تقریب بیضویِ اثرات توپوگرافی در مدل‌سازی میدان گرانی زمین

مهدی گلی[۱*] و مهدی نجفی علمداری[۲]

[۱] استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران
[۲] دانشیار، گروه هیدروگرافی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران شمال، ایران

(دریافت: ۹۱/۶/۲۶، پذیرش نهایی: ۹۳/۲/۳۰)

چکیده

اثر جاذبی توپوگرافی به منزله یک مولفه کلیدی، در مدل‌سازی میدان گرانی زمین نقش مهمی ایفا می‌کند. محاسبه اثر توپوگرافی به کمک مدل‌های رقومی زمین که در دستگاه مختصات (گاوسی) ژئودتیکی داده می‌شوند، صورت می‌گیرد. معمولا برای محاسبه این اثر از تقریب کروی انتگرال نیوتن استفاده می‌شود. این تحقیق به تقریب بیضوی پتانسیل جاذبی ناشی از توپوگرافی و گرادیان ارتفاعی آن اختصاص دارد. در این مقاله روابط کاملی برای محاسبه پتانسیل و گرادیان ارتفاعی آن (اثر توپوگرافی بر شتاب گرانی) با استفاده از انتگرال نیوتن در دستگاه مختصات بیضوی گاوسی عرضه شده است. نتایج عددی برای دو حالت کروی و بیضوی مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج عددی برای منطقه آزمون ایران نشان می‌دهد که صرف‌نظر از اثر عبارت‌های بوگه با دقت خوبی می‌توان از تقریب کروی انتگرال نیوتن و گرادیان ارتفاعی آن در مدل‌سازی منطقه آزمون استفاده کرد. مقادیر عددی اختلاف دو مدل بیضوی و کروی برای پتانسیل کمتر از $۵۰\ m^2s^{-2}$ و ۵۰۰ میکروگال برای شتاب جاذبی ناشی از توپوگرافی است. با وجود این مقادیر در تعیین ژئوئید سانتی‌متری می‌تواند حائز اهمیت باشد.

واژه‌های کلیدی: میدان گرانی، اثرات توپوگرافی، تقریب بیضوی، دستگاه مختصات ژئودتیکی گاوسی

Ellipsoidal approximation of the topographical effects in the Earth's gravity field modelling

Goli, M.[1] and Najafi-Alamdari, M.[2]

[1]*Assistant Professor in Geodesy, Faculty of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Iran*
[2]*Associated Professor in Geodesy, Faculty of Marine Science and Technology,Islamic Azad University, North Tehran Branch, Iran*

(Received: 16 Sep 2012, Accepted: 20 May 2014)

Summary

The topographical effect is one component of the Earth's gravity field that needs to be reliably evaluated in the gravity field modeling. The topographical effect can be numerically evaluated from the knowledge of a Digital Terrain Models (DTM). After the Satellite positioning system, e.g., GPS, the computation points as well as DTMs present/convert in Gauss ellipsoidal (geodetic) coordinates system, λ, φ and h called ellipsoidal longitude, longitude and height, respectively.

So far, the planar and spherical models of the topography are frequently used for computation of the effect of topographical masses in geodesy and geophysics. In practice, the planar model is widely used in the evaluation of the classical terrain correction. Vanicek et al. (2001) indicated that the planar model of topography (in form of infinite Bouguer plate) cannot be applied for the solution of the geodetic boundary value problem.

E-mail: goli@shahroodut.ac.ir　　تلفن: ۰۲۷۳-۳۳۰۰۲۴۰　　*نگارنده رابط:

Also, spherical approximation of the topography may be insufficient for precise determination of the 1cm-geoid. Moreover, the interested points on and above the Earth’s surface as well as the DTMs are presented in geodetic coordinate system. Therefore the Newton's integral and related formulas should be evaluated in terms of the geodetic coordinates system. In this study, a new exact ellipsoidal formula for potential of topography and its vertical gradient, as well as for second Helmert condensation topography effects are derived.

The Newton's integral for computation of the gravitational potential and its vertical gradient has a weak singularity when the computation point is close to the integration point. According to Martinec (1998), the singularity is removed from the numerical integration using the Cauchy algorithm by adding and subtracting the Bouguer terms (the singularity contribution). In ellipsoidal approximation, the Bouguer terms are computed from an ellipsoidal shell. The ellipsoidal shell is sufficiently approximated by a shell bounded by two concentric, similar ellipsoids that so called homoeoid. The thickness of homoeoid is equal to ellipsoidal height of topography at the interest point. The roughness terms, due to deficiency of the ellipsoidal Bouguer shell can be evaluated by direct numerical integration.

The results of two spherical and ellipsoidal models are numerically investigated in Iran (the highest peak exceeds 5000 m). The selected test area extends from 24° to 40° northern latitudes and from 44° to 60° eastern longitudes. Near zone of topographical integrals extends to 4° and the far zone from 4° to 180°. Near distant is divided into three zones. 1- Innermost zone to 15 minute, 2- middle zone to 1°, and outer zone from 1° to 4°. The contribution of Innermost, middle and outer zones is computed by 3'', 30'' and 5' DEMs. Far zone effect is computed by integration over a 30' DTM. The numerical results indicate that the magnitudes of ellipsoidal corrections (difference between ellipsoidal and spherical solutions) are small. The main bulk of this correction is long wavelength and is due to Bouguer and distance zone contributions. Therefore the ellipsoidal correction can be sufficiently used for regional and global applications such as regional Earth's gravity field approximation. Since for the compilation of 1cm geoid, the gravity with a precision better than 10 µGal is needed (Martinec, 1998), the ellipsoidal approximation of topography must be used in precise geoid computation particularly in rugged mountainous area.

Keywords: Gravity field, Topographical effects, Ellipsoidal approximation, Geodetic coordinate system

۱ مقدمه

مدل‌سازی اثر جاذبی توپوگرافی در ژئودزی و ژئوفیزیک، با استفاده از مدل‌های صفحه‌ای، کروی و بیضوی امکان‌پذیر است. با وجود اینکه محاسبه اثر توپوگرافی در ژئودزی و ژئوفیزیک به طور مرسوم با تقریب صفحه‌ای صورت می‌گیرد (اثر توپوگرافی نسبت به صفحه بوگه)؛ اما ونیچک و همکاران (۲۰۰۱) نشان دادند که حداقل در مدل‌سازی میدان گرانی زمین به روش حل مسائل مقدار مرزی، امکان استفاده از تقریب صفحه‌ای توپوگرافی وجود ندارد. از سوی دیگر تقریب‌های کروی برای تعیین اثرات توپوگرافی ممکن است برای مدل‌سازی دقیق محلی میدان گرانی و تعیین دقیق ژئوئید کافی نباشد. علاوه بر این مختصات نقاط مشاهداتی و مدل‌های رقومی زمین در دستگاه مختصات ژئودتیکی اندازه‌گیری و عرضه می‌شوند. ازاین‌رو لازم است، روابط لازم برای محاسبه اثرات توپوگرافی در دستگاه مختصات بیضوی نوشته شود. یک راه حل

جایگزین برای این مسئله، حل بـه در دستگاه مختصات دکارتی زمین مرکز است. در این صورت باید مدل رقومی زمین نیز در دستگاه مختصات دکارتی داده شود. امری که غیرعملی و غیرکاربردی است.

بـه منزلـه یـک راه حـل جـایگزین، اردلان و صـفری (۲۰۰۴) پیشنهاد استفاده از سامانه تصویرهای هـم‌مساحت را مطرح کردند. در این تحقیق اثر جاذبی توپوگرافی برای شتاب گرانی زمین در یک سامانه تصـویر هـم‌مساحت بـا حفظ تقریب‌های بیضوی مدل شـد. بـا اسـتفاده از دسـتگاه مختصات دکارتی می‌توان از جواب تحلیلی انتگرال نیوتن و گرادیان‌های ارتفاعی آن در این دستگاه مختصات سـود جسـت. بایـد اشـاره کـرد کـه محاسـبه شـتاب جـاذبی توپوگرافی با استفاده از سامانه تصویر به مفهوم اسـتفاده از تقریب صفحه‌ای توپوگرافی نیست.

در تحقیق نواک و گرافارند (۲۰۰۵) تقریـب بیضـوی، $O(e^4)$، پتانسـیل جـاذبی ناشـی از توپـوگرافی و مشـتق ارتفـاعی آن را در دسـتگاه مختصـات بیضـوی ژئـودتیکی بیان کردند. آنها توانستند اثر توپوگرافی را بـه‌صـورت اثـر توپوگرافی کروی و تصحیح بیضویت بیان کنند. براساس این تحقیق اثر بیضویت در اثرات توپوگرافی حـدود یـک هزارم مقدار کروی آن کمیـت اسـت. در تحقیـق وایـدا و همکـاران (۲۰۰۴) انتگـرال نیـوتن بـرای محاسـبه پتانسـیل جاذبی توپوگرافی در دستگاه مختصات ژئـودتیکی نوشـته و سپس با تقریب کروی روابط را سـاده کردنـد. براسـاس تحقیق شوبرگ (۲۰۰۴) اثر بیضویت می‌توانـد ۱ میلـی‌متـر در ارتفـاع ژئوئیـد تاثیرگـذار باشـد کـه ایـن مقـدار قابـل صرف‌نظر کردن است.

نکته قابل توجه دیگر، سطح مبنای ارتفاعی در محاسبه اثر توپوگرافی (ژئوئید یا بیضوی) است. معمـولاً هـدف از اِعمـال اثـر توپـوگرافی بـرای داده‌هـای جـاذبی هماهنـگ (هارمونیک) کردن فضا است. گـاهی نیـز اثـر توپـوگرافی برای دستیابی به کمیتی فاقد بسامدهای زیاد برای انتقال رو به پایین حذف می‌شود. ازاین‌رو انتخاب اینکه مـرز پـایینی توپوگرافی ژئوئید باشد یا بیضوی بستگی به موقعیـت مـرز در مسئله مقدار مرزی مزبور دارد. در مسئله مقـادیر مـرزی سوم فیزیکی ژئودزی مـرز، ژئوئیـد اسـت کـه معمـولا در تقریب کروی با کره و در تقریب بیضوی با بیضوی مرجع تقریب زده می‌شود. لذا مرز در تقریب کـروی بیضـوی بـه شعاع R و در تقریب بیضوی، سطح بیضـوی مرجع اسـت. البته این نکته تاثیر چندانی بر نتایج عددی ندارد چراکه اثر جاذبی توپـوگرافی بیشـتر تـابع اخـتلاف ارتفـاع و عکـس فاصله است. از آنجا که در فواصل نزدیک میزان تغییـرات شعاع بیضوی یا حتی ژئوئید کم است، انتخاب مـرز پـایین توپوگرافی تاثیر چندانی بر نتایج عددی ندارد.

هـدف از ایـن تحقیـق بیـان انتگـرال نیـوتن و مشـتق ارتفاعی آن در دستگاه مختصات بیضـوی و بـدون اِعمـال هیچ تقریب (کامل) است. در ادامه نتایج عددی حاصل بـا تقریب کروی مقایسه می‌شود.

۲ پتانسیل جاذبی توپوگرافی و گرادیان ارتفـاعی آن در دستگاه مختصات بیضوی

در یـک دسـتگاه مختصـات سه‌بُعـدی دکـارتی، پتانسـیل جاذبی توپـوگرافی از انتگـرال نیـوتن رابطـه (۱) بـه‌دسـت می‌آید.

$$V(x,y,z)=\int_B \frac{\rho(x',y',z')}{L(x,y,z,x',y',z')}\,dx'dy'dz' \qquad (۱)$$

در این رابطه، L فاصله اقلیدسی بین دو نقطه (x,y,z) و (x',y',z') است. $\rho(x',y',z')$ چگالی در نقطه انتگرال‌گیری است که در سراسر این مقاله آن را ثابت در نظر می‌گیریم. برای تبدیل انتگرال فوق در دستگاه مختصات بیضوی از دستگاه‌های گوناگون بیضوی می‌توان سود جست. در تحقیق اردلان (۱۹۹۹) فهرست مفصلی از این دسته دستگاه مختصات‌ها به همراه روابط لازم برای تبدیل آنها آمده است. ازآنجایی‌که مشاهدات ما در

دستگاه مختصات بیضوی گاوسی (φ,λ,h) صورت می‌گیرد، همچنین به علت امکان حل تحلیلی انتگرال نیوتن نسبت به مولفه ارتفاعی در این دستگاه مختصات، از دستگاه مختصات گاوسی برای بیان اثرات توپوگرافی استفاده می‌کنیم. این دستگاه مختصات را گاهی دستگاه مختصات ژئودتیکی نیز می‌گویند. ارتباط این دستگاه با دستگاه مختصات دکارتی ژئوسنتریک زمین به‌صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود (ونیچک و کراکوسکی، ۱۹۸۶).

$$\begin{aligned} X &= (N+h)\cos\varphi\cos\lambda; \\ Y &= (N+h)\cos\varphi\sin\lambda; \\ Z &= \left[N(1-e^2)+h\right]\sin\varphi, \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن، $N(\varphi)=a(1-e^2\sin^2\varphi)^{-1/2}$ شعاع مقطع نصف‌النهاری است. e خروج از مرکزیت بیضوی $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$، a و b به‌ترتیب نیم‌قطرهای بزرگ و کوچک بیضوی هستند. ژاکوبین این دستگاه مختصات را می‌توان با استفاده از معادلات (۲) به‌دست آورد.

$$\mathrm{J}=\left|\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(\lambda,\varphi,h)}\right|=(N+h)(M+h)\cos\varphi, \tag{۳}$$

که در آن، $M(\varphi)=a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2}$ شعاع مقطع نصف‌النهاری است. همچنین فاصله فضایی بین دو نقطه در دستگاه مختصات ژئودتیکی عبارت است از:

$$\begin{aligned} &L^2(\varphi,\lambda,h,\varphi',\lambda',h') \\ &=(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2 \\ &=(N'+h')^2\cos\varphi'+(N+h)^2\cos\varphi \\ &-2(N'+h')(N+h)\cos\varphi'\cos\varphi\cos(\lambda-\lambda') \\ &+(N'+h'-e^2N')^2\sin^2\varphi'+(N+h-e^2N)^2\sin^2\varphi \\ &-2(N'+h'-e^2N')(N+h-e^2N)\sin\varphi'\sin\varphi'. \end{aligned} \tag{۴}$$

با توجه به رابطه (۳) پتانسیل جاذبی ناشی از جرم بالای بیضوی در دستگاه مختصات ژئودتیک به‌صورت رابطه (۵) بیان می‌شود:

$$V^T(\varphi,\lambda,h)=G\rho\int_E\int_{\zeta'=0}^{\zeta'=h'}\frac{(N'+\zeta')(M'+\zeta')}{L(\varphi,\lambda,h,\varphi',\lambda',\zeta')}d\zeta' dE'. \tag{۵}$$

که در آن، $dE'=\cos\varphi d\varphi d\lambda$ المان سطحی و تابع فاصله L از رابطه (۴) داده شده است. خوشبختانه انتگرال نسبت به مولفه ارتفاعی دارای جواب تحلیلی است. در این صورت این انتگرال به یک انتگرال سطحی که با استفاده از روش‌های عددی قابل حل است، تقلیل می‌یابد. لازم به ذکر است که همان‌طور در بالا اشاره شد، این انتگرال فقط در دستگاه مختصات بیضوی گاوسی (ژئودتیکی) جواب تحلیلی نسبت به مولفه ارتفاعی دارد. در صورت استفاده از سایر دسته مولفه‌های دستگاه مختصات بیضوی نظیر (u,φ,λ)، باید از روش‌های عددی برای انتگرالگیری روی مولفه ارتفاعی استفاده کنیم. برای عرضه یک راه حل تا حد امکان کوچک برای حل انتگرال این رابطه را برحسب کمیت ζ' مرتب می‌کنیم:

$$V^T(\varphi,\lambda,h)=G\rho\int_E\int_{\zeta'=0}^{\zeta'=h'}\frac{(\zeta'^2+A\zeta'+B)}{\sqrt{\zeta'^2+C\zeta'+D}}d\zeta' dE', \tag{۶}$$

که،

$$\begin{aligned} &A=N'+M', \\ &B=N'M', \\ &C=-2\left(X-N'\cos\varphi'\cos\lambda'\right)\cos\varphi'\cos\lambda' \\ &-2\left(Y-N'\cos\varphi'\sin\lambda'\right)\cos\varphi'\sin\lambda' \\ &-2\left(Z+\sin\varphi' N'\left(e^2-1\right)\right)\sin\varphi' \\ &D=\left(X-N'\cos\varphi'\cos\lambda'\right)^2+\left(Z-\sin\varphi' N'\left(1-e^2\right)\right)^2 \\ &+\left(Y-N'\cos\varphi'\sin\lambda'\right)^2. \end{aligned}$$

که در این روابط (X,Y,Z) مختصات ژئوسنتریک دکارتی نقطه محاسباتی است. جواب انتگرال نسبت به ζ' عبارت است از:

$$\begin{aligned} &\int\frac{\zeta'^2+A\zeta'+B}{\sqrt{\zeta'^2+C\zeta'+D}}d\zeta'=\frac{1}{4}L\left(2\zeta'\text{-}3C+4A\right) \\ &+\frac{1}{8}\ln\left(\frac{C}{2}+\zeta'+L\right)\left(3C^2\text{-}4D\text{-}4AC+8B\right), \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن، $L=\sqrt{\zeta'^2+C\zeta'+D}$ همان فاصله فضایی است. با فرض تغییرات جانبی برای چگالی، انتگرال سطحی برای تعیین پتانسیل توپوگرافی بالای ژئوئید عبارت است از:

$$\begin{aligned} &V^T(\varphi,\lambda,h)=G\rho\int_E\frac{1}{4}\Big|L\left(2\zeta'-3C+4A\right) \\ &+\frac{1}{2}\ln(\frac{C}{2}+\zeta'+L)\left(3C^2-4D-4AC+8B\right)\Big|_{\zeta'=0}^{\zeta'=h'}dE'. \end{aligned} \tag{۸}$$

انتگرال فوق برای محاسبه پتانسیل توپوگرافی در روی

سطح زمین دارای تکینگی ضعیف است. برای رفع آن می‌توان سهم تکینگی (پتانسیل بوگه بیضوی) را جداگانه محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} V^T(\varphi,\lambda,h) &= G\rho\int_E\int_{\zeta'=0}^{\zeta'=h}\frac{(N'+\zeta')(M'+\zeta')}{L(\varphi,\lambda,h,\varphi',\lambda',\zeta')}d\zeta' dE' \\ &+G\rho\int_E\int_{\zeta'=h}^{\zeta'=h'}\frac{(N'+\zeta')(M'+\zeta')}{L(\varphi,\lambda,h,\varphi',\lambda',\zeta')}d\zeta' dE'. \\ &= V^{TB}(\varphi,\lambda,h)+V^{TR}(\varphi,\lambda,h); \end{aligned} \tag{۹}$$

در رابطه فوق V^{TB} عبارت بوگه نسبت به یک پوسته بیضوی معادل سهم تکینگی است و V^{TR} عبارت ناهمواری توپوگرافی نسبت به پوسته بیضوی است. V^{TB} پتانسیل ناشی از یک پوسته بیضوی شکل با ارتفاع h است که می‌توان با پتانسیل ناشی از یک هموئویید تقریب زد. هموئویید، حجم محصور بین دو بیضوی هم‌مرکز و متشابه است (شکل ۱). پتانسیل هموئویید محصور بین بیضوی با معادله $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ و بیضوی $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=m$ که $m>1$، از رابطه زیر به‌دست می‌آید (رمزی، ۱۹۴۰؛ مک میلان، ۱۹۵۸):

$$\begin{aligned} &V(X,Y,Z)= \\ &-\frac{2\pi}{3}G\rho abc(1-m^3)\int_\lambda^\infty\frac{du}{\sqrt{(u+a^2)(u+b^2)(u+c^2)}}, \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که برای نقاط داخل هموئویید $\lambda=0$ و برای نقاط خارج آن بزرگ‌ترین ریشه معادله زیر است:

$$\frac{X^2}{a^2+\lambda}+\frac{Y^2}{b^2+\lambda}+\frac{Z^2}{c^2+\lambda}-1=0. \tag{۱۱}$$

که (X,Y,Z) مختصات ژئوسنتریک نقطه پیش گفته است. معادله فوق دارای دو ریشه به‌صورت رابطه (۱۲) است.

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c}(X^2+Y^2+Z^2-a^2-b^2) \\ \pm\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2-a^2+b^2)^2+4z^2(a^2-b^2)}\end{array}\right] \tag{۱۲}$$

ریشه بزرگ‌تر با توجه به مثبت بودن رادیکال مشخص است. با حل انتگرال رابطه (۱۰) و جای‌گذاری ریشه بزرگ‌تر معادله (۱۱)، پتانسیل ناشی از یک پوسته بیضوی دو محوری در نقطه‌ای خارج یا روی آن با مختصات ژئوسنتریک (X,Y,Z) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &V^{TB}(X,Y,Z)= \\ &-\frac{2\pi}{3}G\rho ab^2(1-m^3)\frac{\pi-2\arctan(\sqrt{b^2+\lambda_1}/E)}{E} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

البته با توجه به یکسان بودن سهم تکینگی پتانسیل قبل و بعد از تحکیم، نیازی به محاسبه عبارت بوگه برای اثرات توپوگرافی در فضای هلمرت نیست.

با توجه به معادلات (۸) و (۹) عبارت ناهمواری پتانسیل توپوگرافی نسبت به پوسته بوگه بیضوی عبارت است از:

$$\begin{aligned} V^{TR}(\varphi,\lambda,h) &= G\rho\int_E\frac{1}{4}\Big|L(2\zeta'-3C+4A) \\ &+\frac{1}{2}\ln\left(C/2+\zeta'+L\right)\left(3C^2-4D-4AC+8B\right)\Big|_{\zeta'=h}^{\zeta'=h'}dE'. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

برای محاسبه شتاب جاذبی ناشی از توپوگرافی از گرادیان ارتفاعی پتانسیل استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &A^T(\varphi,\lambda,h)=-\frac{\partial V^T}{\partial h} \\ &=-G\rho\int_E\int_{\zeta'=0}^{\zeta=h'}\frac{(X-X')\cos\varphi\cos\lambda+(Y-Y')\cos\varphi\sin\lambda+(Z-Z')\sin\varphi}{L^{-3/2}} \\ &\times(N'+\zeta')(M'+\zeta')d\zeta' dE', \end{aligned} \tag{۱۵}$$

پس از جای‌گذاری مقادیر (X',Y',Z')، برای حل تحلیلی انتگرال اخیر روی مولفه ارتفاعی بهتر است آن را همانند قبل برای مولفه ζ' مرتب کنیم:

$$\begin{aligned} &A^T(\varphi,\lambda,h)= \\ &G\rho\int_E\int_{\zeta'=0}^{\zeta'=h'}\frac{E\zeta'^3+F\zeta'^2+G\zeta'+H}{(\zeta'^2+C\zeta'+D)^{3/2}}d\zeta' dE', \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که،

$$\begin{aligned} &E=\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\lambda\cos\varphi\cos\lambda'\cos\varphi' \\ &\quad+\sin\lambda\cos\varphi\sin\lambda'\cos\varphi', \\ &F=EA+U, \\ &G=EB-AU, \\ &H=-EB, \\ &U=\sin\varphi\left[z-\sin\varphi' N'(1-e^2)\right] \\ &\quad+\cos\lambda\cos\varphi\left(x-\cos\lambda'\cos\varphi' N'\right) \\ &\quad+\sin\lambda\cos\varphi\left(y-\sin\lambda'\cos\varphi' N'\right). \end{aligned}$$

حاصل انتگرال به‌دست آمده برای مولفه ارتفاعی عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{E\zeta'^3 + F\zeta'^2 + G\zeta' + H}{(\zeta'^2 + C\zeta' + D)^{3/2}} d\zeta' \\
&= \frac{4E\zeta'^2 + 6EC\zeta' - 3EC^2 + 8ED - 4F\zeta' + 2FC - 4G}{4L} \\
&+ \frac{4EDC\zeta' + 2EDC^2 + FC^2\zeta' - 2GC\zeta' - GC^2 + 4U\zeta' + 2UC}{L\left(4D - C^2\right)} \\
&+ \frac{-6EC^3\zeta' - 3EC^4 + 2FC^3}{4L\left(4D - C^2\right)} + \left(F - \frac{3}{2}EC\right)\ln\left(\frac{C}{2} + \zeta' + L\right)\Bigg|
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

درنهایت انتگرال اثر جاذبی توپوگرافی تبدیل به یک انتگرال دوبُعدی روی سطح بیضوی می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&A^{T}(\varphi,\lambda,h) = \\
&-2G\rho\int_E \Bigg| \frac{4E\zeta'^2 + 6EC\zeta' - 3EC^2 + 8ED - 4F\zeta' + 2FC - 4G}{4L} \\
&+ \frac{4EDC\zeta' + 2EDC^2 + FC^2\zeta' - 2GC\zeta' - GC^2 + 4U\zeta' + 2UC}{L\left(4D - C^2\right)} \\
&+ \frac{-6EC^3\zeta' - 3EC^4 + 2FC^3}{4L\left(4D - C^2\right)} + \left(F - \frac{3}{2}EC\right)\ln\left(\frac{C}{2} + \zeta' + L\right)\Bigg|_{\zeta'=0}^{\zeta'=h'} dE'.
\end{aligned}
\tag{۱۸}
$$

همانند آنچه در حالت پتانسیل داشتیم، انتگرال فوق به ازای نقطه محاسباتی روی زمین دارای تکینگی ضعیف است. سهم تکینگی شتاب ناشی از یک پوسته بیضوی به ارتفاع h است. شتاب ناشی از چنین پوسته‌ای معادل شتاب ناشی از یک هموئویید است. شتاب ناشی از یک هموئویید، محصور بین دو بیضوی با نیم‌قطرهای (a,b,c) و (ma,mb,mc) که $m>1$، در نقطه‌ای خارج و یا روی آن به مختصات دکارتی (x,y,z) عبارتست از (رمزی، ۱۹۴۰؛ مک میلان، ۱۹۵۸):

$$
\begin{aligned}
&A^{TB}(x,y,z) \\
&= \frac{4}{3}\pi G\rho(1-m^3)abc\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}
\end{aligned}
\tag{۱۹}
$$

که در آن، λ بزرگ‌ترین ریشه معادله (۱۱) است. برای بیضوی دو محوری زمین، شتاب ناشی از یک پوسته بیضوی با ارتفاع h در نقطه‌ای با مختصات دکارتی (x,y,z) عبارت است از:

$$
A^{TB}(X,Y,Z) = \frac{4}{3}\pi G\rho(1-m^3)a^2b\frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2+\lambda_1}}{(a^2+\lambda_1)\sqrt{(b^2+\lambda_1)}}
\tag{۲۰}
$$

که در آن، λ_1 از رابطه (۱۲) به‌دست می‌آید. همچنین شتاب جاذبی ناهمواری توپوگرافی (اثر توپوگرافی بیضوی) عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
&A^{TR}(\varphi,\lambda,h) \\
&= -2G\rho\int_E \Bigg| \frac{4E\zeta'^2 + 6EC\zeta' - 3EC^2 + 8ED - 4F\zeta' + 2FC - 4G}{4L} \\
&+ \frac{4EDC\zeta' + 2EDC^2 + FC^2\zeta' - 2GC\zeta' - GC^2 + 4U\zeta' + 2UC}{L\left(4D - C^2\right)} \\
&+ \frac{-6EC^3\zeta' - 3EC^4 + 2FC^3}{4L\left(4D - C^2\right)} + \left(F - \frac{3}{2}EC\right)\ln\left(\frac{C}{2} + \zeta' + L\right)\Bigg|_{\zeta'=h}^{\zeta'=h'} dE'.
\end{aligned}
\tag{۲۱}
$$

۳ پتانسیل جاذبی توپوگرافی تحکیم شده و گرادیان ارتفاعی آن

در برخی از نظریه‌های تعیین ژئوئید از جمله استوکس-هلمرت توپوگرافی بالای ژئوئید/بیضوی با یک لایه بسیار نازک روی ژئوئید/بیضوی جایگزین می‌شود. این کار برای محقق شدن شرایطی است که نظریهٔ استوکس برای تعیین ژئوئید بدان نیاز دارد. در این بخش روابط لازم برای محاسبه پتانسیل جاذبی توپوگرافی تحکیم شده روی بیضوی و گرادیان ارتفاعی در دستگاه مختصات بیضوی گاوسی ارائه می‌شود.

تحکیم اجرام بالای ژئوئید در دو حال حفظ جرم و یا حفظ مرکز جرم زمین میسر است. در حالت حفظ جرم زمین، جرم زمین قبل و بعد از تحکیم ثابت باقی می‌ماند. اگر M_g، M_t و M_c به‌ترتیب بیانگر جرم زمین تا بیضوی، جرم توده توپوگرافی بالای بیضوی و جرم توپوگرافی تحکیم شده باشد، شرط حفظ جرم زمین عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
&M_c = M_t; \\
&\int_E \sigma(\varphi',\lambda')N'M'dE \\
&= \int_E\int_{\zeta'=0}^{h}\rho(\varphi',\lambda',\zeta')(N'+\zeta')(M'+\zeta')d\zeta' dE.
\end{aligned}
\tag{۲۲}
$$

که در این رابطه، σ چگالی سطحی و ρ چگالی توپوگرافی است. با فرض ثابت بودن چگالی توپوگرافی، چگالی سطحی برابر با رابطه (۲۳) است.

$$
\sigma(\varphi',\lambda') = \frac{\rho}{N'M'}\int_{\zeta'=0}^{h'}(N'+\zeta')(M'+\zeta')d\zeta'
\tag{۲۳}
$$

با انتگرال‌گیری در راستای ارتفاعی و قرار دادن مقادیر حدی برای آن خواهیم داشت:

$$\sigma(\varphi,\lambda)=\rho h\left(1+\frac{h}{2}\frac{N+M}{NM}+\frac{h^3}{2NM}\right). \quad (۲۴)$$

برای دستیابی به چگالی لایه سطحی با شرط حفظ مرکز جرم زمین بهتر است از دستگاه مختصات بیضوی (λ,β,u) استفاده شود. ارتباط این مولفه‌ها با مولفه‌های دکارتی عبارت است از (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷):

$$X=\sqrt{u^2+E^2}\cos\beta\cos\lambda;\\ Y=\sqrt{u^2+E^2}\cos\beta\sin\lambda;\\ Z=u\sin\beta. \quad (۲۵)$$

ارتباط المان حجم در این دستگاه مختصات و دستگاه مختصات دکارتی عبارت است از:

$$dX\,dY\,dZ\\ =(u^2+E^2\cos^2\beta)\cos\beta\,du\,d\beta\,d\lambda\\ =(u^2+E^2\cos^2\beta)du\,d\Omega. \quad (۲۶)$$

اگر $(X_C,\,Y_C,\,Z_C)$ مختصات دکارتی مرکز گرانی زمین باشد. مولفه X_C برابر است با:

$$X_C=\frac{1}{M}\int_E\int_{u'=0}^{u(\Omega')}\rho(u',\beta',\lambda')e_X(u'^2+E^2\sin^2\beta')du'd\Omega';\\ e_X=\sqrt{u'^2+E^2}\cos\beta'\cos\lambda'. \quad (۲۷)$$

این رابطه برای مولفه‌های دیگر نیز به همین ترتیب نوشته می‌شود. اگر $(X_C^h,\,Y_C^h,\,Z_C^h)$ مرکز گرانی بعد از تحکیم توپوگرافی باشد، در این صورت برای مولفه X_C^h خواهیم داشت:

$$X_C^h=\frac{1}{M}\int_E\int_{u'=0}^{b}\rho(u',\Omega')e_X(u'^2+E^2\sin^2\beta')du'd\Omega'\\ +\frac{1}{M}\int_E\sigma(\Omega')e_{X_0}(b^2+E^2\sin^2\beta')d\Omega'\\ e_{X_0}=\sqrt{b^2+E^2}\cos\beta'\cos\lambda'. \quad (۲۸)$$

مولفه‌های دیگر را می‌توان به همین ترتیب نوشت. در حالت حفظ مرکز گرانی جرم زمین بعد از تحکیم نیاز است که، $X_C^h=0,\ Y_C^h=0,\ Z_C^h=0.$ اِعمال این شرط برای مولفه X به‌صورت زیر است:

$$\frac{1}{M}\int_E\int_{u'=0}^{b}\rho(u',\Omega')e_X(u'^2+E^2\sin^2\beta')du'd\Omega'\\ =-\frac{1}{M}\int_E\sigma(\Omega')e_{X_0}(b^2+E^2\sin^2\beta')d\Omega' \quad (۲۹)$$

با ثابت در نظر گرفتن چگالی توپوگرافی، چگالی سطحی از انتگرال بالا به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma(\Omega')=\frac{1}{a(b^2+E^2\sin^2\beta')}\\ \int_b^{u(\Omega')}\sqrt{u'^2+E^2}(u'^2+E^2\sin^2\beta')du' \quad (۳۰)$$

برای یکسان سازی فرمول‌ها بهتر است معادله اخیر را در دستگاه مختصات بیضوی گاوسی بنویسیم:

$$\sigma(\varphi',\lambda')=\frac{1}{(N+h')^2(M'+h')}\\ \int_{\zeta'=0}^{h'}(N'+\zeta')^2(M'+\zeta')d\zeta' \quad (۳۱)$$

از حل این انتگرال و جای‌گذاری حدود آن رابطه چگالی سطحی در حالت حفظ مرکز گرانی جرم زمین به‌دست می‌آید:

$$\sigma(\varphi,\lambda)=\frac{h}{N^2M}\begin{pmatrix}N^2M+\frac{1}{2}(N^2+2N^2M)h\\ +\frac{1}{3}(2N+M)h^2+\frac{1}{4}h^3\end{pmatrix}. \quad (۳۲)$$

پتانسیل ناشی از تحکیم توپوگرافی با چگالی بالای بیضوی در رو برابر است با:

$$V^C(\varphi,\lambda,h)=G\int_E\frac{\sigma(\varphi',\lambda')}{L(\varphi,\ \lambda,\ h,\ \varphi',\ \lambda')}N'M'dE'. \quad (۳۳)$$

که فاصله فضایی $L(\varphi,\ \lambda,\ h,\ \varphi',\ \lambda',\ h'=0)$ از رابطه (۴) به‌دست می‌آید. گرچه این انتگرال برای نقاطی غیر واقع روی بیضوی، تکینگی ندارد، اما بر طبق رویه قبلی توان آن را به‌صورت مجموع دو عبارت بوگه و ناهمواری نوشت:

$$V^C(\varphi,\lambda,h)=V^{CB}(\varphi,\lambda,h)+V^{CR}(\varphi,\lambda,h) \quad (۳۴)$$

عبارت V^{CB} را می‌توان معادل پتانسیل یک هموئویید با ضخامت بی‌نهایت نازک در نظر گرفت. برای این منظور کافی است در رابطه (۱۴)، $m\to 1$ میل داده شود. در این حالت:

$$V^{CB}(X,Y,Z)=2\pi Gab\sigma(X,Y,Z)\frac{\pi-2\arctan(\sqrt{b^2+\lambda_1}/E)}{E}, \quad (۳۵)$$

و عبارت ناهمواری پتانسیل توپوگرافی تحکیم شده

عبارت است از:

$$V^{CR}(\varphi,\lambda,h)=G\int_E \frac{\sigma(\varphi',\lambda')-\sigma(\varphi,\lambda)}{L(\varphi,\ \lambda,\ h,\ \varphi',\ \lambda')}N'M'dE'. \qquad (۳۶)$$

گرادیان ارتفاعی رابطه (۳۳) شتاب ناشی از توپوگرافی تحکیم شده روی ژئوئید را می‌دهد:

$$\begin{aligned} &A^C(\varphi,\lambda,h)=\\ &-\frac{\partial V^C}{\partial h}=-G\int_E \sigma(\varphi',\lambda')[(X-X')\cos\varphi\cos\lambda\\ &+(Y-Y')\cos\varphi\sin\lambda+(Z-Z')\sin\varphi]L^{-3/2}N'M'dE' \end{aligned} \qquad (۳۷)$$

که (X,Y,Z) و (X',Y',Z') به ترتیب مختصات دکارتی نقطه محاسبه و نقطه انتگرال‌گیری است. عبارت بوگه این انتگرال را می‌توان با شتاب ناشی از یک هموئوئید بی‌نهایت نازک تقریب کرد. لذا با اِعمال $m\rightarrow 1$ در رابطه (۲۰) عبارت است از:

$$A^{TB}(X,Y,Z)=4\pi Gab\sigma(X,Y,Z)\frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2+\lambda_1}}{(a^2+\lambda_1)\sqrt{(b^2+\lambda_1)}} \qquad (۳۸)$$

همچنین عبارت ناهمواری انتگرال فوق برابر است با:

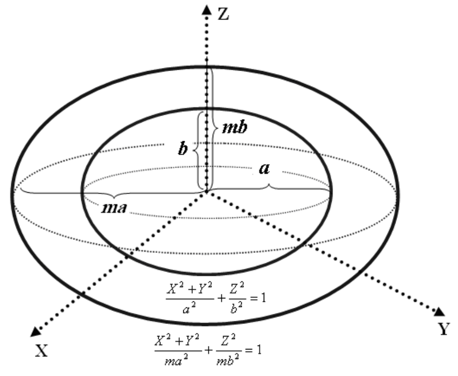
$$\begin{aligned} &A^C(\varphi,\lambda,h)=\\ &-G\int_E [\sigma(\varphi',\lambda')-\sigma(\varphi',\lambda')][(X-X')\cos\varphi\cos\lambda\\ &+(Y-Y')\cos\varphi\sin\lambda+(Z-Z')\sin\varphi]L^{-3/2}N'M'dE' \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

۴ پتانسیل جاذبی توپوگرافی و گرادیان ارتفاعی آن در دستگاه مختصات کروی

مدل‌های رقومی توپوگرافی در دستگاه مختصات دکارتی (سیستم‌های تصویر) و یا در دستگاه مختصات ژئودتیکی گاوسی منتشر می‌شوند. از این رو به‌طور مستقیم امکان حل انتگرال‌های توپوگرافی در دستگاه مختصات کروی وجود ندارد. یک روش برای استفاده از تقریب کروی، اِعمال تقریب کروی در روابط انتگرالی بیضوی است که در بخش‌های فوق بدان اشاره شد. در تقریب کرویت می‌توان از بیضویت زمین صرف‌نظر کرد در این صورت، $e^2=0\Rightarrow N=M=a$، رابطه فاصله فضایی بین دو نقطه در دستگاه مختصات ژئودتیکی عبارت است از:

$$\begin{aligned} &L^2(\varphi,\lambda,h,\varphi',\lambda',h')\\ &=(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\\ &=(a+h)^2+(a+h')^2-2(a+h)(a+h')\cos\psi\\ &=r^2+r'^2-2rr'\cos\psi \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

که در این رابطه، $\cos\psi=\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda-\lambda')$. برای سادگی روابط در رابطه فوق $r=a+h$ و $r'=a+h'$ قرار دادیم. در حقیقت پارامتر a نقش شعاع کره متوسط زمین در تقریب کروی را بازی می‌کند. روابط پتانسیل جاذبی توپوگرافی و گرادیان ارتفاعی آن بارها از سوی محققان گوناگون عرضه شده و مورد استفاده قرار گرفته است که در این خصوص می‌توان به (مارتینک و همکاران، ۱۹۹۵؛ مارتینک، ۱۹۹۸؛ تنزر و همکاران، ۲۰۰۳؛ مخلوف و ایلک، ۲۰۰۸) مراجعه کرد.



شکل ۱. شکل هندسی هموئویید. هموئویید حجم محصور بین دو بیضوی با نیم قطرهای (a,b) و (ma,mb) است که $0<m<1$.

۵ نتایج عددی

این بخش به نتایج عددی دو تقریب کروی و بیضوی از تابع‌های پتانسیل و شتاب جاذبی توپوگرافی روی منطقه ایران با ارتفاع بیشتر از ۵۰۰۰ متر اختصاص دارد. برای محاسبه اثرات توپوگرافی، مدل‌های رقومی زمین SRTM با گام ۳ ثانیه استفاده شده است. در محاسبه اثرات توپوگرافی مناطق نزدیک از مدل‌های متوسط ارتفاعی ۳۰ ثانیه و ۵ دقیقه استفاده شده است. این مدل‌ها از میانگین گیری مدل ۳ ثانیه به‌دست آمده‌اند. همچنین برای محاسبه اثرات توپوگرافی مناطق دوردست از یک مدل رقومی با گام 1 درجه حاصل از متوسط‌گیری از مدل رقومی جهانی ETOPO5 با گام ۵ دقیقه استفاده شده است.

با توجه به اینکه همه کرنل انتگرال‌هایِ توپوگرافی، تابعی از معکوس فاصله هستند، با حفظ دقت، سهم مناطق دورتر را می‌توان از داده‌های ارتفاعی با گام بیشتر محاسبه کرد. در اینجا برای محاسبه همه اثرات توپوگرافی، پهنه‌بندی زیر مورد استفاده قرار گرفت: ۱- منطقه خیلی نزدیک: شعاع ۱۵ دقیقه اطراف نقطه که از یک مدل ارتفاعی با گام ۳ ثانیه یا کمتر استفاده می‌شود. ۲- منطقه نزدیک: از شعاع ۱۵ دقیقه تا ۱ درجه که از مدل متوسط با گام ۳۰ ثانیه استفاده می‌شود و از شعاع 1 درجه تا ۴ درجه که از مدل ارتفاعی با گام ۵ دقیقه استفاده می‌شود. ۳- ناحیه دور دست: ناحیه با شعاع بزرگتر از ۴ درجه که از مدل رقومی جهانی با گام ۳۰ دقیقه استفاده می‌شود.

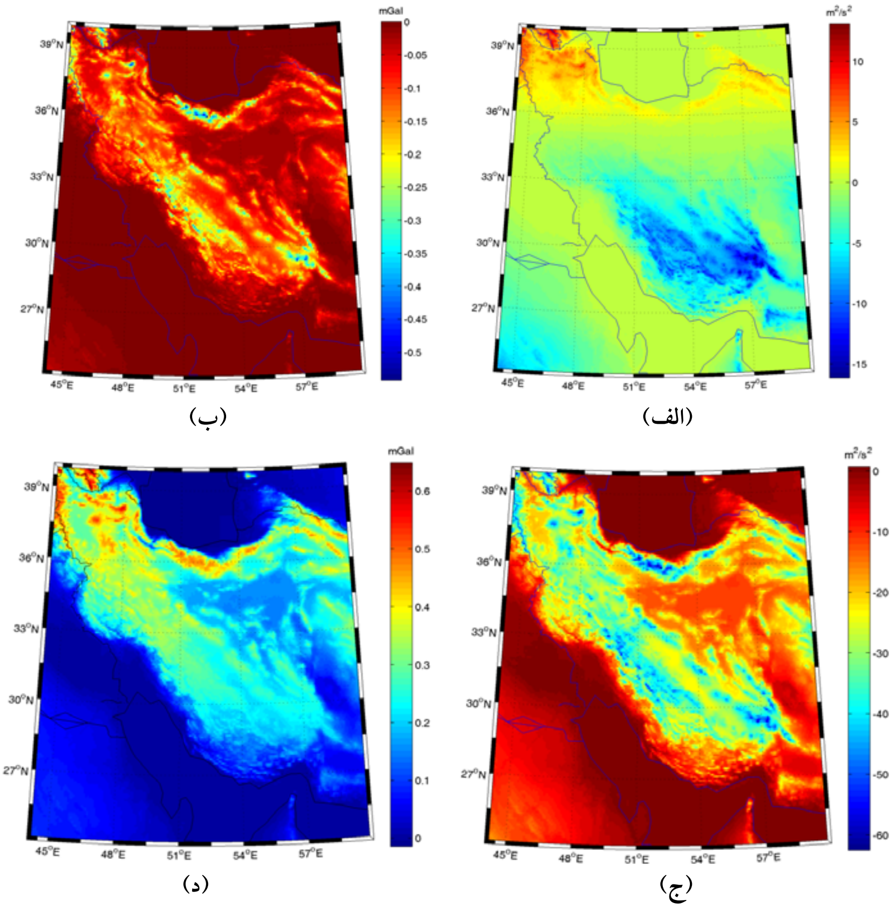
تفاوت بین دو تقریب بیضوی و کروی پتانسیل جاذبی توپوگرافی و گرادیان ارتفاعی آن در شکل‌های ۲-الف و ۲-ب آمده است. همچنین شکل‌های ۲-ج و ۲-د این اختلاف را برای توپوگرافی تحکیم شده نشان می‌دهند. بر این اساس به‌مثابه اولین نتیجه می‌توان دید که تفاوت‌ها وابسته به شدت توپوگرافی است. لذا می‌توان انتظار داشت که در مناطق مسطح و دشت، اختلاف بین روابط کروی و بیضوی در مدل‌سازی اثرات توپوگرافی کمتر از دقت‌های موردنیاز در ژئودزی است.

جدول ۱. پارامترهای آماری تفاوت تقریب بیضوی و کروی پتانسیل جاذبی توپوگرافی و گرادیان ارتفاعی آن. واحد پتانسیل m^2s^{-2} و واحد گرادیان پتانسیل میلی‌گال می‌باشد.

	min	max	mean	STD
پتانسیل				
عبارت بوگه	-16.136	13.096	-1.341	3.204
ناحیه خیلی نزدیک	-0.032	0.023	0.000	0.002
ناحیه نزدیک	-1.008	0.879	-0.016	0.167
ناحیه دوردست	-52.075	39.051	-4.612	10.562
گرادیان پتانسیل				
عبارت بوگه	-0.542	0.000	-0.045	0.077
ناحیه خیلی نزدیک	-0.039	0.051	0.000	0.003
ناحیه نزدیک	-0.019	0040	0.001	0.003
ناحیه دوردست	-0.223	0.382	0.051	0.081

جدول ۲. پارامترهای آماری اختلاف تقریب بیضوی و کروی پتانسیل جاذبی توپوگرافی و گرادیان ارتفاعی آن. واحد پتانسیل m^2s^{-2} و واحد گرادیان پتانسیل میلی‌گال می‌باشد.

STD	Mean	max	min	
		پتانسیل		
17.867	-12.797	0.739	-62.497	عبارت بوگه
0.002	0.000	0.022	-0.032	ناحیه خیلی نزدیک
0.167	-0.016	0.879	-1.008	ناحیه نزدیک
10.563	-4.613	39.055	-52.083	ناحیه دوردست
		گرادیان پتانسیل		
0.189	0.135	0.648	-0.014	عبارت بوگه
0.008	0.000	0.099	-0.064	ناحیه خیلی نزدیک
0.006	0.001	0.068	-0.042	ناحیه نزدیک
0.083	0.051	0.405	-0.236	ناحیه دوردست



شکل ۲. (الف) تفاوت میان دو تقریب بیضوی و کروی برای پتانسیل جاذبی توپوگرافی، (ب) شتاب جاذبی توپوگرافی، (ج) پتانسیل جاذبی توپوگرافی تحکیم شده و (د) شتاب جاذبی توپوگرافی تحکیم شده.

برای بررسی بیشتر تفاوت‌ها باید سهم تفاوت‌های هر ناحیه و عبارت بوگه را جدا کرد. در جدول ۱ اختلاف دو تقریب بیضوی و کروی پتانسیل جاذبی توپوگرافی و گرادیان ارتفاعی آن در سه ناحیه خیلی نزدیک، نزدیک و دوردست آمده است. عددهای جدول ۲ تفاوت‌های فوق را برای توپوگرافی تحکیم شده نشان می‌دهد. باید اشاره کرد که وجود تفاوت‌ها با مقادیر صفر ناشی از گرد کردن و ناچیز بودن آنها است.

با جداسازی تفاوت‌ها به سه ناحیه می‌توان رفتار طیفی اثر بیضویت پتانسیل جاذبی توپوگرافی و گرادیان را بررسی کرد. براساس این نتایج همان‌طور که انتظار می‌رود سهم عمده اثر بیضویت (اختلاف تقریب بیضوی از کروی) در عبارت بوگه نهفته است. زیرا این عبارت قسمت عمده و اصلی میدان پتانسیل ناشی از توپوگرافی را ایجاد می‌کند. با توجه به اینکه در فواصل نزدیک مدل‌های صفحه‌ای، کروی و بیضوی توپوگرافی بسیار به هم نزدیک هستند، می‌توان انتظار داشت که تفاوت‌ها در مناطق دوردست بیشتر باشد. ازاین‌رو اثر بیضویت در مدل‌سازی اثرات توپوگرافی بیشتر از جنس طول موج‌های بلند است. لذا بعد از عبارت بوگه بیشتر اثر مربوط به اجرام توپوگرافی در مناطق دوردست است. این دو نکته به وضوح در جدول‌های ۱ و ۲ به چشم می‌خورد.

با توجه به کوچک بودن تفاوت‌ها در جدول‌های ۱ و ۲ روابط تقریب کروی برای بسیاری از کاربردهای آنها در مقیاس منطقه‌ای و جهانی کاملا کافی به نظر می‌رسد. فقط در تعیین محلی ژئویید (ژئویید با دقت سانتی‌متر) ممکن است به استفاده از تقریب بیضوی فقط در کوهستان‌ها نیاز باشد. البته قسمت عمده تفاوت‌ها در جدول‌های ۱ و ۲ ناشی از عبارت‌های بوگه است. ازآنجایی‌که در همه روش‌های تعیین ژئوئید ابتدا اثر توپوگرافی برداشته و سپس اضافه می‌شود؛ تغییر در عبارت‌های بوگه نتایج را دستخوش تغییرات نخواهند کرد. بااین‌حال چنانچه مطابق پیشنهاد مارتینک (۱۹۹۸) حد دقت ۱۰ میکروگال را برای تعیین ژئوئید دقیق بپذیریم؛ اِعمال تقریب بیضوی ضروری است.

مزیت استفاده از روابط بیضوی در مدل‌سازی توپوگرافی، استفاده از دستگاه مختصات بیضوی و تقریب نزدن روابط است. البته این بدان مفهوم نیست که روابط بیضوی در محاسبه اثرات توپوگرافی خطا ندارد. زیرا همواره به علت حل عددی انتگرال‌ها و ماهیت گسسته اطلاع ما از توپوگرافی، خطای گسسته‌سازی وجود دارد. بااین‌حال از نظر هندسی روابط بیضوی کامل‌اند و هیچ تقریبی ندارند. باوجوداین مزایا، روابط اثر توپوگرافی در دستگاه مختصات بیضوی پیچیده است و زمان محاسباتی بیشتری را صرف می‌کند.

۶ نتیجه گیری

در این مقاله روابط مربوط به اثرات توپوگرافی در سیستم مختصات گوسی ژئودتیکی ارائه و اختلاف مقادیر عددی آن با روابط مرسوم کروی ارائه شده است. نتایج عددی حاکی از کوچک بودن اثرات بیضویت توپوگرافی دارد. بطوری‌که در بیشتر کاربردهای منطقه ای مدل‌سازی میدان ثقل زمین، از جمله تعیین ژئوئید می‌توان با تقریب خوبی از روابط کروی سود برد. همچنین نشان داده شد که عمده اختلاف نتایج تقریب بیضوی و کروی اثرات توپوگرافی از جنس طول موج‌های بلند بوده و در ترم بوگه نهفته است.

مراجع

Ardalan, A. A., 1999, High resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000, based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity, Ph.D. thesis, University of Stuttgart.

Ardalan, A. A. and Safari, A., 2004, Ellipsoidal terrain correction based on multi-cylindrical

Geodesy, **78**, 691-706.

Ramsey, A. S., 1940, An introduction to the theory of Newtonian attraction, The University Press.

Sjöberg, L. E., 2004, The ellipsoidal corrections to the topographic geoid effects, Journal of Geodesy, **77**(12), 804-808.

Tenzer, R., Novac, P., Janak, J., Huang, J., Najafi-Almadari, M., Vajda, P. and Santos, M., 2003, A review of the UNB Stokes-Helmert approach for precise geoid determination, In Honoring The Academic Life Of Petr Vanicek M. Santos (Ed).

Vajda, P., Vanícek, P., Novák, P. and Meurers, B., 2004, On the evaluation of Newton integrals in geodetic coordinates: Exact formulation and spherical approximation, Contributions to Geophysics and Geodesy, **34**(4), 289-314.

Vanícek, P. and Krakiwsky, E. J., 1986, Geodesy, The Concepts, Elsevier Science, 697 p.

Vanícek, P., Novák, P. and Martinec, Z., 2001, Geoid, topography, and the Bouguer plate or shell, Journal of Geodesy, **75**(4), 210-215.

equal-area map projection of the reference ellipsoid, Journal of Geodesy, **78**(1), 114-123.

Heiskanen, W. H. and Moritz, H., 1967, Physical geodesy, San Francisco, W. H. Freeman and Co.

MacMillan, W. D., 1958, The theory of the potential, Dover Publications.

Makhloof, A. and Ilk, K.-H., 2008, Effects of topographic–isostatic masses on gravitational functionals at the Earth’s surface and at airborne and satellite altitudes, Journal of Geodesy, **82**(2), 93-111.

Martinec, Z., 1998, Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid, Heidelberg, Springer, Lecture Notes in Earth Sciences.

Martinec, Z., Vanicek, P., Mainville, A. and Veronneau, M., 1995, Evaluation of topographical effects in precise geoid computation from densely sampled heights, Journal of Geodesy, **20**, 193-203.

Novak, P. and Grafarend, E. W., 2005, The ellipsoidal representation of the topographical potential and its vertical gradient, Journal of