی که فقط ناشی از تغییرات جرم سطحی است، در نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$\{\Delta w(\mathbf{r})\}_{\text{surface mass}} = \iint \frac{G a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Delta \sigma(\theta', \lambda') dS \quad (6)$$

که می‌توان آن را به صورت (۷) نمایش داد:

$$K(\Delta \sigma) = \{\Delta w(\mathbf{r})\}_{\text{surface mass}} \quad (7)$$

که در آن،  $K$  عملگر القا شده کرنل  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  است. با در نظر گرفتن روابط (۴)، (۵)، (۶) و (۷) و اعمال تصحیحات لازم در کرنل انتگرال نیوتون با توجه به تقریب وار و همکاران (۱۹۹۸)، یعنی  $(r \approx a)$ ، کرنل و بسط آن به شکل رابطه (۸) خواهد بود:

در این تحقیق روشی جدید، از نوع دسته فیلترهای ریاضی، با استفاده از ایده پایدارسازی در مسائل معکوس عرضه شده است. از جمله کارهای صورت گرفته در این زمینه می‌توان به سیو و همکاران (۲۰۱۲) و سونسون و وار (۲۰۱۱) اشاره کرد. هدف از این تحقیق استفاده از راهبرد تیخونوف تعییم یافته در زیرفضای سوبولف برای کاهش نوفه است. ابتدا در بخش دوم به منظور یافتن تغییرات چگالی سطحی، معادله انتگرالی نیوتون و بسط مقادیر منفرد برای مسئله تغییرات چگالی سطحی بیان می‌شود. در این بخش ایده پایدارسازی برای به دست آوردن جواب پایدار مطرح می‌شود. در بخش سوم ایده پایدارسازی برای حل مسائل معکوس آورده شده است. در بخش چهارم «آنالیز تابع‌های متعامد تجربی (Empirical Orthogonal Functions Analysis» برای از بین بردن نوارهای شمالی-جنوبی باقی‌مانده بیان شده است. در بخش پنجم کارایی روش عرضه شده با استفاده از نتایج عددی نشان داده شده است. برای این کار در حوزه آبی می‌سی‌سی‌پی و داده‌های چاهه‌ای پیزومتری و مدل هیدرولوژی GLDAS و در حوزه‌های آبی آمازون، آلبانی، سومالی، دانوب و چین شمالی از راه مشاهدات در محل و مدل‌های آب‌هواشناسی استفاده شده است. بخش ششم به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

## ۲ بسط مقادیر منفرد برای مسئله تغییرات چگالی سطحی (انتگرال نیوتون)

ابتدا به بحث در مورد رابطه به دست آمده وار و همکاران (۱۹۹۸) می‌پردازیم. برای پتانسیل نقاط خارج از زمین رابطه (۳) برقرار است:

$$\begin{aligned} \Delta w(\mathbf{r}) &= \\ &\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n \Delta w_{nm}^{GRACE} \bar{e}_{nm}(\theta, \lambda) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\sigma(\theta', \lambda') &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle u_i, \Delta w \rangle_{ex}}{s_i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{M}{4\pi a^2} (2n+1) \{ \Delta w_{nm} \}_{\text{surface mass}} \bar{e}_{nm}(\theta', \lambda') \\ &= \frac{a\rho_{avg}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \{ \Delta w_{nm} \}_{\text{surface mass}} \bar{e}_{nm}(\theta', \lambda')\end{aligned}\quad (10)$$

با جای گذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۱۰)، رابطه اصلی تغیرات چگالی سطحی به صورت رابطه (۱۱) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma(\theta', \lambda') &= \\ &= \frac{a\rho_{avg}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)}{1+k_n} \Delta w_{nm}^{GRACE} \bar{e}_{nm}(\theta', \lambda')\end{aligned}\quad (11)$$

که بهوضوح می‌توان دید کهتابع تغیرات جرم به دست آمده از این روش دقیقاً معادل با فرمول عرضه شده وار و همکاران (۱۹۹۸) بیان شده با رابطه (۱) است.

### ۳ پایدارسازی

محاسبه  $\Delta\sigma$  از تغیرات پتانسیل سطحی  $\{ \Delta w(\mathbf{r}) \}_{\text{surface mass}}$  بیان شده با رابطه (۶) یک مسئله ناپایدار است. اگر تابعک  $\Delta w^{Exact}$  مقدار دقیق تابعک مشاهداتی باشد، در آن صورت مقدار واقعی و دقیق تابعک مجهول  $\Delta\sigma^{Exact}$  به شکل (۱۲) خواهد بود:

$$\Delta\sigma^{Exact} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle u_i, \Delta w^{Exact} \rangle}{s_i} v_i \quad (12)$$

اما در عمل  $\Delta w^{Exact}$  هیچگاه دردست نیست و به جای آن  $\Delta w$  دارای نوونه  $\varepsilon$ ، مشاهده می‌شود؛ بنابراین باید رابطه (۱۲) به شکل رابطه (۱۳) تغییر داده شود:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^{Exact} &= \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle u_i, \Delta w^{Exact} \rangle_{ex}}{s_i} v_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle u_i, \Delta w^{Exact} \rangle_{ex}}{\langle u_i, \Delta w \rangle_{ex}} \cdot \frac{\langle u_i, \Delta w \rangle_{ex}}{s_i} v_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot \frac{\langle u_i, \Delta w \rangle_{ex}}{s_i} v_i\end{aligned}\quad (13)$$

$$k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{Ga^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} =$$

$$\sum_n \sum_m \frac{G}{r(2n+1)} \left( \frac{a}{r} \right)^n \bar{e}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{e}_{nm}(\theta', \lambda') \quad (14)$$

بنابراین، با استفاده از روابط موجود بین اجزای بسط مقادیر منفرد خواهیم داشت (راموسن، ۲۰۰۱):

$$\begin{cases} s_i = \frac{4\pi Ga^2}{r(2n+1)} \left( \frac{a}{r} \right)^n \\ u_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \bar{e}_{nm}(\theta, \lambda) \\ v_i(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \bar{e}_{nm}(\theta', \lambda') \end{cases} \quad (15)$$

کمیت‌های  $\{ s_i^2 \}_{i \in \mathbb{N}}$  مقادیر ویژه غیرصفر عملگر خودالحاق  $K^*K$  (همچنین  $KK^*$ ) و به صورت غیرصعودی  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_i \geq \dots > 0$  هستند. بردارهای  $\{ v_i \}_{i \in \mathbb{N}}$  مجموعه تابعک‌های ویژه دستگاه متعامد یکه  $K^*K$  و بردارهای  $\{ u_i \}_{i \in \mathbb{N}}$  مجموعه تابعک‌های تابعک‌های منفرد راست و چپ عملگر خطی  $K$  می‌نامند.

اگر عدد حقیقی مثبتی مانند  $\alpha$  وجود داشته باشد، به طوری که همه مقادیر منفرد در رابطه  $s_i = O(i^{-\alpha})$  صدق کند، به عبارت دیگر به ازای همه مقادیر منفرد  $\{ s_i \}_{i \in \mathbb{N}}$ ، عدد حقیقی مثبتی مانند  $c$  وجود داشته باشد، به طوری که داشته باشیم:  $s_i \leq ci^{-\alpha}$ ، آن‌گاه به عدد  $\alpha$ ، « درجه بدوضوعی » اطلاق می‌شود. اگر در مسئله‌ای  $1 \leq \alpha \leq 1$  باشد، مسئله را بدوضوع خفیف، اگر  $\alpha > 1$  باشد، مسئله را بدوضوع ملایم، و اگر  $1 < \alpha \ll 1$  باشد، مسئله را بدوضوع شدید می‌نامند (هانسن، ۱۹۹۸).

با استفاده از بسط مقادیر منفرد بیان شده در رابطه (۹) تغییر چگالی سطحی  $\Delta\sigma$  به صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شود:

### ۲-۳ راهبرد پایدارسازی بسط مقادیر منفرد میرا (Damped Singular Value Expansion)

روش DSVE روشی است که کمتر شناخته شده و بر پایه بسط مقادیر منفرد استوار است. در این روش به جای استفاده از  $\mathbf{0}$  و  $1$  (مانند TSVE)، ضرایب فیلتر به صورت زیر تعریف می‌شوند (هانسن، ۱۹۹۸):

$$f_{nm}^{DSVE} = \frac{s_n}{s_n + \beta} \quad (16)$$

سرعت کاهش این ضرایب فیلتر از ضرایب فیلتر تیخونوف، که در بخش بعد معرفی خواهد شد، کمتر است و در نتیجه پالایش کمتری خواهیم داشت.

### ۳-۳ راهبرد پایدارسازی تیخونوف استاندارد

یکی از این روش‌ها که تیخونوف-فیلیپس (Tikhonov-Phillips) نام دارد، مبتنی بر برآورده کردن مسئله بهینه‌سازی (۱۷) است (تیخونوف، ۱۹۶۳ و فیلیپس، ۱۹۶۲):

$$\Phi = \left\| K(g_\beta) - f \right\|_Q^2 + \beta^2 \| g_\beta \|^2 \rightarrow \min \quad (17)$$

که در آن،  $g_\beta$  مجھول پایدارشده و  $\beta$  پارامتر پایدارسازی هستند. در مسئله ما رابطه (۱۷) به شکل رابطه (۱۸) زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi = \left\| K(\Delta\sigma_\beta) - \Delta w \right\|_Q^2 + \beta^2 \| \Delta\sigma_\beta \|^2 \rightarrow \min \quad (18)$$

که در آن،  $\Delta\sigma_\beta$  جواب پایدارشده،  $\Delta w$  پارامتر پایدارسازی و  $Q$  اول به صورت  $Q = \frac{1}{\sigma_{nm}^2}$ ، و انتخاب دوم به صورت

است، که در آن  $\sigma_{nm}^2$  وریانس ضرایب هماهنگ کروی است و به همراه خود داده‌ها از سوی مؤسسه‌های پیش‌گفته آماده شده است. و  $0 \leq \beta \leq 1$  پارامتر پایدارسازی (در حکم مجھول اصلی مسئله) هستند. روش‌های گوناگونی برای

که در آن،  $f_i$ ‌ها ضرایب فیلتر هستند و با مشخصات روابط (۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{\langle u_i, \Delta w^{Exact} \rangle_{ex}}{\langle u_i, \Delta w \rangle_{ex}} \\ \lim_{\|v\| \rightarrow 0} f_i &= 1 \\ \lim_{i \rightarrow \infty} f_i &= 0 \\ \lim_{i \rightarrow \infty} f_i \cdot \frac{\langle u_i, \Delta w \rangle_{ex}}{s_i} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

اما ضرایب فیلتر مجھول‌اند و با استفاده از یک راهبرد پایدارسازی تعیین می‌شوند.

### ۱-۳ راهبرد پایدارسازی بسط مقادیر منفرد منقطع

#### (Truncated Singular Value Expansion)

یکی از خصوصیات بارز مسائل بذوق این است که تعدادی از مقادیر منفرد عملگر بسیار کوچک هستند. این موضوع سبب افزایش تأثیر خطای موجود در ضرایب فوریه مشاهدات ( $\langle u_i, g \rangle_Y$ ) در برآورد ضرایب فوریه مجھولات ( $\frac{\langle u_i, g \rangle_Y}{s_i}$ ) گردد. برای رفع این مشکل

روش‌های پایدارسازی مطرح می‌شوند که در آنها عملگری مانند  $K_{\beta \geq 0}$  جایگزین عملگر اصلی  $K$  خواهد شد. در این عملگر سعی می‌شود که تا حد امکان از تأثیر مقادیر منفرد کوچک کاسته شود. در روش موسم به روش پایدارسازی «بسط مقادیر منفرد منقطع» (TSVE) صفر جایگزین مقادیر منفرد کوچک  $\{s_\beta, s_{\beta+1}, \dots, s_{n_{max}}\}$  می‌شود. این روش همه خصوصیات یک راهبرد پایدارسازی در بخش قبل را دارد. ضرایب فیلتر نیز در این روش به صورت (۱۵) خواهند بود (الله توکلی، ۱۳۸۵):

$$f_{nm}^{TSVE} = \begin{cases} 1 & n < \beta \\ 0 & n \geq \beta \end{cases} \quad (15)$$

$\beta$  شماره نظیر به مقدار منفردی است که از آن به بعد ضرایب فیلتر برابر صفر خواهد شد.

$$\text{و } s_i \text{ ها همان مقادیر منفرد عملگر است.}$$

$$Q = \frac{1}{\sigma_{nm}^2}$$

#### ۴-۳ راهبرد پایدارسازی تیخونوف تعیین یافته در زیرفضای سوبولف

در بسیاری از مسائل کاربردی انتخاب نرم فضای هیلبرت انتخاب بهینه نیست، لذا در ادامه به معروفی روش تیخونوف تعیین یافته در زیرفضای سوبولف می‌پردازیم (الله توکلی، ۱۳۸۵).

در روش‌های پایدارسازی برای کنترل بیشتر تابع، مثلاً برای کنترل رفتار مشتق آن، از نرم یا نیم‌نرم زیرفضای سوبولف نیز می‌توان استفاده کرد. برای مثال در این مسئله از شکل تغییرات جرم سطحی فیلترنشده (شکل ۱) بهوضوح می‌توان دریافت که تابع تغییرات چگالی در راستای طول جغرافیایی  $\lambda$  دارای نوسان‌های شدید است (این موضوع حتی پس از پایدارسازی تیخونوف استاندارد نیز مشخص است)، از این‌رو ایده جالب کنترل مشتق تابع نسبت به طول جغرافیایی  $\lambda$  از طریق پایدارسازی با نرم سوبولف به ذهن خطور می‌کند. در این صورت تابع هدف با انتخاب  $\Omega = \| \cdot \|_S^2$  به شکل رابطه (۲۲) خواهد‌آمد:

$$\Phi^{Sobolev} =$$

$$\| K(\Delta\sigma_\beta) - \Delta w \|^2 + \beta^2 \|\Delta\sigma_\beta\|_S^2$$

$$= \| K(\Delta\sigma_\beta) - \Delta w \|^2 + \beta^2 \left\| \Delta\sigma_\beta \right\|_2^2 + \left\| \frac{\partial \Delta\sigma_\beta}{\partial \lambda} \right\|_2^2$$

$$\rightarrow \min$$
(۲۲)

که در آن،  $\| \cdot \|_S^2$  نشان‌دهنده نرم زیرفضای سوبولف است. این نرم از تعریف ضرب داخلی دو تابع در این فضا ناشی می‌شود که به صورت رابطه (۲۳) تعریف می‌شود:

$$\langle f, g \rangle_S = \int \left\{ \sum_{k=0}^q P_k^2(x) \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^k g}{dx^k} \right\} dx$$
(۲۳)

که در آن،  $\{P_k(x)\}_{k=1,2,\dots,q}$  تابع‌های حقیقی و معلوم

به دست آوردن  $\beta$  وجود دارد که در این تحقیق از روش موسوم به منحنی  $L$ -curve استفاده شده است. مبانی این روش برقراری تعادل بین پایداری جواب و خطای به وجود آمده تحت تأثیر پارامتر پایدارسازی است، به این شکل که نرم جواب پایدارشده در مقابل نرم باقی‌مانده رسم می‌شود و نقطه‌ای که دارای بیشترین انحنا است، یعنی جایی که توازن بین کمینه کردن این دو به وجود آمده، در حکم نقطه بهینه در نظر گرفته می‌شود و آن  $\beta$  در حکم پارامتر بهینه انتخاب می‌شود (هانسن، ۱۹۹۸).

اما در این مسئله تابع‌های هدف برای دو انتخاب درنهایت به شکل رابطه (۱۹) و (۲۰) در خواهد‌آمد:

$$\Phi^{Tikh} =$$

$$4\pi \left( \frac{GM}{R} \right)^2 \sum_n \sum_m \left( \frac{a}{R} \right)^{2n} \frac{\left( f_{nm}^{Tikh} - 1 \right)^2}{\left( 1 + k_n \right)^2} \Delta w_{nm}^2$$

$$+ 4\pi \beta^2 \left( \frac{a\rho_{avg}}{3} \right)^2 \sum_n \sum_m \frac{\left( 2n + 1 \right)^2}{\left( 1 + k_n \right)^2} f_{nm}^{Tikh2} \Delta w_{nm}^2$$
(۱۹)

$$\Phi^{W-Tikh} =$$

$$4\pi \left( \frac{GM}{R} \right)^2 \sum_n \sum_m \left( \frac{a}{R} \right)^{2n} \frac{\left( f_{nm}^{W-Tikh} - 1 \right)^2}{\left( 1 + k_n \right)^2} \frac{1}{\sigma_{nm}^2} \Delta w_{nm}^2$$

$$+ 4\pi \beta^2 \left( \frac{a\rho_{avg}}{3} \right)^2 \sum_n \sum_m \frac{\left( 2n + 1 \right)^2}{\left( 1 + k_n \right)^2} f_{nm}^{W-Tikh2} \Delta w_{nm}^2$$
(۲۰)

حال برای به دست آوردن ضرایب فیلتر بهینه، از روابط (۱۹) و (۲۰) نسبت به آنها مشتق‌گیری می‌کنیم و پس از ساده کردن به روابط (۲۱) برای ضرایب فیلتر می‌رسیم:

$$f_{nm}^{Tikh} = \frac{s_{nm}^2}{s_{nm}^2 + \beta^2}$$

$$f_{nm}^{W-Tikh} = \frac{s_{nm}^2}{s_{nm}^2 + \beta^2 \sigma_{nm}^2}$$
(۲۱)

که در آن،  $f_{nm}^{Tikh}$  ضرایب فیلتر برای حالت وزن واحد  $f_{nm}^{W-Tikh}$  ضرایب فیلتر برای حالت وزن دار،  $(Q = 1)$

#### ۱-۴ تجزیه مقادیر منفرد (Singular Value Decomposition)

یکی از روش‌های تجزیه ماتریس‌ها و قطری سازی آنها روش تجزیه مقادیر منفرد است، که در واقع روش تعمیم‌یافته تجزیه مقادیر ویژه (مخصوص ماتریس‌ها) برای ماتریس‌های مستطیلی است. در این روش ماتریسی مانند  $D_{n \times p}$  را به شکل رابطه (۲۶) تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} D &= E \Gamma H^T \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \gamma_i h_i^T \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن،  $E$  ماتریس بردارهای ویژه ماتریس مربعی  $DD^T$  و  $H$  ماتریس بردارهای ویژه ماتریس مربعی  $D^T D$  و  $\Gamma$  ماتریسی قطری است که مقادیر روی قطر اصلی آن مقادیر منفرد ماتریس  $D$ ، و برابر با جزر مقادیر ویژه ماتریس‌های  $DD^T$  و  $D^T D$  هستند. روابط (۲۷) بین اجزای این روش تجزیه برقرار است:

$$\begin{cases} E^T E = I_{n \times n} \\ H^T H = I_{p \times p} \\ \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_n \geq 0 \end{cases} \quad (27)$$

همچنین به هریک از دسته‌های  $(e_i, h_i, \gamma_i)$  یک مُد گفته می‌شود.

۲-۴ ماتریس داده و آنالیز تابع‌های متعامد تجربی در این روش ماتریس داده به شکلی است که هر ستون آن شامل سری زمانی مقدار تابع تغییر جرم سطحی در یک نقطه از شبکه نقاط منتخب ما روی زمین، و هر سطر ماتریس شامل مقدار این تابع در شبکه نقاط در یک زمان خاص است:

$$D = \begin{pmatrix} d_1(t_1) & \dots & d_p(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1(t_n) & \dots & d_p(t_n) \end{pmatrix}_{n \times p} \quad (28)$$

نکته‌ای که باید در این روش به آن توجه داشت این

هستند و در مسائل پایدارسازی در حکم تابع وزن از آنها استفاده می‌شود و با توجه به ماهیت و شرایط موجود در آنها قابل تعریف‌اند.

اما در این مسئله تابع هدف در نهایت به شکل رابطه (۲۴) در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \Phi^{Sobolev} &= \\ &4\pi \left( \frac{GM}{R} \right)^2 \sum_n \sum_m \left( \frac{a}{R} \right)^{2n} \frac{\left( f_{nm}^{Sobolev} - 1 \right)^2}{(1+k_n)^2} \Delta w_{nm}^2 \\ &+ 4\pi \beta^2 \left( \frac{a\rho_{avg}}{3} \right)^2 \sum_n \sum_m \frac{(2n+1)^2}{(1+k_n)^2} f_{nm}^{Sobolev 2} \Delta w_{nm}^2 \\ &+ 4\pi \beta^2 \left( \frac{a\rho_{avg}}{3} \right)^2 \sum_n \sum_m \frac{(2n+1)^2}{(1+k_n)^2} m^2 f_{nm}^{Sobolev 2} \Delta w_{nm}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

حال برای به دست آوردن  $f_{nm}$  بهینه از این رابطه نسبت به آن مشتق‌گیری می‌کنیم و پس از مرتب کردن به رابطه (۲۵) برای ضرایب فیلتر می‌رسیم:

$$f_{nm}^{Sobolev} = \frac{s_{nm}^2}{s_{nm}^2 + \beta^2 (1+m^2)} \quad (25)$$

که در آن،  $s_i$  همان مقادیر منفرد عملگر است.

#### ۴ آنالیز تابع‌های متعامد تجربی

ایدهٔ آنالیز تابع‌های متعامد تجربی برای کاهش ابعاد بزرگ مجموعه داده‌ها، با نگهداشت وریانس (توان) سیگنال، را جولیف (۲۰۰۲) مطرح کرد (بنتل، ۲۰۱۰). این کار از راه یک تبدیل مختصات خطی به یک مجموعه از بردارهای پایهٔ جدید صورت می‌گیرد. اولین ویژگی این پایهٔ جدید این است که جهت آنها در جهت وریانس‌های اصلی داده‌ها است، ثانیاً در دستگاه جدید بردارهای پایه به صورت ناهمبسته انتخاب می‌شوند.

ابتدا به معرفی ابزار ریاضی بسیار کارآمد تجزیه مقادیر منفرد می‌پردازیم. این ابزار در واقع تعمیمی از بسط مقادیر منفرد در حالت گسسته و برای ماتریس‌ها است و کاربردهای فراوانی مانند تشخیص بدوضوعی عملگرهای ماتریسی، قطری‌سازی و یا ناهمبسته‌سازی داده‌های ماتریسی دارد.

(Decomposition) می‌نامند، صورت می‌گیرد و ماتریس داده فیلترشده با استفاده از رابطه (۲۹) بازسازی می‌شود (بنتل، ۲۰۱۰):

$$D^f = \sum_{i=1}^{n'} e_i \gamma_i h_i^T \quad (29)$$

که در آن  $D^f$  ماتریس داده فیلترشده و  $n'$  همان  $i$  منتخب در بالا است.

همچنین برای تعیین میزان شرکت هر مُد در کل سیگنال از رابطه (۳۰) می‌توان استفاده کرد (شrama و همکاران، ۲۰۰۷):

$$\frac{\gamma_i^2}{\sum_{j=1}^n \gamma_j^2} \times 100 \quad (30)$$

اصلی‌ترین قابلیت این روش در این است که هریک از مُدها نمایانگر یکی از منابع مؤثر در تغییر جرم سطحی هستند.

## ۵ نتایج عددی

در این بخش برای حذف نوافه و بازیابی سیگنال بر مبنای پایدارسازی تیخونوف از ۴۸ ماه داده ماهیانه GRACE Level-2 بین ژانویه ۲۰۰۵ تا دسامبر ۲۰۰۸ استفاده شده است. برای این کار روش‌های (۱) بسط مقادیر منفرد منقطع یا Truncated SVE (۲) بسط مقادیر منفرد میرا یا Damped SVE (۳) تیخونوف با وزن واحد (۴) تیخونوف با وزن ( $Q = \frac{1}{\sigma_{nm}^2}$ ) (۵) تیخونوف با وزن واحد همراه با آنالیز متعامد تجربی (۶) تیخونوف با وزن ( $Q = \frac{1}{\sigma_{nm}^2}$ ) همراه با آنالیز متعامد تجربی و (۷) تیخونوف تعییم یافته در زیرفضای سوبولف برای پالایش داده‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این تحقیق برای ارزیابی روش طرح شده در این تحقیق براساس پایدارسازی، روش‌های موجود دیگر برای حذف نوافه و پالایش داده‌ها نظیر روش‌های (۱) میانگین‌گیری گاوی با شعاع ۷۵۰ کیلومتر

است که مقادیر ماتریس باید تفاضلی از یک مقدار میانگین باشند، یا به عبارت دیگر دارای میانگین صفر باشند. از آنجاکه در این تحقیق با تغییرات جرم سطحی کار می‌کنیم، به طور خودکار این شرط برقرار خواهد بود. اما از این شرط به سادگی می‌توان به این نتیجه رسید که ماتریس  $D^T D$  نمایانگر ماتریس وریانس-کووریانس-مکانی و ماتریس  $DD^T$  نمایانگر ماتریس وریانس-کووریانس زمانی است. حال با آگاهی از این مطلب، موضوعی که در مقدمه این بخش راجع به دوران دستگاه مختصات در جهت وریانس‌های داده‌ها مطرح شد به سادگی قابل فهم است. لذا اگر تجزیه مقادیر منفرد ماتریس  $D$  را به شکل رابطه (۲۱) در نظر بگیریم، در آن صورت  $H$  شامل بردارهای ویژه ماتریس وریانس-کووریانس مکانی است که نقش دستگاه مختصات جدید را ایفا می‌کند و به  $h_i$  ها تابع‌های متعامد تجربی گویند. همین‌طور  $E$  شامل بردارهای ویژه ماتریس وریانس--کووریانس زمانی است که نقش مختصات در دستگاه جدید را ایفا می‌کند که به آنها  $e$  « اجزای اصلی جدید » (Principle Components) گویند. و درنهایت عناصر روی قطر  $\Gamma$  جذر وریانس داده‌ها هستند (شrama و همکاران، ۲۰۰۷ و بنتل، ۲۰۱۰).

اما مسئله‌ای که مطرح است این است که همه مُدهای ماتریس داده شامل سیگنال نیستند، و از یک مُدی به بعد همگی رفتاری نوافای دارند. روش‌های متفاوتی برای یافتن این نقطه وجود دارد که توسط بنتل (۲۰۱۰) به طور مفصل معرفی شده‌اند. در این تحقیق از روش نموداری این کار استفاده شده است. در این روش نای انتخاب می‌شود که نمودار از آن به بعد دارای شبیه یکنواختی است و تغییر شدیدی در مقادیر منفرد به وجود نمی‌آید. در این حالت فرایند پالایش به سادگی از راه حذف مُدهای شامل نوافه که در جبر ماتریس‌ها آن را « تجزیه مقادیر منفرد منقطع (Truncated Singular Value )

$$i^\alpha s_i \leq c \Rightarrow s_i \leq ci^{-\alpha} \Rightarrow s_i = O(i^{-\alpha}) \quad (33)$$

و این بدان معنی است که مسئله شدیداً بدوضع است و حتی اگر در شرایطی  $a=r$  باشد، در آن صورت هم مسئله بدوضع خفیف با  $\frac{1}{2} = \alpha$  خواهد بود.

## ۲-۵ وجود جواب

برای بررسی وجود جواب از شرط پیکار (Picard) فشرده استفاده می‌شود (هانسن، ۱۹۹۸). شرط پیکار فشرده در مسئله مورد نظر به شکل رابطه (۳۴) خواهد بود:

$$\left| \frac{\langle u_i, \Delta w \rangle}{s_i} \right| = \frac{M(2n+1)}{\sqrt{4\pi}a^2(1+k_n)} \Delta w_{nm}^{GRACE} \quad (34)$$

بر مبنای شرط پیکار فشرده مقدار عبارت در رابطه در بی‌نهایت باید به سمت صفر میل کند، یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{(1+k_n)} \Delta w_{nm}^{GRACE} = 0 \quad (35)$$

شکل ۴ نشان‌دهنده ضرایب پیکار، ضرایب فوریه و مقادیر منفرد برای این مسئله است.

همان‌طور که در شکل ۴ دیده می‌شود، بدوضعی و ناپایداری مسئله معکوس به‌وضوح قابل مشاهده است و شرط پیکار برآورده نشده، که دلیل آن وجود خطأ در ضرایب هماهنگ است، و باعث شده ضرایب فوریه  $\langle u_i, \Delta w \rangle_{ex}$  کنتر از مقادیر منفرد به سمت صفر میل کنند.

## ۳-۵ یکتایی جواب

همچنین می‌دانیم که دلیل یکتا نبودن جواب مسئله معکوس سه‌بعدی چگالی برای داخل زمین، وابستگی تابع چگالی  $\rho$  به  $r'$  است. اما در مورد چگالی سطحی این گونه نیست. به علاوه تابع‌های لژاندر دو بعدی یک پایه کامل برای فضای تابع‌های دو بعدی تشکیل می‌دهند، به همین دلیل جواب حاصل برای تابع چگالی سطحی، یکتا

(۲) میانگین گیری گاؤسی ناهمسانگرد (هان) (۳) وینر (۴) میانگین گیری گاؤسی با شعاع ۴۰۰ کیلومتر همراه با آنالیز متعامد تجربی در نظر گرفته شده است. در این تحقیق تغییرات ضرایب لژاندر به صورت اختلاف آنها از میانگین ۴۸ ماه در نظر گرفته شده‌اند. بدلیل هندسه مداری و فاصله کم بین ماهواره‌ها (تفصیلاً ۲۰۰ کیلومتر)، ضریب  $C_{20}$  تعیین شده با ماهواره‌های GRACE دقت زیادی ندارد. نشان داده شده است که تغییرات زمانی ضریب  $C_{20}$  ( $\Delta C_{20}$ ) تعیین شده از داده‌های SLR (Satellite Laser Ranging) دارای دقت بهتری هستند (چن و همکاران، ۲۰۰۵). بنابراین در این تحقیق از تغییرات زمانی ضریب  $C_{20}$  حاصل از داده‌های SLR استفاده شده است.

ابتدا به بررسی روش پیشنهادی براساس پایدارسازی می‌پردازیم. مسئله تعیین چگالی سطحی از تغییرات پتانسیل مسئله‌ای معکوس است و نظیر هر مسئله معکوسی ابتدا بدوضعی مسئله، وجود و یکتایی جواب بررسی می‌شود.

## ۱-۵ بررسی بدوضعی مسئله

با در نظر گرفتن تعریف برای درجه بدوضعی مسئله، ابتدا درجه بدوضعی مسئله تغییرات چگالی سطحی تعیین می‌شود. برای مقادیر منفرد داریم:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi G a^2}{r(2n+1)} \left(\frac{a}{r}\right)^n = 0 \quad (31)$$

و همین‌طور از آنجاکه  $\langle \frac{a}{r}, \dots \rangle$  داریم:

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ \lim_{i \rightarrow \infty} i^\alpha s_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n + m + 1)^\alpha \frac{4\pi G a^2}{r(2n+1)} \left(\frac{a}{r}\right)^n = 0 \\ &\text{که در آن، } (n^2 + n + m + 1)^\alpha \text{ شماره ضریب مربوط به} \\ &\text{درجه و مرتبه } m, n \text{ است. بنابراین } \left\{ i^\alpha s_i \right\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ دنباله} \\ &\text{کراندار است و متعاقباً برای هر } \alpha \gg 1 \text{ داریم:} \end{aligned} \quad (32)$$

$\beta^{Tikh} = 3.097 \times 10^{-5}$  در حالت وزن دار برابر با  $\beta^{W-Tikh} = 6.806 \times 10^6$  و در حالت تعیین یافته در زیرفضای سوبولف  $\beta^{Sobolev} = 1.2 \times 10^{-5}$  به دست می آید و پس از تعیین پارامتر پایدارسازی در دو حالت گفته شده، ضرایب فیلتر تعیین می شوند. تغییرات این ضرایب در شکل ۶ برای ۵ حالت پیش گفته رسم شده است.

با استفاده از ضرایب فیلتر محاسبه شده، تغییرات ارتفاع آب معادل (برحسب متر) حاصل از روش های ارتفاع آب معادل (برحسب متر)، تیخونوف با وزن واحد، Damped SVE، TSVE تیخونوف وزن دار و تیخونوف تعیین یافته در زیرفضای سوبولف محاسبه شد. این تغییرات در شکل ۷ نشان داده شده است.

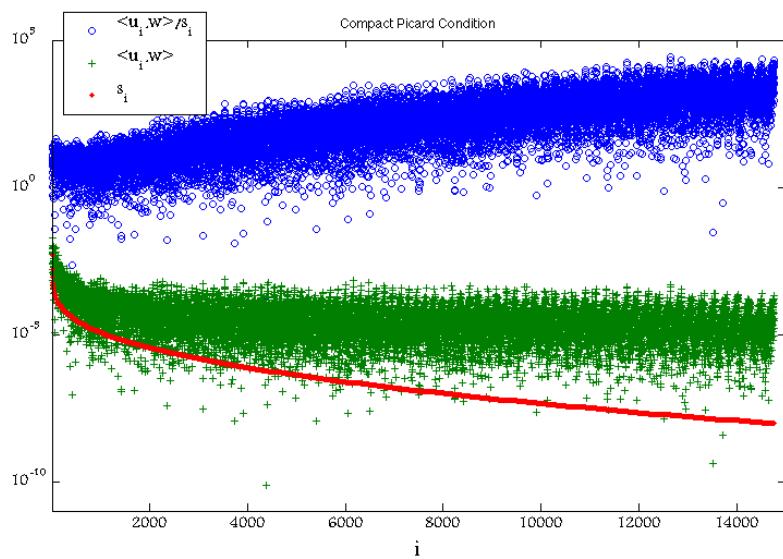
همان طور که در شکل ۲ ملاحظه شد، به علت وجود نویه، ناپایداری مسئله و نوارهای شمالی-جنوی ناشی از همبستگی ضرایب، میزان تغییرات ارتفاع آب معادل،  $(-200m, 200m)$  است. عملکرد روش های پایدارسازی در شکل بالا نشان داده شده است. با مقایسه شکل های ۲ و ۶ میزان تاثیر پایدارسازی مسئله به وضوح نمایان است.

خواهد بود (چانو و گراس، ۲۰۰۴).

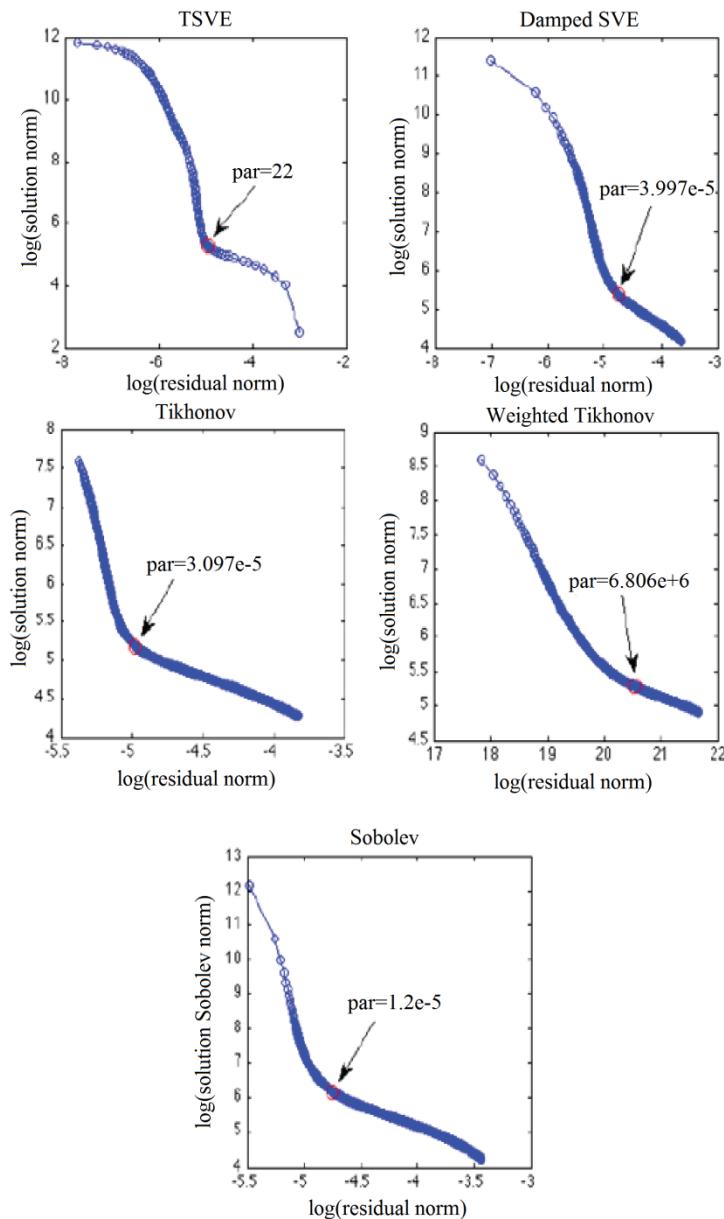
همچنین براساس چانو و گراس (۲۰۰۴) می توان نشان داد که مسئله معکوس تعیین چگالی سطحی از تغییرات پتانسیل دارای جواب یکتا است.

#### ۴-۵ پایدارسازی

برای به دست آوردن جواب از روش های پایدارسازی DSVE، TSVE، تیخونوف استاندارد با وزن واحد ( $Q=1$ )، تیخونوف استاندارد با وزن ( $Q=\frac{1}{\sigma_{nm}^2}$ ) تیخونوف تعیین یافته در زیرفضای سوبولف استفاده می شود. در ابتدا نیاز به تعیین پارامتر پایدارسازی است. در این تحقیق این کار با استفاده از منحنی ایل پارامتر پایدارسازی صورت گرفته است (هانسن، ۱۹۹۸). در شکل ۵ منحنی ایل برای روش های متفاوت پایدارسازی مطرح شده در این تحقیق رسم شده است. این پارامتر، در مدل وار-مولنار (۱۹۹۸)، برای روش بسط مقادیر منفرد (TSVE) برابر با  $\beta^{TSVE} = 22$ ، برای روش بسط مقادیر منفرد (DSVE)  $\beta^{DSVE} = 3.997 \times 10^{-5}$  میرا تیخونوف استاندارد با وزن واحد برابر با



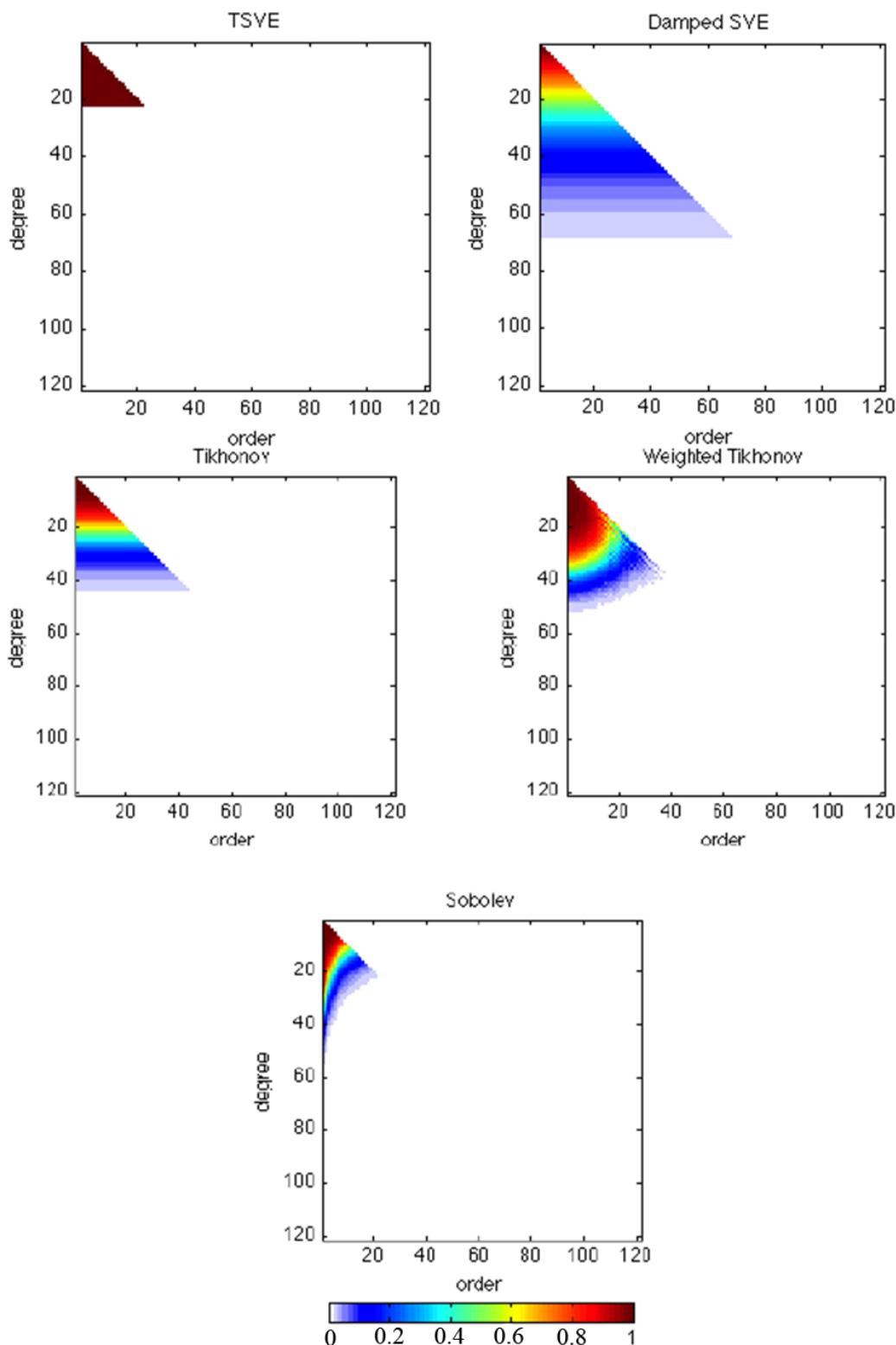
شکل ۴. مقادیر منفرد (نقاط سرخ)، ضرایب فوریه تابعک مشاهداتی (ستاره سبز) و ضرایب پیکار (دایره آبی).



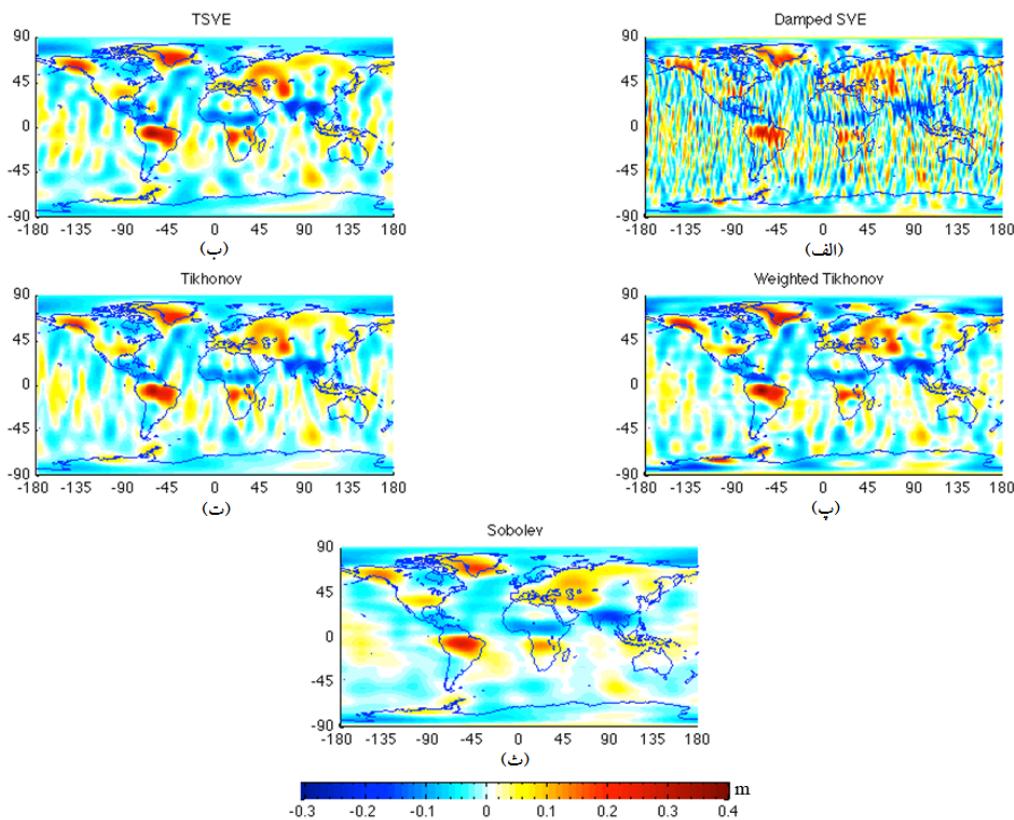
شکل ۵. منحنی ای مربوط به روش پایدارسازی بسط مقادیر منفرد منقطع (بالا-چپ)، بسط مقادیر منفرد میرا (بالا-راست)، تیخونوف با وزن واحد (وسط-چپ)، تیخونوف با وزن ( $Q = \frac{1}{\sigma_{nm}^2}$ ) (وسط-راست) و تعمیم یافته در زیرفضای سوبولف (پایین).

روش‌های تیخونوف با وزن واحد و تیخونوف وزن‌دار کما کان دارای نوارهای شمالی-جنوبی هستند، از این‌رو برای حذف این نوارها از ابزارتابع‌های متعامد تجربی استفاده می‌شود که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت.

همان‌طور که دیده می‌شود عمل پالایش به روش تیخونوف تعمیم یافته در زیرفضای سوبولف به خوبی صورت گرفته است و علاوه بر تعدیل بازه نامعقول پیش‌گفت، نوارهای شمالی-جنوبی نیز به‌طور کامل از بین رفته‌اند. اما مدل‌های فیلتر شده با



شکل ۶. ضرایب فیلتر مربوط به روش پایدارسازی بسط مقادیر منفرد منقطع (بالا-چپ)، بسط مقادیر منفرد میرا (بالا-راست)، تیخونوف با وزن واحد (وسط-چپ)، تیخونوف با وزن ( $Q = \frac{1}{\sigma_{nm}^2}$ ) (وسط-راست) و تعمیم یافته در زیرفضای سوبولف (پایین).



شکل ۷. تغییرات ارتفاع آب معادل (برحسب متر) حاصل از روش‌های TSVE (الف)، تیخونوف وزن‌دار (ب)، تیخونوف با وزن واحد (ت)، و سوبولف (ث).

ماتریس داده، ماتریسی با ابعاد  $64800 \times 48$  است. برای انتخاب مُدهای شامل سیگنان، تغییرات مقادیر منفرد رسم می‌شود و از آنجا مُدهای شامل سیگنان انتخاب می‌شوند. شکل ۸ نشان‌دهنده تغییرات مقادیر منفرد در حالت وزن واحد و وزن‌دار ( $Q = \frac{1}{\sigma_{nm}^2}$ ) است. همان‌طور که در شکل ۷ ملاحظه می‌شود، مُدهای شامل سیگنان، ۳ مُد ابتدایی هستند. جدول ۱ نشان‌دهنده مقادیر منفرد و درصد شرکت آنها در کل سیگنان، برای دو حالت تیخونوف با وزن واحد و وزن‌دار است.

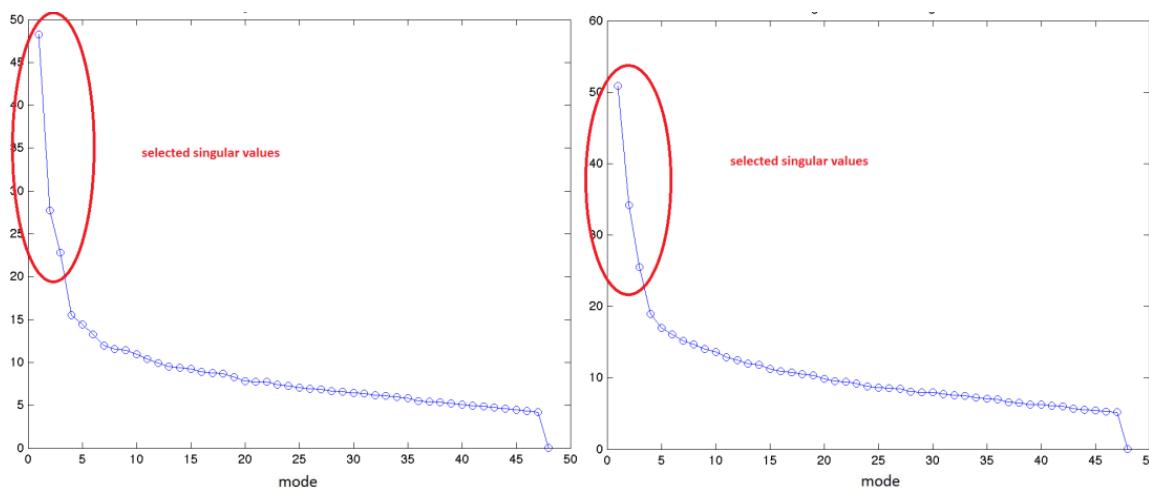
در شکل ۹ میزان تغییرات ارتفاع آب معادل بعد از اعمال روش EOF را بر مدل‌های پایدارشده در بخش قبل نشان می‌دهد. این شکل به خوبی نشان‌دهنده کاهش نوارهای شمالی-جنوبی است.

## ۵-۵ تابع‌های متعامد تجربی و نوارهای شمالی-جنوبی

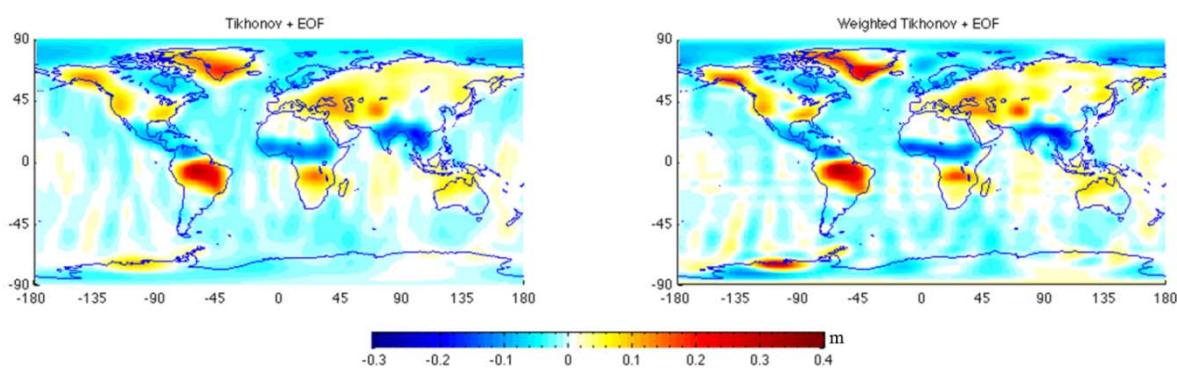
بر اساس آنچه که قبلاً گفته شد، پدیده دیگری که مسئله تعیین میزان تغییرات ارتفاع آب معادل را تحت تأثیر قرار می‌دهد، وجود نوارهای شمالی جنوبی ناشی از همبستگی ضرایب است، که برای حذف و یا کاهش این اثر از تابع‌های متعامد تجربی استفاده می‌شود. همان‌طوری که قبلاً بیان شد، داده‌های ما دارای میانگین صفر هستند. بعد از پالایش به روش پایدارسازی تیخونوف ممکن است انحرافی در میانگین ایجاد شده باشد، از این‌رو دوباره میانگین داده‌ها از آنها کسر می‌شود. برای استفاده از روش از شبکه  $180 \times 360$  نقطه‌ای شامل پیکسل‌های  $1^\circ \times 1^\circ$  استفاده شده است. در این صورت

جدول ۱. مقادیر منفرد و درصد شرکت وریانس مربوط به هر مُد در توان کل سیگنال برای هر مُد.

مُد	مقدار منفرد		درصد شرکت در توان کل سیگنال	
	تیخونوف با وزن واحد	تیخونوف وزن دار	تیخونوف با وزن واحد	تیخونوف وزن دار
۱	48.23814	50.86039	35.3741	29.11467
۲	27.69805	34.18665	11.663	13.154
۳	22.83509	25.51166	7.927	7.325
۴	15.53586	18.9312	3.669	4.033
۵	14.41656	16.98125	3.16	3.245



شکل ۸. مقادیر منفرد ماتریس‌های داده در روش تابع‌های متعامد تجربی، تیخونوف بدون وزن (چپ) و وزن دار (راست).



شکل ۹. تغییرات ارتفاع آب معادل (متر) پس از پایدارسازی و آنالیز EOF، با تیخونوف وزن واحد (چپ) و تیخونوف وزن دار (راست).

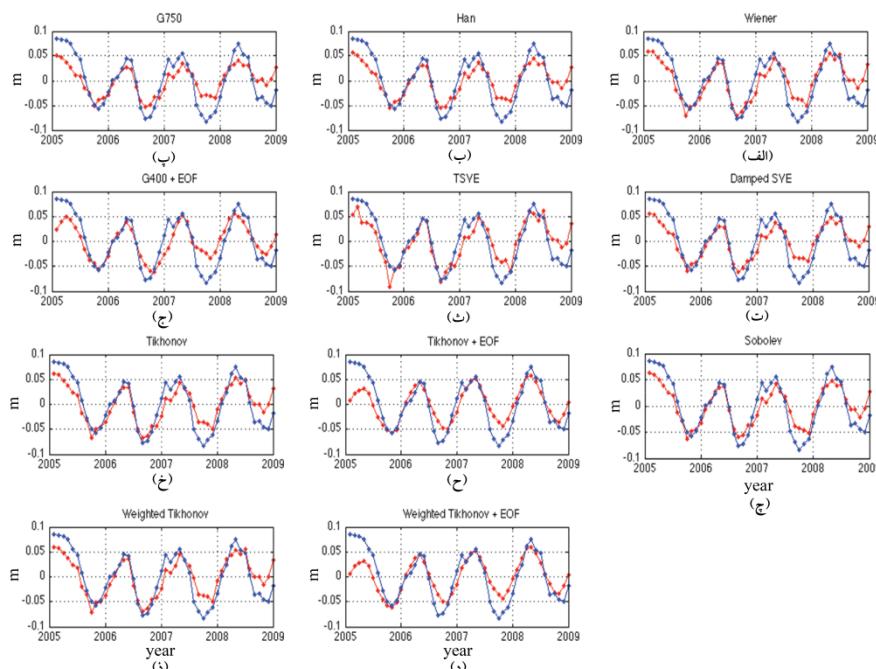
آب‌های زیرزمینی است که از داده‌های چاههای پیزومتری به دست می‌آید،  $\Delta SWE, \Delta SM$  به ترتیب تغییرات رطوبت خاک (Soil Moisture) و آب حاصل از ذوب برف (Snow Water Equivalent) هستند که از مدل هیدرولوژی GLDAS برای محاسبه آنها استفاده شده است.

در شکل ۱۰ سری زمانی تغییرات آب معادل حاصل از داده‌های پتانسیلی GRACE پس از پالایش داده‌ها به روش‌های پیش‌گفته و سری زمانی حاصل از مدل هیدرولوژی GLDAS و داده‌های چاههای پیزومتری برای حوزه آبی می‌سی‌بی نشان داده شده است. در جدول ۲ نیز خصوصیات آماری اختلاف دو سری زمانی بر حسب RMS، میانگین قدر مطلق اختلاف مقادیر حاصل از دو سری زمانی و همبستگی بین دو سری زمانی بر اساس فیلترهای گوناگون، عرضه شده است.

برای ارزیابی روش عرضه شده، این روش با روش‌های (۱) میانگین گیری گاووسی با شعاع ۷۵۰ کیلومتر (۲) میانگین گیری گاووسی ناهمسانگرد (هان) (۳) وینر (۴) میانگین گیری گاووسی با شعاع ۴۰۰ کیلومتر همراه با آنالیز متعمد تجربی مورد مقایسه قرار می‌گیرد. برای مقایسه این روش‌ها از دو منبع داده ارزیابی استفاده شده است. در حالت اول خود تابع تغییرات جرم سطحی بر حسب ارتفاع آب معادل مورد ارزیابی قرار گرفته است. این کار برای حوزه آبی می‌سی‌بی صورت گرفت. برای می‌سی‌بی از روش روکش و همکاران (۲۰۰۴) در منطقه‌بندی و انتخاب چاه مناسب استفاده شده است و اساس آن بر پایه رابطه (۳۶) است:

$$\Delta TWS = \Delta GW + (\Delta SM + \Delta SWE) \quad (36)$$

که در آن،  $\Delta TWS$  نمایانگر تغییرات ذخیره آب زمینی است و از راه داده‌های (Terrestrial Water Storage) پتانسیلی GRACE محاسبه می‌شود،  $\Delta GW$  تغییرات



شکل ۱۰. سری زمانی تغییرات ارتفاع آب معادل حاصل از داده‌های پتانسیلی GRACE پس از اعمال روش‌های متفاوت پالایش (دایره‌های سرخ) و مدل هیدرولوژی GLDAS و داده‌های چاههای پیزومتری (دایره‌های آبی)، برای حوزه آبی می‌سی‌بی.

جدول ۲. مقایسه RMS میانگین قدر مطلق اختلاف مقادیر حاصل از دو سری زمانی و همبستگی بین دو سری زمانی برای روش‌های متفاوت پالایش.

روش پالایش	RMS (mm)	mean ( Δ ) (mm)	correlation (%)
گاوی ۷۵۰ کیلومتر	28.321	24.188	87.717
گاوی غیرهمسانگرد (هان)	25.375	21.716	90.49
وینر	24.611	20.476	87.746
گاوی ۴۰۰ کیلومتر + EOF	27.80	22.10	85.11
TSVE	25.584	20.965	85.851
DSVE	26.421	22.441	87.859
تیخونوف با وزن واحد	24.31	20.287	88.565
EOF + تیخونوف با وزن واحد	27.761	20.901	84.905
تیخونوف وزندار	24.506	20.444	87.909
تیخونوف وزندار + EOF	27.975	21.29	84.082
سوبولف	21.934	18.592	92.217

که در آن،  $\frac{\partial M}{\partial t}$  مشتق تابع تغییر جرم نسبت به زمان (در اینجا  $M = EWH$ )،  $\nabla \cdot Q$  – تعادل خالص شار رطوبت و با نام انگرال قائم واگرایی شار رطوبت در ستون جواست Vertically Integrated VIMFD که به اختصار VIMFD نامیده می‌شود. مقدار این کمیت تقریباً برابر است با  $P - ET_a$  (  $P$  : بارندگی و  $ET_a$  : تبخیر). این کمیت به طور مستقیم با عبارت‌های قائم تعادل آب‌های زمینی در ارتباط است و رابطه بالا از VIMFD نمایانگر بودجه جوی-زمینی آب است. کمیت VIMFD از راه داده‌های مشاهداتی ابزاری مانند رادیوسوند و یا مدل‌های آب-هواشناسی (مانند ERA-INTERIM به دست می‌آید و درنهایت  $R$  نمایانگر میزان تخلیه است

نتایج عرضه شده در جدول ۲ بیانگر کارایی روش پایدارسازی تیخونوف تعیین‌یافته در زیرفضای سوبولف نسبت به سایر روش‌های استفاده شده برای پالایش است. در شکل ۱۱ سری زمانی تغییرات آب معادل حاصل از داده‌های پتانسیلی GRACE پس از پالایش داده‌ها به روش‌های نشان داده شده است.

در حالت دوم، ارزیابی از راه داده‌های زمینی واقعی برای تغییرات جرم نسبت به زمان، یا همان مشتق زمانی تابع تغییر جرم، صورت گرفته است. این کار برای حوزه آبی آمازون به انجام رسیده است. رابطه (۳۷) اساس این حالت را نشان می‌دهد (طوریان و همکاران، ۲۰۱۰):

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\nabla \cdot Q - R \quad (37)$$

آمازون، آلبانی، سومالی، دانوب و چین شمالی صورت گرفته است. در شکل ۱۳، مشتق تغییر آب معادل نیز براساس فیلترهای متفاوت آمده است.

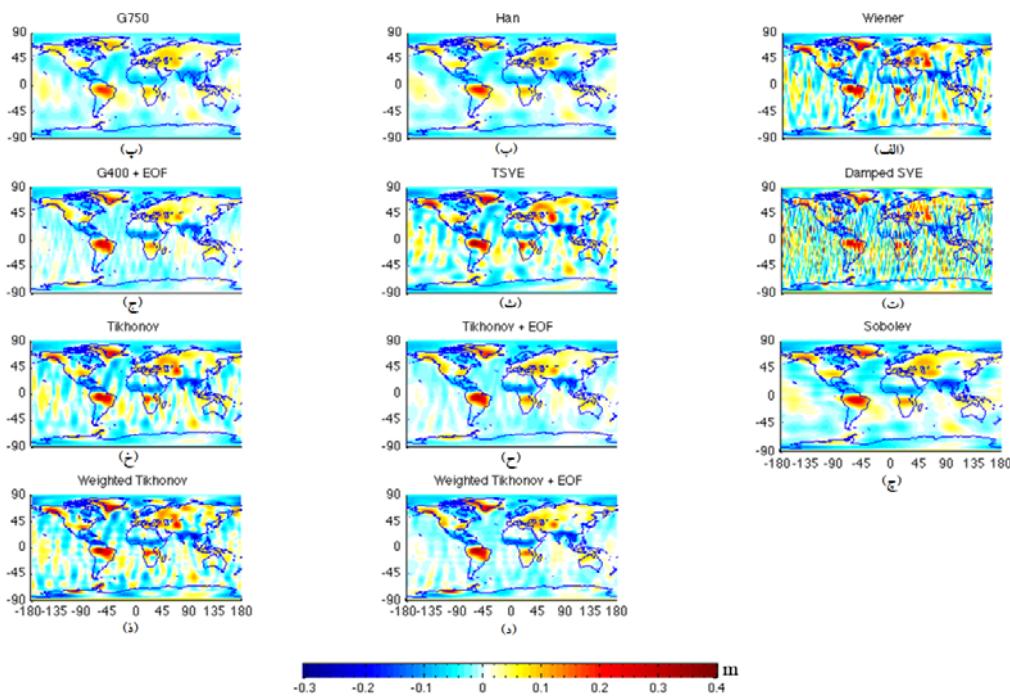
همان‌طور که در جدول‌های ۲ تا ۵ ملاحظه می‌شود روش معرفی شده در این مقاله یعنی روش تیخونوف تعمیم یافته در زیرفضای سوبولف در میان روش‌های مطرح شده دیگر، دارای کمترین میانگین اختلاف و کمترین وریانس است و علاوه بر این همبستگی بسیار خوبی نیز بین دو سری زمانی براساس این روش‌ها وجود دارد. این مجدداً بیانگر کارایی روش عرضه شده نسبت به سایر روش‌های پالایش است.

که از راه مشاهدات در محل و مورد استفاده قرار گرفته است (طوريان و همکاران، ۲۰۱۰).

در شکل ۱۰ سری زمانی سرعت تغییرات جرم برحسب ارتفاع آب معادل حاصل از داده‌های پتانسیلی GRACE پس از پالایش داده‌ها به روش‌های پیش‌گفته و سری زمانی حاصل از VIMFD به همراه تخلیه برای حوزه آبی آمازون نشان داده شده است. در جدول‌های ۲ تا ۵ نیز خصوصیات آماری اختلاف دو سری زمانی برحسب RMS، میانگین قدر مطلق اختلاف مقادیر حاصل از دو سری زمانی و همبستگی بین دو سری زمانی براساس فیلترهای متفاوت آمده است. این کار برای ۵ حوزه آبی

جدول ۳. مقایسه میانگین قدر مطلق اختلاف مقادیر بین سری‌های زمانی مربوط به ۵ حوزه آبی حاصل از روش‌های پالایش (میلی‌متر بر ماه).

روش پالایش	آمازون	آلبانی	سومالی	دانوب	چین شمالی
گاوی ۷۵۰ کیلومتر	22.712	33.104	37.654	16.196	8.0333
گاوی نامهسانگرد (هان)	21.074	33.021	36.269	15.593	7.2443
وینر	20.077	33.456	39.829	18.459	13.91
گاوی ۴۰۰ کیلومتر +	24.057	33.503	40.169	18.923	6.5124
TSVE	20.168	33.274	38.277	18.089	13.104
DSVE	20.751	33.337	39.525	16.884	10.286
تیخونوف با وزن واحد	19.33	33.252	38.321	17.018	11.249
EOF + تیخونوف با وزن واحد	22.621	33.438	39.289	18.179	6.7275
تیخونوف وزن دار	19.735	33.456	37.962	18.288	12.52
EOF + تیخونوف وزن دار	24.397	33.521	40.79	19.219	6.6678
سوبولف	19.496	32.961	34.902	15.69	7.3774

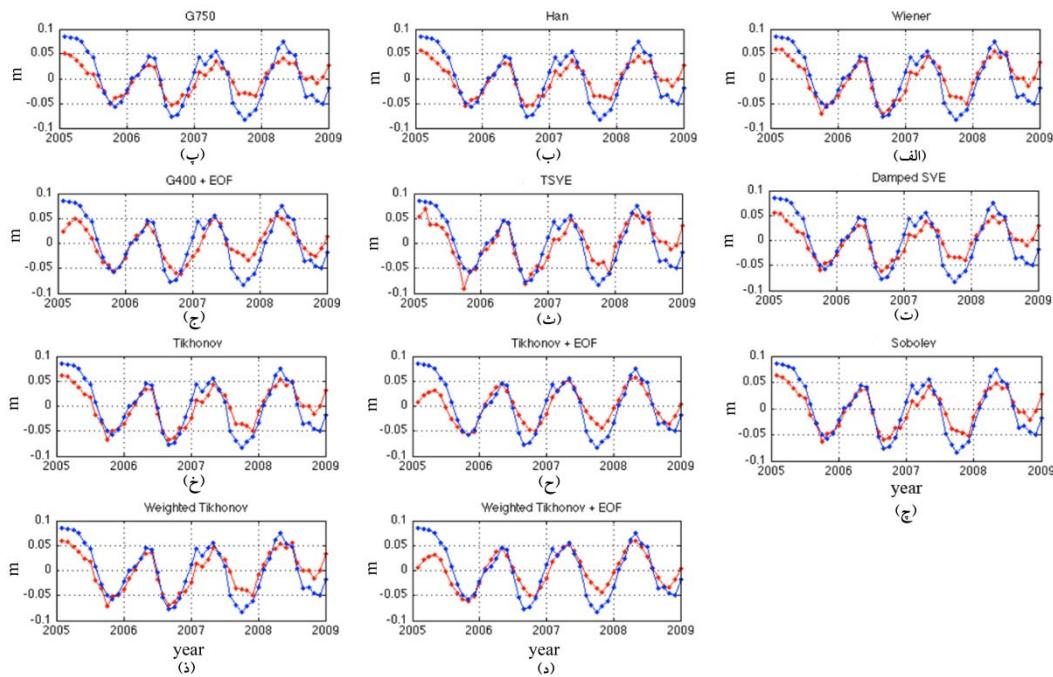


شکل ۱۱. مدل تغیرات جرم سطحی بر حسب ارتفاع آب معادل (متر) پس از اعمال فیلتر گاووسی وینر (الف)، هان (ب)، ۷۵۰ کیلومتر (پ)، (ت)، گاووسی ۴۰۰ کیلومتر + EOF (ث)، تیخونوف با وزن واحد + EOF (ج)، سوبولف (چ)، تیخونوف با وزن واحد (خ)، تیخونوف وزن دار (د)، تیخونوف وزن دار (ز).

نسبت به فیلتر عرضه شده در این تحقیق مشاهده کرد. برای بررسی تاثیر روش‌های متفاوت بر حفظ سیگنال، نسبت سیگنال به نوشه برای روش‌های گوناگون محاسبه و نتیجه در جدول ۶ برای حوزه می‌سی‌سی‌پی و نسبت سیگنال به نوشه برای روش‌های مختلف در جدول ۷ برای حوزه آمازون عرضه شده است. همان‌طور که در جدول ملاحظه می‌شود، روش پیشنهادی در این مقاله دارای بیشترین نسبت سیگنال به نوشه هستند و این مسئله نشان می‌دهد که میزان حفظ سیگنال در این روش نیز از سایر روش‌ها بیشتر است.

با در نظر گرفتن مطالب بالا در صوص حفظ سیگنال با روش تیخونوف تعیین یافته در زیرفضای سوبولف و ملاحظه جدول‌های ۲ تا ۵ می‌توان این روش را مناسب‌ترین روش برای پالایش داده‌ای ماهیانه GRACE Level-2 عنوان کرد.

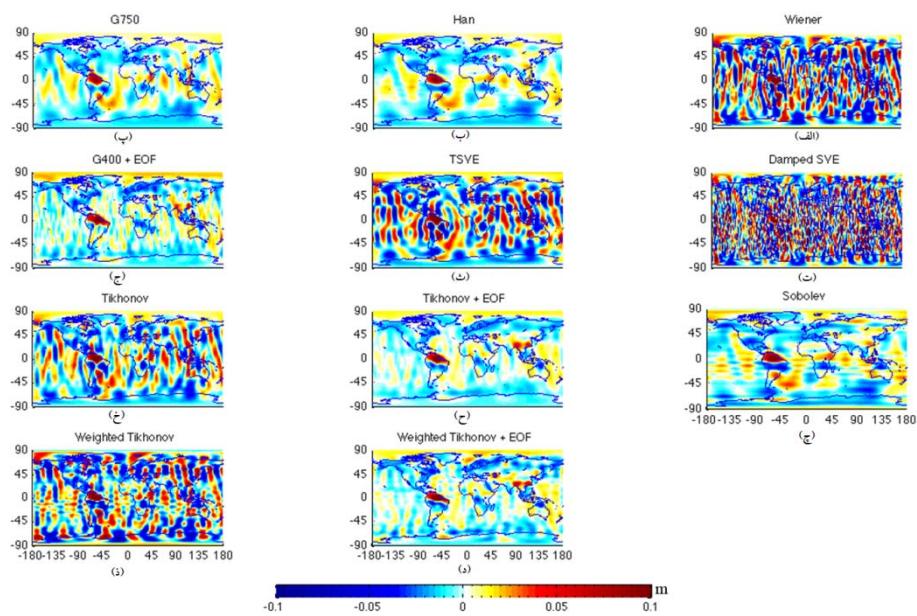
در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ ملاحظه می‌شود که روش میانگین گیری گاووسی با شاعع ۷۵۰ کیلومتر و فیلتر گاووسی غیرهمسانگرد (هان) در مناطقی که دارای سیگنال قوی‌تری هستند، سیگنال واقعی را تضییف می‌کنند. در روش وینر، بهمنزله یکی از روش‌های آماری، نوارهای شمالی-جنوبی بهوضوح مدل را مغلوش کرده‌اند و در واقع عملکرد آن تقریباً شبیه به فیلتر گاووسی با شاعع ۴۴۰ کیلومتر است، با این تفاوت که در خشکی عملکرد بهتری نسبت به آن دارد. روش استفاده از آنالیز تابع‌های متعامد تجربی همراه با فیلتر گاووسی (بتل، ۲۰۱۰) به دو دلیل مطلوب نیست، اول اینکه نیاز به بروز دخالت غیرریاضی و صرفاً شهودی در تعیین پارامتر وجود دارد، دوم اینکه چون از فیلتر گاووسی استفاده شده است، مقداری از سیگنال واقعی از بین رفته و در شکل ۱۲ و ۱۳ بهوضوح می‌توان ضعیف‌تر بودن سیگنال در نقاط با تغیرات زیاد را



شکل ۱۲. سری زمانی سرعت (مشتق) تغییر آب معادل حاصل از داده‌های پتانسیلی GRACE پس از اعمال روش‌های متفاوت پالایش (دایره‌های سرخ) و مدل آب-هواشناسی بهمراه داده‌های اندازه‌گیری شده در محل (ستاره‌های آبی)، برای حوزه آبی آمازون.

جدول ۴. مقایسه RMS مقادیر بین سری‌های زمانی مربوط به ۵ حوزه آبی حاصل از روش‌های پالایش (میلی‌متر بر ماه).

روش پالایش	آمازون	آلانی	سومالی	دانوب	چین شمالی
گاوی ۷۵۰ کیلومتر	<b>26.651</b>	<b>42.766</b>	<b>44.048</b>	<b>21.805</b>	<b>9.7354</b>
گاوی نامحسانگرد (هان)	<b>25.408</b>	<b>42.653</b>	<b>42.731</b>	<b>21.008</b>	<b>8.8343</b>
وینر	<b>26.042</b>	<b>43.268</b>	<b>47.576</b>	<b>22.803</b>	<b>16.357</b>
EOF ۴۰۰ کیلومتر +	<b>29.791</b>	<b>43.253</b>	<b>46.392</b>	<b>23.785</b>	<b>8.4765</b>
TSVE	<b>25.639</b>	<b>43.116</b>	<b>46.35</b>	<b>21.878</b>	<b>15.526</b>
DSVE	<b>25.338</b>	<b>43.093</b>	<b>45.972</b>	<b>22.036</b>	<b>12.274</b>
تیخونوف با وزن واحد	<b>25.088</b>	<b>42.97</b>	<b>45.535</b>	<b>21.539</b>	<b>13.083</b>
EOF + وزن واحد	<b>28.268</b>	<b>43.08</b>	<b>45.699</b>	<b>23.366</b>	<b>8.5963</b>
تیخونوف وزن دار	<b>25.484</b>	<b>43.177</b>	<b>45.566</b>	<b>22.325</b>	<b>14.599</b>
EOF + وزن دار	<b>30.117</b>	<b>43.035</b>	<b>46.781</b>	<b>24.433</b>	<b>8.8435</b>
سوبلوف	<b>24.894</b>	<b>42.57</b>	<b>41.683</b>	<b>20.407</b>	<b>8.9236</b>



شکل ۱۳. منطق مدل تغییرات جرم سطحی بر حسب ارتفاع آب معادل (متر بر ماه) پس از إعمال فیلتر وینر (الف)، هان (ب)، گاوسی ۷۵۰ کیلومتر (پ)، گاوسی ۴۰۰ کیلومتر + EOF (ت)، تیخونوف (ج)، سوبولف (چ)، تیخونوف با وزن واحد + EOF (ح)، تیخونوف با وزن واحد (خ)، تیخونوف وزن دار (د)، تیخونوف وزن دار (ز).

جدول ۵. مقایسه کریشن بین مقادیر سری‌های زمانی مربوط به ۵ حوزه آبی حاصل از روش‌های پالایش (بر حسب درصد).

روش پالایش	آمازون	آلبانی	سومالی	دانوب	چین شمالی
گاوسی ۷۵۰ کیلومتر	<b>94.92</b>	<b>43.987</b>	<b>20.935</b>	<b>76.409</b>	<b>22.924</b>
گاوسی غیرهمسانگرد (هان)	<b>95.031</b>	<b>47.181</b>	<b>45.863</b>	<b>78.633</b>	<b>38.912</b>
وینر	<b>94.751</b>	<b>7.7708</b>	-3.2611	<b>72.208</b>	<b>12.354</b>
گاوسی ۴۰۰ کیلومتر + EOF	<b>91.126</b>	<b>10.379</b>	<b>-40.545</b>	<b>67.3</b>	<b>30.313</b>
TSVE	<b>95.105</b>	<b>15.301</b>	<b>0.039712</b>	<b>75.415</b>	<b>22.73</b>
DSVE	<b>94.905</b>	<b>13.569</b>	<b>0.086193</b>	<b>74.123</b>	<b>16.155</b>
تیخونوف با وزن واحد	<b>95.086</b>	<b>21.739</b>	<b>3.0006</b>	<b>75.834</b>	<b>18.559</b>
تیخونوف با وزن واحد + EOF	<b>92.634</b>	<b>28.459</b>	<b>-20.774</b>	<b>69.38</b>	<b>27.163</b>
تیخونوف وزن دار	<b>95.038</b>	<b>10.308</b>	<b>3.5944</b>	<b>73.609</b>	<b>22.5</b>
EOF + وزن دار	<b>91.572</b>	<b>20.052</b>	<b>-38.112</b>	<b>63.831</b>	<b>30.333</b>
سوبولف	<b>95.095</b>	<b>43.399</b>	<b>53.375</b>	<b>79.753</b>	<b>48.483</b>

جدول ۶. نسبت سیگنال به نویه مقادیر حاصل از دو سری زمانی برای روش‌های متفاوت پالایش مربوط به حوزه آبی می‌سی‌سی‌پی.

روش پالایش	SNR
گاوی ۷۵۰ کیلومتر	<b>4.8893</b>
گاوی ناهمسانگرد (هان)	<b>5.8433</b>
وینر	<b>6.1088</b>
گاوی ۴۰۰ کیلومتر + EOF	<b>5.1238</b>
TSVE	<b>5.7722</b>
DSVE	<b>5.4925</b>
تیخونوف با وزن واحد	<b>6.2158</b>
تیخونوف با وزن واحد + EOF	<b>5.0629</b>
تیخونوف وزن دار	<b>6.146</b>
تیخونوف وزن دار + EOF	<b>4.9961</b>
سویولف	<b>7.1092</b>

جدول ۷. نسبت سیگنال به نویه مقادیر بین سری‌های زمانی مربوط به ۵ حوزه آبی حاصل از روش‌های پالایش.

روش پالایش	آمازون	آلانی	سومالی	دانوب	چین شمالی
گاوی ۷۵۰ کیلومتر	<b>7.222</b>	<b>0.121</b>	<b>0.146</b>	<b>2.981</b>	<b>-1.018</b>
گاوی ناهمسانگرد (هان)	<b>7.637</b>	<b>0.144</b>	<b>0.409</b>	<b>3.305</b>	<b>-0.174</b>
وینر	<b>7.423</b>	<b>0.020</b>	<b>-0.524</b>	<b>2.592</b>	<b>-5.525</b>
گاوی ۴۰۰ کیلومتر + EOF	<b>6.255</b>	<b>0.023</b>	<b>-0.305</b>	<b>2.226</b>	<b>0.185</b>
TSVE	<b>7.558</b>	<b>0.050</b>	<b>-0.297</b>	<b>2.952</b>	<b>-5.072</b>
DSVE	<b>7.661</b>	<b>0.055</b>	<b>-0.226</b>	<b>2.889</b>	<b>-3.031</b>
تیخونوف با وزن واحد	<b>7.747</b>	<b>0.080</b>	<b>-0.143</b>	<b>3.088</b>	<b>-3.585</b>
تیخونوف با وزن واحد + EOF	<b>6.710</b>	<b>0.058</b>	<b>-0.174</b>	<b>2.380</b>	<b>0.063</b>
تیخونوف وزن دار	<b>7.611</b>	<b>0.038</b>	<b>-0.149</b>	<b>2.776</b>	<b>-4.538</b>
تیخونوف وزن دار + EOF	<b>6.160</b>	<b>0.067</b>	<b>-0.377</b>	<b>1.993</b>	<b>-0.184</b>
سویولف	<b>7.815</b>	<b>0.161</b>	<b>0.625</b>	<b>3.556</b>	<b>-0.262</b>

- Bentel, K., 2009, Empirical orthogonal function analysis of GRACE gravity data, University of Stuttgart.
- Chao, B. F. and Gross, R. S., 2004, Changes in the Earth's rotation and low-degree gravitational field induced by earthquakes, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **91**, 569-596,
- Chen, J. L., Rodell, M., Wilson, C. R. and Famiglietti, J. S., 2005, Low degree spherical harmonic influences on gravity recovery and climate experiment (GRACE) water storage estimates, *Geophys. Res. Lett.* **32**:L14405, doi:10.1029/2005GL022964.
- Han, S. C., Shum, C. K., Jekeli, C., Kuo, C.Y., Wilson, C. R. and Seo, K. W., 2005, Non-isotropic filtering of GRACE temporal gravity for geophysical signal enhancement, *Geophys. J. Int.* **163**, 18-25, doi:10.1111/j.1365-246X.2005.02756.x.
- Hansen, P. C., 1998, Rank-deficient and discrete ill-posed problems". SIAM lecture notes, Philadelphia.
- Jekeli, C., 1981, Alternative methods to smooth the Earth's gravity field. Rep 327, Dep of Geod Sci and Surv, Ohio State University, Columbus.
- Jolliffe, T., 2002, Principal component analysis, Springer series in statistics, Springer, New York, 2nd edition.
- Klees, R., Revtova, E. A., Gunter, B. C., Ditmar, P., Oudman, E., Winsemius, H. C. and Savenije, H. H. G., 2008, The design of an optimal filter for monthly GRACE gravity models. *Geophys. J. Int.* **175**, 417-432. doi:10.1111/j.1365-246X.2008.03922.x
- Kusche, J., 2007, Approximate decorrelation and non-isotropic smoothing of time-variable GRACE-type gravity field models, *J. Geod.* **81**, 733-749, doi:10.1007/s00190-007-0143-3.
- Phillips, D.L., 1962, A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, *J. Assoc. Compt. Mach.*, **9**, 84-97.
- Rasmussen, J. M., 2001, Compact linear operators and Krylov subspace methods." Thesis in the M.Sc. degree.
- Rodell, M., Famiglietti, J. S., Chen, J., Seneviratne, S. I., Viterbo, P., Holl, S. and Wilson, C. R., 2004, Basin scale estimates of evapotranspiration using GRACE and other observations, *Geophys. Res. Lett.* **31**, L20504. doi:10.1029/2004GL020873
- Sasgen, I., Martinec, Z. and Fleming, K., 2006, Wiener optimal filtering of GRACE data, *Stud. Geophys. Geod.*, **50**, 499-508.

## ۵ نتیجه‌گیری

با پرتاب جفت‌ماهواره GRACE در سال ۲۰۰۲، این امکان به وجود آمد که میدان گرانی را به صورت ماهیانه با دقت زیاد و در مقیاس جهانی به دست آورد. یکی از کاربردهای این مدل‌های ماهیانه در به دست آوردن تغییرات میدان گرانی ناشی از تغییرات جرم سطحی به علت پدیده‌های هیدرولوژیکی است. اما داده‌های پتانسیلی جفت‌ماهواره GRACE دارای نوافای هستند که با افزایش درجه ضرایب ژئوپتانسیل افزایش می‌یابد. در این تحقیق روشنی برای پالایش داده‌های ماهیانه-2 (GRACE LEVEL-2) براساس روش پایدارسازی تیخونوف عرضه شد. در این مقاله برای ارزیابی نتایج در حوزه آبی می‌سی‌سی‌پی از مشاهدات چاه‌های پیزومتری و مدل هیدرولوژی GLDAS و در حوزه‌های آبی آمازون، آلبانی، سومالی، دانوب و چین شمالی از مشاهدات در محل تخلیه و داده‌های واگرایی شار رطوبت مشاهداتی با ابزاری مانند رادیوسوند و یا مدل‌های آب‌هواشناسی، استفاده شده است. ارزیابی نتایج نشان‌دهنده کارایی زیاد راهبرد پایدارسازی تیخونوف تعمیم‌یافته در زیرفضای سوبولف نسبت به سایر روش‌های پالایش است.

## مراجع

الله توکلی، ی.، ۱۳۸۵، مطالعه مسئله انتقال به سمت پائین مشاهدات تفاضلی در تعیین ژئوئید. پایان نامه کارشناسی ارشد، تهران، دانشگاه تهران، دانشکده فنی، گروه مهندسی نقشه برداری.

مختراری، ا.، ۱۳۸۹، پردازش داده‌های پتانسیلی ماهیانه ماهواره GRACE جهت تعیین تغییرات پارامترهای میدان گرانی. پایان نامه کارشناسی ارشد، تهران، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی ژئودزی و ژئوماتیک.

- Tikhonov, A.N., 1963, Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, Soviet Math. Dokl., 4, pp. 1035-1038, English translation od Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 151, pp. 501-504.
- Tourian, M. J., Rieger, J., Devaraju, B. and Sneeuw, N., 2010, Outlier detection and correction for GRACE data to improve the continental water balance. EGU (European Geosciences Union), general assembly, 02-07 May 2010, Vienna, Austria.
- Wahr, J. and Schubert, G. (Ed.), 2007, Time-variable gravity from satellites, Treatise on Geophysics, 213-218, Oxford: Elsevier Ltd.
- Wahr, J., Molenaar, M. and Bryan, F., 1998, Time variability of the Earth's gravity field: hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE, *J. Geophys Res* 103(B12):30205-30229.
- Save, H., Bettadpur, S. and Tapley, B.D., 2012, Reducing errors in the GRACE gravity solutions using regularization. *Journal of Geodesy*, 86:695–711, doi:10.1007/s00190-012-0548-5.
- Schrama, E. J. O., Wouters, B. and Lavallée, D. A., 2007, Signal and noise in gravity recovery and climate experiment (GRACE) observed surface mass variations, *J Geophys Res* 112, B0,8407, doi:10.1029/2006JB004882.
- Swenson, S. and Wahr, J., 2006, Post-processing removal of correlated errors in GRACE data, *Geophys Res Lett* 33,L08402. doi:10.1029/2005GL025285.
- Swenson, S. and Wahr, J., 2011, Estimating signal loss in regularized GRACE gravity field solutions, *Geophysical Journal International*, 185, 693-702, doi:10.1111/j.1365-246X.2011.04977.x