تحقیقات مالی
دانشکدۀ مدیریت دانشگاه تهران
دورۀ ۱۶، شمارۀ ۲
پاییز و زمستان ۱۳۹۳
ص. ۳۲۶- ۳۰۹

تخمین ارزش در معرض ریسک پرتفوی نفت و طلا با بهره‌مندی از روش کاپیولا- گارچ

سعید فلاح‌پور[1]، احسان احمدی[2]

چکیده: توابع کاپیولا ابزار قدرتمندی برای توصیف ساختار وابستگی متغیرهای تصادفی چندبعدی ارائه کرده‌اند و از جدیدترین ابزار مدیریت ریسک مالی به حساب می‌آیند. یکی از کاربردهای توابع کاپیولا در مدیریت ریسک، محاسبۀ ارزش در معرض ریسک (VaR) پرتفوی است که از پرکاربردترین معیارهای ریسک در نهادهای مالی به‌شمار می‌رود. هدف اصلی پژوهش حاضر محاسبۀ دقیق‌تر ریسک است. پژوهش پیش رو با ترکیب توابع کاپیولا و مدل‌های (GARCH)، از رویکردی با عنوان «کاپیولا- گارچ» برای محاسبۀ VaR پرتفوی متشکل از نفت خام و طلا و داده‌های سال‌های ۲۰۰۷ تا ۲۰۱۲، بهره برده است. در ادامه، نتایج به‌دست‌آمده از روش یادشده با نتایج روش‌های سنتی VaR مقایسه شدند. یافته‌های تجربی نشان می‌دهد روش کاپیولا- گارچ در مقایسه با روش‌های سنتی، ریسک پرتفوی را با دقت بیشتری محاسبه می‌کند.

***واژه‌های کلیدی:* ارزش در معرض ریسک، پرتفوی، کاپیولا، GARCH، GJR.**

۱. استادیار گروه مدیریت مالی و بیمه، دانشکدۀ مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران
۲. کارشناس‌ارشد مدیریت مالی، دانشکدۀ مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۲/۲٤
تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۳/۰۲/۳۱
نویسندۀ مسئول مقاله: احسان احمدی
E-mail: ehsanahmadi32@yahoo.com

مقدمه

بحران مالی سال ۲۰۰۸ بار دیگر اهمیت روش‌های مدیریت ریسک را برای ما مشخص کرد. بحران جهانی نشان داد روش‌های قدیمی اندازه‌گیری و مدیریت ریسک در بازارهای بین‌المللی پرنوسان قرن بیست‌ویکم کارایی چندانی ندارند. استفاده از معیارهای خوش‌بینانه در اندازه‌گیری ریسک و فرض‌هایی که در بازارهای پویای مالی بسیار ساده‌انگارانه است، درنهایت به زیان‌های شدید و خارج از انتظار شرکت‌ها منجر می‌شود (هوانگ، لی و لیانگ، ۲۰۰۹).

ریسک مفهوم نامتقارنی با نتایج مورد انتظار دارد. مفهوم عدم تقارن در ریسک بدین معناست که سرمایه‌گذاران به نتایج مطلوب و نامطلوب اهمیت یکسان نمی‌دهند. برای اندازه‌گیری ریسک معقولانه باید نگاه متفاوتی به نتایج مطلوب و نامطلوب کرد. با توجه به این حقیقت، در دهه‌های اخیر شاهد شکل‌گیری روند برجسته‌تری در اندازه‌گیری ریسک با استفاده از معیارهای چارکی، از زمان معرفی ارزش در معرض ریسک[1]، هستیم. در حال حاضر معیار VaR یکی از معیارهای استاندارد پذیرفته‌شده در صنعت خدمات مالی در دنیاست (هوتا، لوکاس و پارلو، ۲۰۰۸). با توجه به روند جهانی‌شدن بازارها و ارتباط هرچه بیشتر آنها با یکدیگر، استفاده از معیارهای استاندارد ریسک برای شرکت‌های ایرانی ضروری به نظر می‌رسد.

توابع کاپیولا[2] ابزار قدرتمندی هستند که به شرکت‌ها اجازه می‌دهند ساختار وابستگی[3] بین اجزای مختلف پرتفوی را مدل‌سازی کنند. مدارک و مستندات فراوانی وجود دارد که نشان می‌دهد بسیاری از متغیرهای اقتصادی توزیع نرمال ندارند و توزیع آنها نسبت به توزیع نرمال دنبالهٔ پهن‌تری[4] دارند. زمانی که توزیع بازدهی‌ها نرمال نیست، ضریب همبستگی خطی دیگر برای بیان ساختار وابستگی معیار مناسبی نیست. در این پژوهش از توابع کاپیولا به‌منزلهٔ معیار جایگزین برای مدل‌سازی ساختار وابستگی استفاده شده است.

مدل‌های ناهمسانی واریانس در تحلیل سری‌های زمانی مالی، به‌ویژه زمانی که هدف تجزیه‌وتحلیل و تخمین واریانس است، جایگاه خود را پیدا کرده‌اند. اولین‌بار مشاهده شد که هرچند بسیاری از سری‌های زمانی مالی قابل پیش‌بینی نیستند، خوشه‌بندی شایان توجهی در نوسانات[5] آنها وجود دارد؛ به این معنا که نوسانات بزرگ به‌دنبال نوسانات بزرگ و نوسانات کوچک به‌دنبال نوسانات کوچک رخ می‌دهند. به این پدیده ناهمسانی شرطی گفته می‌شود؛ زیرا

1. Value at Risk (VaR)
2. Copula Functions
3. Dependence Structure
4. Fat Tail
5. Volatility Clustering

فرض می‌شود سری زمانی در حالت کلی ماناست، ولی واریانس مورد انتظار شرطی آن بـا زمـان تغییر می‌کند (انگل، ١٩٨٢).

پیشینهٔ پژوهش

مدارک و مستندات فراوانی نشان می‌دهد بسیاری از متغیرهای اقتصادی توزیـع نرمـال ندارنـد و تاریخچهٔ آنها به مطالعات میلز (١٩٢٧) بازمی‌گردد. ازجمله مـواردی کـه نشـان مـی‌دهـد توزیـع تک‌متغیرهٔ بسیاری از متغیرهای اقتصادی نرمال نیست، کشیدگی بـیش از حـد و چـولگی اسـت. مطالعات اخیر حتی نشان داده است توزیع‌های چندمتغیره هم نرمال نیستند که در اصطلاح گفتـه می‌شود وابستگی نامتقارن دارند.

مدل‌سازی وابستگی یکی از عوامل کلیـدی در تشـکیل پرتفـوی و مـدیریت ریسـک اسـت. انتخاب مدل نامناسب به انتخاب پرتفوی غیربهینه و اندازه‌گیری نادرست ریسک منجر می‌شـود. به‌طور سنتی، از ضریب همبستگی برای توضیح وابستگی بین متغیرها استفاده شـده اسـت، ولـی پژوهش‌های اخیر نشان‌دهندهٔ برتری کاپیولاها برای مـدل‌سـازی وابسـتگی اسـت. بـرای مثـال می‌توان به کارهای امبرچست، مک‌نیل و استرامن (٢٠٠٢) اشاره کرد. ضریب همبسـتگی خطـی نقص عمده‌ای دارد، اینکه تحت تبدیل غیرخطی ناوردا نیست[1]؛ درحالی‌که معیارهای وابستگی که از کاپیولاها استنتاج می‌شوند، می‌توانند بر این مشکل غلبه کنند و کاربرد وسیع‌تری دارند.

اولین‌بار اسکلار (١٩٥٩) پیشنهاد کرد که به‌منظـور انـدازه‌گیـری وابسـتگی غیـرخطـی بـین متغیرها، از کاپیولا استفاده شود. تئوری اسکلار نشان می‌دهد چگونه می‌تـوان یـک تـابع توزیـع مشترک را به توابع حاشیه‌ای افراز کرد و سپس با بهره‌مندی از تابع کاپیولا به مدل‌سازی ساختار وابستگی پرداخت. کاپیولای شرطی را اولـین‌بـار پـاتون (٢٠٠١) معرفـی کـرد. گـوبرگ و ورکـر (٢٠٠٥) و همچنین هامرل و راوسچ (٢٠٠٥) کاربرد کاپیولا را در قیمت‌گـذاری اختیارهـا بررسـی کردند. منگادزو و وکچیاتو (٢٠٠۴) برای بررسی ریسک اعتباری، و نسلهوا، امبرچسـت و دمـولین (٢٠٠۶) برای بررسی ریسک عملیاتی بانک‌ها، از کاپیولا بهره بردند.

دنگ و یانگ (٢٠١١) کاربرد کاپیولا را در بهینه‌سازی بررسی کردند. پارلو و هوتا (٢٠٠۶) بـا به‌کارگیری مدل‌های ترکیبی کاپیولای شرطی و GARCH چندمتغیره، VaR پرتفـوی متشـکل از شاخص‌های S&P ۵٠٠ و NASDAQ را محاسبه کردند. هوانگ و همکاران (٢٠٠٩) از روش کاپیولا ـ گارچ VaR پرتفوی شاخص‌های NASDAQ و TAIEX را محاسبه کردند.

---

1. Invariant

در ایران هنوز پژوهشی درخصوص تخمین ارزش در معرض ریسک پرتفوی نفت و طلا با استفاده از روش کاپیولاـ گارچ، اجرا نشده است.

روش‌شناسی پژوهش

این پژوهش از نظر هدف کاربردی است و با تشکیل پرتفوی متشکل از نفت خام و طلا به‌دنبال پاسخ این پرسش است که آیا روش کاپیولاـ گارچ ریسک پرتفوی را نسبت به روش‌های دیگر، دقیق‌تر مقایسه می‌کند یا خیر؟

مدل توزیع حاشیه‌ای

مدل‌های در نظر گرفته‌شده برای توزیع‌های حاشیه‌ای در این پژوهش، برمبنای مدل‌های GARCH و GJR است که پسماندهای استانداردشده توزیع نرمال یا تی‌ـ استیودنت دارند.

مدل GARCH-n و GARCH-t

اگر سری زمانی بازدهی پرتفوی را با نماد $\{X_t\}t = ۱, \dots, T$ نشان دهیم، فرض می‌شود که GARCH (۱۱,۱۱) با پسماندهای استانداردشده دارای توزیع نرمال (GARCH-n) یا توزیع تی‌ـ استیودنت استانداردشده (GARCH-t) است که به این صورت نمایش داده می‌شود:

رابطهٔ ۱)

$$x_t = \mu + a_t$$
$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$
$$\varepsilon_t \sim N(0,1) \; or \; \varepsilon_t \sim t_d$$

در اینجا $\mu = E(x_t) = E\big(E(x_t|\Omega_{t-۱})\big) = E\big(\mu_t\big)$ میانگین غیرشرطی سری زمانی است و $\sigma_t^۲ = var(x_t|\Omega_{t-۱}) = var(a_t|\Omega_{t-۱})$ واریانس شرطی توزیع است. محدودیت‌های مدل عبارت‌اند از $\alpha_. > ۰$، $\alpha_۱ \geq ۰$، $\beta \geq ۰$، $\alpha_۱ + \beta < ۱$ و $\Omega_{t-۱}$ مجموعهٔ اطلاعاتی ما در زمان $t-۱$ است. در زمانی که فرض می‌شود توزیع پسماندها نرمال است، شرط $\alpha_۱ + \beta < ۱$، شرط کافی برای ماناندن واریانس است و ایجاب می‌کند که واریانس غیرشرطی a_t معین باشد؛ درحالی‌که واریانس شرطی آن با زمان تغییر می‌کند. در مورد غیرنرمال، شرط مدل به این صورت است $\alpha_۱ var(\varepsilon_t) + \beta < ۱$، به‌علاوه در این مدل d درجهٔ آزادی توزیع

است. ما در این پژوهش از روش بیشترین درست‌نمایی[1] برای تخمین پارامترهای مدل استفاده می‌کنیم. اگر مجموعهٔ اطلاعاتی را به این صورت تعریف کنیم $\Omega_{t-۱} = \{a_{۰}, a_{۱}, \dots, a_{t-۱}\}$، تابع چگالی مشترک را می‌توان به‌صورت رابطهٔ ۲ نمایش داد:

رابطهٔ ۲)
$$f(a_1, \dots, a_t) = f(a_t|\Omega_{t-1})f(a_{t-1}|\Omega_{t-2}) \dots f(a_1|\Omega_0)f(a_0)$$

با استفاده از داده‌های $a_{۱}, a_{۲}, \dots, a_t$ تابع لگاریتم درست‌نمایی به‌صورت رابطهٔ ۳ نوشته می‌شود:

رابطهٔ ۳)
$$LLF = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{n-k}|\Omega_{n-k-1})$$

تابع بالا را می‌توان برای هر نوع توزیع در نظر گرفته‌شده برای ε_t ها محاسبه کرد. می‌توان به‌کمک روش‌های عددی، مقدار LLF را حداکثر کرد و مقادیر تابع درست‌نمایی را به‌دست آورد. با استفاده از داده‌های $(x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_t)$، می‌توان توزیع حاشیه‌ای شرطی[2] را در قالب رابطهٔ ۴ تعریف کرد:

رابطهٔ ۴)
$$p(X_{t+1} \leq x|\Omega_t) = p(a_{t+1} \leq (x-\mu)|\Omega_t)$$
$$= p\left(\varepsilon_{t+1} \leq \frac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta\sigma_t^2}}\middle|\Omega_t\right)$$
$$= \begin{cases} N\left(\dfrac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta\sigma_t^2}}\middle|\Omega_t\right) if\ \varepsilon \sim N(0,1) \\ t_d\left(\dfrac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta\sigma_t^2}}\middle|\Omega_t\right) if\ \varepsilon \sim t_d \end{cases}$$

مدل GJR-n و GJR-t

در مدل GJR معادلهٔ میانگین و واریانس به‌صورت رابطهٔ ۵ است که در اینجا GJR-n یعنی مدلی که پسماندی با توزیع نرمال دارد و GJR-t یعنی مدلی است که پسماندی با توزیع تی-استیودنت دارد:

1. Maximum Likelihood Method
2. Conditional Marginal Distribution

رابطهٔ ۵)

$$x_t = \mu + a_t$$
$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma s_{t-1} a_{t-1}^2$$
$$\varepsilon_t \sim N(0,1) \ or \ \varepsilon_t \sim t_d$$
$$s_{t-1} = \begin{cases} 1, a_{t-1} < 0 \\ 0, a_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

در اینجـــا $\alpha_. > ۰$، $\alpha_۱ \geq ۰$، $\beta \geq ۰$، $\alpha_۱ + \beta + \frac{۱}{۲}\gamma < ۱$، $\gamma \geq ۰$ و $s_{t-۱}$ یــک متغیــر مجازی است. زمانی که ضریب γ مثبـت باشـد، معنـای آن ایـن اسـت کـه شـوک‌هـای منفـی ($\varepsilon < ۰$) نوسانات بیشتری از شوک‌های مثبت در دورهٔ بعد ایجـاد مـی‌کننـد. توزیـع حاشـیه‌ای شرطی $X_{t+۱}$ نیز شبیه روش GARCH به‌صورت زیر است:

رابطهٔ ۶)

$$p(X_{t+1} \leq x|\Omega_t) = p\left(\varepsilon_{t+1} \leq \frac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta\sigma_t^2 + \gamma s_t a_t^2}}\middle|\Omega_t\right)$$
$$= \begin{cases} N\left(\frac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta\sigma_t^2 + \gamma s_t a_t^2}}\middle|\Omega_t\right) if \ \varepsilon \sim N(0,1) \\ t_d\left(\frac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta\sigma_t^2 + \gamma s_t a_t^2}}\middle|\Omega_t\right) if \ \varepsilon \sim t_d \end{cases}$$

تئوری کاپیولا

در ادبیات آماری مفهوم کـاپیولا در اوایـل قـرن نـوزدهم مـیلادی در زمینـهٔ بحـث درخصـوص توزیع‌های چندمتغیره غیرنرمال پدیدار شد. کارهای جدید درخصوص توابع کـاپیولا بـه ۴۰ سـال قبل، زمانی که اسکلار (۱۹۵۹) چندی از ویژگی‌ها و خصوصیات بنیادی کاپیولا را تعریـف کـرد، بازمی‌گردد.

تئوری اسکلار

اگر F را یک تابع توزیع n بعدی با توابع حاشیه‌ای $F_۱, F_۲, \ldots, F_n$ در نظر بگیریم، یـک کـاپیولا برای تمامی مقادیر واقعی $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ وجود دارد؛ به‌گونه‌ای که:

رابطهٔ ۷)

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$$
$$= C\big(p(X_1 \leq x_1), p(X_2 \leq x_2), \ldots, p(X_n \leq x_n)\big)$$
$$= C\big(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)\big)$$

زمانی که متغیرها پیوسته باشند، تئوری اسکلار نشان می‌دهد هر تابع توزیع احتمال چندمتغیره را می‌توان به‌صورت تابع توزیع حاشیه‌ای و ساختار وابستگی نشان داد:

رابطهٔ ۸)

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{\partial F(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}$$

$$=\frac{\partial C(u_1,u_2,\dots,u_n)}{\partial u_1\partial u_2\dots\partial u_n}\times\prod_i\frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i}$$

$$=c(\tilde{u})\times\prod_i f_i(x_i)$$

که در اینجا f_i تابع چگالی F_i است و $u_i=F_i(x_i)$ برای تمام $i=۱,۲,\dots,n$ تعریف می‌شود. همچنین $\tilde{u}=(u_۱,u_۲,\dots,u_n)$ و $c(\tilde{u})$ تابع چگالی کاپیولا است.

انواع توابع کاپیولا

توابع کاپیولا که در این پژوهش استفاده می‌کنیم عبارت‌اند از نرمال، تی- استیودنت و خانوادهٔ کاپیولاهای ارشمیدسی[1] از قبیل فرانک، گامبل و کلیتون. خانوادهٔ کاپیولای ارشمیدسی را لینگ (۱۹۶۵) معرفی کرد. مهم‌ترین ویژگی کاپیولاهای ارشمیدسی این است که از نوع کاپیولای بیضی[2] نیستند و اجازه می‌دهند انواع مختلفی از ساختارهای وابستگی را مدل‌سازی کنیم. پنج کاپیولای استفاده‌شده در این پژوهش به‌ترتیب در زیر توضیح داده می‌شود.

کاپیولای نرمال

ابتدا $u_i=F_i(x_i)$ تعریف می‌کنیم. کاپیولای نرمال از توابع کاپیولا با توزیع نرمال چندمتغیره است که به این صورت تعریف می‌شود:

رابطهٔ ۹)

$$C_{Gaussian}(u_1,u_2;\varrho)=\Phi_\varrho\big(\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-2}(u_2)\big)$$

در این معادله Φ_ϱ معرف توزیع مشترک یک تابع توزیع نرمال چندبعدی با ضریب همبستگی خطی ϱ و Φ توزیع نرمال استاندارد است.

1. Archimedean Copulas
2. Elliptical

کاپیولای تی‌ـ استیودنت

کاپیولای تی‌ـ استیودنت نیز مانند کاپیولای نرمال، برمبنای تابع توزیع تی‌ـ استیودنت چندمتغیره است. این کاپیولا در قالب رابطهٔ ۱۰ تعریف می‌شود:

$$C_T(u_1,u_2;\varrho,d)=t_{d,\varrho}\left(t_d^{-1}(u_1),t_d^{-1}(u_2)\right) \qquad \text{(رابطهٔ ۱۰)}$$

چون با تغییر درجهٔ آزادی می‌توان درجهٔ وابستگی دنبالهٔ توزیع را تغییر داد، از کاپیولای تی‌ـ استیودنت در عمل بیشتر استفاده می‌شود.

کاپیولای فرانک

خانوادهٔ کاپیولاهای فرانک توسط جنست (۱۹۸۷) معرفی شدند. کاپیولای فرانک به این صورت تعریف می‌شوند:

$$C_{Frank}(u_1,u_2;\lambda)=\frac{-1}{\lambda}\log\left(\frac{\lambda\left(1-e^{-\lambda}\right)-\left(1-e^{-\lambda u_1}\right)\left(1-e^{-\lambda u_2}\right)}{1-e^{-\lambda}}\right) \qquad \text{(رابطهٔ ۱۱)}$$

$$\lambda\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

کاپیولای گامبل

کاپیولای گامبل در سال ۱۹۶۰ توسط گامبل معرفی شد. تابع توزیع تجمعی آن به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$C_{Gumbel}(u_1,u_2;\delta)=\exp\left(-\left((-logu_1)^{\delta}+(-logu_2)^{\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) \qquad \text{(رابطهٔ ۱۲)}$$

$$\delta\in[0,+\infty)$$

کاپیولای کلیتون

کاپیولای کلیتون را اولین‌بار کلیتون (۱۹۸۷) معرفی کرد. تابع توزیع تجمعی آن به این صورت است:

$$C_{Clayton}(u_1,u_2;\omega)=(u_1^{-\omega}+u_2^{-\omega})^{\frac{1}{\omega}} \qquad \text{(رابطهٔ ۱۳)}$$

$$\omega\in[-1,+\infty)$$

روش تخمین پارامترهای توابع کاپیولا

برای تخمین پارامترهای تابع کاپیولا از روش بیشترین درست‌نمایی استفاده می‌کنیم.

ارزش در معرض ریسک

VaR یک پرتفوی در زمان t (بازه زمانی Δt تا t) در سطح اطمینان $(1-\alpha)$ در جایی که $\alpha \in (0,1)$، به این صورت تعریف می‌شود:

$$p\left(X_{p,t} \leq VaR_t(\alpha) \middle| \Omega_{t-1}\right) = \alpha$$ رابطهٔ ۱۴)

یعنی با احتمال $(1-\alpha)$۱۰۰ درصد مطمئن هستیم که زیان پرتفوی ما در بازهٔ زمانی Δt از VaR بیشتر نمی‌شود.

پرتفوی استفاده‌شده در این پژوهش متشکل از نفت خام و طلاست. اوزان دارایی‌های این پرتفوی مساوی در نظر گرفته شده است، ولی نتایج به‌دست‌آمده با تغییر وزن دارایی‌ها تغییر نمی‌کنند.

مدل کاپیولاـ گارچ

برای تخمین VaR در این روش باید دو مدل برای توزیع حاشیه‌ای و یک مدل برای کاپیولا تخمین بزنیم. مدل‌هایی که برای توزیع‌های حاشیه‌ای در نظر می‌گیریم باید نشان‌دهندهٔ ویژگی‌های توزیع‌های حاشیه‌ای باشند. توزیع‌های حاشیه‌ای در این پژوهش با استفاده از مدل‌های ناهمسانی واریانس مدل‌سازی شده‌اند. ما ابتدا داده‌ها را به دو گروه طبقه‌بندی می‌کنیم. گروه اول داده‌های درون‌نمونه‌ای هستند و گروه دوم داده‌های برون‌نمونه‌ای. ابتدا با استفاده از هزار مشاهدهٔ اول، توزیع‌های حاشیه‌ای را به‌دست می‌آوریم. سپس با استفاده از پسماندهای استانداردشده توزیع‌های حاشیه‌ای، پارامترهای تابع کاپیولا را به‌دست می‌آوریم. درنهایت برای هر روز با استفاده از تابع کاپیولای تخمین‌زده‌شده، ۱۰ هزار بازدهی شبیه‌سازی و VaR پرتفوی را محاسبه می‌کنیم. عدد به‌دست‌آمده VaR پرتفوی در روز ۱۰۰۱ است. این عمل را تا انتهای داده‌ها تکرار می‌کنیم تا سری زمانی VaR های برآوردشده را به‌دست آوریم.

روش‌های سنتی محاسبهٔ VaR

برای مقایسهٔ عملکرد روش کاپیولاـ گارچ، VaR پرتفوی را با استفاده از روش‌های سنتی مختلفی مانند روش شبیه‌سازی تاریخی، روش واریانس‌ـ کوواریانس، روش میانگین موزون متحرک‌نمایی[1] و رویکرد دارایی نرمال[2]، محاسبه می‌کنیم.

---
1. Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)
2. Asset-Normal Approach

روش شبیه‌سازی تاریخی فرض می‌کند توزیع بازدهی‌ها دوباره تکرار می‌شوند. در این روش با استفاده از بازدهی‌های تاریخی VaR پرتفوی محاسبه می‌شود. روش واریانس- کوواریانس فرض می‌کند توزیع بازدهی‌ها نرمال است و VaR پرتفوی به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{p,t}^2 = (w_1 w_2) \times \begin{pmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{12,t} & \sigma_{2,t}^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$ رابطهٔ ۱۵)

$$VaR_{p,t}(\alpha) = \sigma_{p,t} \times Z_\alpha + U_{p,t}$$

در اینجا $\sigma_{p,t}$ و $U_{p,t}$ به‌ترتیب انحراف معیار و میانگین بازدهی پرتفوی در زمان t و Z_α معرف معکوس تابع توزیع نرمال استانداردشده با احتمال α است.

در روش EWMA واریانس پرتفوی در زمان t را به‌کمک انحراف معیار و بازدهی پرتفوی به این صورت محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_{p,t|t-1}^2 = (1-\lambda) x_{p,t-1}^2 + \lambda \sigma_{p,t-1|t-2}^2$$ رابطهٔ ۱۶)

مقدار λ به توصیهٔ RiskMetrics، ۹۴ درصد در این پژوهش در نظر گرفته شده است. بعد از اینکه برای تمام روزها انحراف معیار پرتفوی را محاسبه شد، VaR پرتفوی مانند روش واریانس کوواریانس محاسبه می‌شود.

در رویکرد دارایی نرمال، مدل‌های GARCH و GJR را به‌صورت مستقیم برای بازدهی پرتفوی محاسبه می‌کنیم و پس از برآورد مدل و تخمین واریانس پرتفوی در زمان t، VaR پرتفوی به‌صورت رابطهٔ ۱۷ محاسبه می‌شود:

$$VaR_{p,t}(\alpha)\big|\Omega_{t-1} = \left(\sigma_{p,t} \times Z_\alpha + U_t\right)\big|\Omega_{t-1}$$ رابطهٔ ۱۷)

یافته‌های پژوهش

داده‌ها

هدف این پژوهش بررسی عملکرد روش کاپیولا- گارچ برای تاریخ دوم ژانویه ۲۰۰۷ تا ۲۳ اکتبر ۲۰۱۲ است که درمجموع شامل ۱۴۳۸ قیمت- مشاهدهٔ روزانه است. داده‌های این پژوهش با مراجعه به پایگاه اینترنتی اوپک و سایت یو.اس.آ. گلد[1] جمع‌آوری شده است. همچنین نرم‌افزارهای استفاده‌شده در این پژوهش عبارت‌اند از نرم‌افزار Excel به‌منظور تلخیص داده‌ها و نرم‌افزار Matlab به‌منظور انجام محاسبات پژوهش. برای از بین بردن همبستگی کاذب تنها

1. www.usagold.com

مشاهدات روزهایی که برای هر دو دارایی مظنهٔ قیمت وجود داشته، استفاده شده است. برای مشاهدات این پژوهش از بازدهی لگاریتمی استفاده می‌شود.

در جدول ۱ ویژگی داده‌ها نشان داده شده است. به‌منظور بررسی خوشه‌ای‌بودن مشاهدات از آزمون تأثیرات آرچ[1] استفاده می‌شود. نتایج آزمون تأثیرات آرچ (جدول ۱)، نشان می‌دهد اثر آرچ در هر دو سری زمانی وجود دارد. به‌علاوه کشیدگی هر دو سری زیاد است که نشان می‌دهد توزیع بازدهی دارایی‌ها دنبالهٔ پهن‌تری از توزیع نرمال دارند.

جدول‌های ۲ و ۳ نتایج مدل‌های GARCH-n، GARCH-t، GJR-n و GJR-t را نشان می‌دهند. نتایج آزمون لیونگ‌ـ باکس[2] بر پسماندهای مدل‌های حاشیه‌ای تخمین‌زده‌شده نشان می‌دهد فرضیهٔ صفر مبنی بر نبود خودهمبستگی در وقفه‌های ۱، ۳، ۵ و ۷ در سطح معناداری ۵ درصد رد نمی‌شود. همچنین آزمون تأثیرات آرچ بر توان دوم پسماندها در وقفه‌های ۴، ۶، ۸ و ۱۰ اجرا شده است و در سطح معناداری ۵ درصد فرضیهٔ صفر رد نمی‌شود. جدول‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند مدل‌های حاشیه‌ای عملکرد خوبی دارند.

جدول ۱. آمار توصیفی داده‌های پژوهش

	نفت		طلا	
تعداد نمونه	۱۴۷۳		۱۴۷۳	
میانگین	۰/۰۰۰۴۲		۰/۰۰۰۶۸	
انحراف معیار	۰/۰۲۳۴۷		۰/۰۱۴۰۱	
چولگی	۰/۰۱۴۴۲		−۰/۳۰۱۰۴	
کشیدگی	۶/۴۷۹۹۳		۵/۱۶۵۱۷	
آزمون آرچ	**Q-statistics**	**P-value**	**Q-statistics**	**P-value**
LM(۴)	۸۵/۱۵۳۱۳	۰	۵۳/۵۷۶۳۴	۰
LM(۶)	۹۳/۱۵۹۷۴	۰	۷۷/۰۰۳۲۹	۰
LM(۸)	۱۰۳/۰۲۱۶	۰	۸۱/۰۹۵۴۳	۰
LM(۱۰)	۱۱۴/۴۱۶۶	۰	۸۸/۶۶۵۲۵	۰

1. ARCH Test
2. Ljung-Box Test

جدول ۲. نتایج مدل حاشیه‌ای GARCH

	GARCH-n				GARCH-t			
	نفت		طلا		نفت		طلا	
پارامتر	مقدار	انحراف معیار	مقدار	انحراف معیار	مقدار	انحراف معیار	مقدار	انحراف معیار
μ	۰/۰۰۱۱۲۲۴	۰/۰۰۰۴۹۸	۰/۰۰۰۷۸۴۲	۰/۰۰۰۲۸۸۴	۰/۰۰۱۲۵۰۲	۰/۰۰۰۴۷۶۷	۰/۰۰۱۰۲۲۳	۰۰۰۲۸۲۴
α_0	۰/۰۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۱
α_1	۰/۹۴۵۹۳۶۷	۰/۰۱۰۳۲۷۳	۰/۹۳۱۸۸۵۸	۰/۰۰۸۹۵۰۷	۰/۹۵۱۴۸۳۹	۰/۰۱۱۹۰۴	۰/۹۳۵۰۳۴۷	۰/۰۱۴۴۳۱۴
β	۰/۰۴۶۸۹۵۷	۰/۰۰۹۱۲۲	۰/۰۶۱۵۸۰۱	۰/۰۰۷۷۴۳۳	۰/۰۴۱۴۶۷۷	۰/۰۱۰۲۴۶۸	۰/۰۵۳۴۷۸۵	۰/۰۱۲۵۱۷۳
d					۷/۸۴۸۱۶۸۸	۱/۵۵۲۹۰۱۶	۶/۱۱۱۹۵۵۸	۰/۸۹۷۸۱۶۷
LLF	۳۵۵۱		۴۲۵۴		۳۵۷۱		۴۲۹۹	
AIC	-۷۰۹۴		-۸۱۰۱		-۷۱۳۳		-۸۵۸۸	
BIC	-۷۰۷۲		-۸۴۴۰		-۷۱۰۶		-۸۵۶۱	
وقفه	P-value	Q-stat	P-value	Q-stat	P-value	Q-stat	P-value	Q-stat
آزمون الجانگ-باکس								
QW(۱)	۰/۱۰۹۹۸۵	۲/۵۵۴۴۳۹	۰/۲۷۱۴۱۲	۱/۲۰۹۵۹۵	۰/۱۱۶۷۲۱	۲/۴۶۰۷۸۱	۰/۲۲۷۲۰۶	۱/۴۵۸۲۷
QW(۳)	۰/۴۴۳۲۲	۲/۶۸۲۴۳۹	۰/۶۷۴۲۸۸	۱/۵۳۴۶۸۹	۰/۴۵۹۸۱	۲/۵۸۶۷۹۳	۰/۶۲۹۲۹۶	۱/۷۳۴۴۸
QW(۵)	۰/۶۴۷۴۱۶	۳/۳۴۲۰۱۳	۰/۵۲۸۵۲۹	۱۴۶۴۵۴۴	۰/۶۶۶۱۴۹	۳/۲۱۹۷۴۷	۰/۴۹۹۱۹۴	۴/۳۵۷۳۴۵
QW(۷)	۰/۴۷۰۶۱۸	۶/۶۰۹۶۸	۰/۲۳۶۹۳۹	۹/۲۲۴۴۸	۰/۴۷۸۰۸۱	۶/۵۴۱۸۹۶	۰/۲۲۶۹۶۳	۹/۳۷۳۱۵۹
آزمون آرچ								
LM(۴)	۰/۷۰۰۴۵	۲/۱۹۲۴۴	۰/۵۰۶۳۶	۳/۳۱۶۲۳	۰/۷۳۲۴۷	۲/۰۱۷۸۹	۰/۵۷۶۳۵	۲/۸۹۰۲۹
LM(۶)	۰/۸۵۲۸۶	۲/۶۳۶۷۳	۰/۷۶۹۶۵	۳/۳۰۵۴۴	۰/۸۸۵۶۸	۲/۳۴۲۳۴	۰/۸۱۱۲۱	۲/۹۸۱۱۵
LM(۸)	۰/۹۴۹۰۱	۲/۷۵۰۸۸	۰/۸۸۲۹۹	۳/۷۰۱۶۶	۰/۹۶۸۲	۲/۲۵۳۷۴	۰/۹۱۲۹	۳/۳۱۷۲۲
LM(۱۰)	۰/۹۷۸۸۲	۳/۱۰۵۸۱	۰/۹۵۹۶۹	۳/۷۰۴۵۶	۰/۹۸۵۰۱	۲/۸۳۶۷۴	۰/۹۷۲۳۱	۳/۳۳۸۰۵

جدول ۳. نتایج مدل حاشیه‌ای JGR

	GJR-n				GJR-t			
	نفت		طلا		نفت		طلا	
پارامتر	مقدار	انحراف معیار	مقدار	انحراف معیار	مقدار	انحراف معیار	مقدار	انحراف معیار
μ	۰/۰۰۰۷۷۰۹	۰/۰۰۰۴۹۴۸	۰/۰۰۰۹۷۸	۰/۰۰۰۳۰۱	۰/۰۰۱۰۴۴۹	۰/۰۰۰۴۷۸۸	۰/۰۰۱۱۶۷	۰۰۰۳۰۱
$\alpha_.$	۰/۰۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۱
$\alpha_۱$	۰/۹۴۴۱۳۵	۰/۰۰۹۶۶۳۴	۹۳۷۸۶۱۵	۰/۰۰۸۱۷۹۱	۰/۹۵۲۴۷۵	۰/۰۱۰۸۷۱۳	۰/۹۳۸۸۹۰۶	۰/۰۰۸۱۷۹۱
β	۰/۰۱۱۳۲۷۲	۰/۰۰۹۱۹۰۶	۰/۰۸۴۳۹۷۸	۰/۰۱۰۷۷۱۷	۰/۰۱۰۳۱۷۵	۰/۰۱۰۶۳۷۱	۰/۰۸۳۴۳۵۴	۰/۰۱۰۷۷۱۷
d	۰/۰۶۵۹۸۲۱	۰/۰۱۴۱۱۷۹	۰/۴۷۹۸۰۸-	۰/۰۹۹۶۳۶	۰/۰۵۴۲۴۶۸	۰/۰۱۶۱۶۸۳	۰/۰۵۵۸۶۷۸-	۰/۰۰۹۹۶۳۶
μ					۸/۵۴۶۷۳۹۲	۱/۸۱۳۱۲۰۴	۶/۱۸۸۵۲۷۹	۰/۹۱۱۱۱۱
LLF	۳۵۶۱		۴۲۶۰		۳۵۷۸		۴۳۰۳	
AIC	-۷۱۱۲		-۸۵۱۰		-۷۱۴۴		-۸۵۹۵	
BIC	-۷۰۸۶		-۸۴۸۴		-۷۱۱۲		-۸۵۶۴	
وقفه	P-value	Q-stat	P-value	Q-stat	P-value	Q-stat	P-value	Q-stat
آزمون الجانگ-باکس								
QW(۱)	۰/۱۱۹۳۶	۲/۴۲۵۷۵	۰/۲۰۶۷۹	۰/۲۳۹۳۱	۰/۱۲۸۶۸	۲/۳۰۸۳۶	۰/۱۷۶۵۲	۱/۸۲۶۶۹
QW(۳)	۰/۴۸۸۸	۲/۴۲۶۰۶	۰/۵۹۶۱	۱/۸۸۷۴	۰/۵۱۰۰۵	۲/۳۱۲۹۴	۰/۵۶۰۸۲	۲/۰۵۶۲۳
QW(۵)	۰/۶۸۹۱	۳/۰۷۰۶۵	۰/۵۰۸۰۷	۴/۲۹۲۸۴	۰/۷۱۶۷۲	۲/۸۹۱۴۱	۰/۴۹۹۹۶	۴/۳۵۱۷۵
QW(۷)	۰/۴۶۳۲۹	۶/۶۷۶۷۵	۰/۲۳۹۳۱	۹/۱۸۹۸۳	۰/۴۷۳۶۸	۶/۵۸۱۷۶	۰/۲۵۲۸۵	۸/۹۹۷۲۶
آزمون آرچ								
LM(۴)	۰/۶۷۶۷۵	۳/۰۶۶۵۹	۰/۲۰۶۹۱	۵/۸۶۳۱۲	۰/۶۱۲۳۳	۲/۶۸۲۲۴	۰/۱۲۸۲۳	۷/۱۴۸۸۷
LM(۶)	۰/۷۲۴۷۴	۳/۶۴۳۸۷	۰/۴۲۹۷۲	۵/۹۴۲	۰/۷۹۹۴۸	۳/۰۷۱۸۵	۰/۲۶۰۲۱	۷/۷۰۹۰۳
LM(۸)	۰/۸۳۱۵۸	۴/۲۷۴۱۴	۰/۵۷۸۵۴	۶/۵۹۱۶۵	۰/۹۱۱۳۶	۳/۳۳۸۵	۰/۳۰۳۱۲	۸/۴۳۴۶۹
LM(۱۰)	۰/۹۱۸۷۷	۴/۵۵۶۴۹	۰/۷۶۳۳۵	۶/۶۱۶۲۵	۰/۹۵۹۵۹	۳/۷۰۷۱۴	۰/۵۸۲۳۱	۸/۴۷۷۴

مقایسۀ روش‌های مختلف

بعد از محاسبۀ بازدهی پرتفوی، درمجموع ۱۴۳۷ مشاهده برای بازدهی پرتفوی داریم. در تمام روش‌ها ابتدا با هزار مشاهدۀ اول، VaR روز ۱۰۰۱ تخمین زده می‌شود و بعد به‌کمک داده‌های روز دوم تا ۱۰۰۱، VaR روز ۱۰۰۲ پرتفوی برآورد می‌شود. این عمل تا زمانی که برای هر روش ۴۳۷ مشاهدۀ روزانه در هر دو سطح اطمینان ۹۵ درصد و ۹۹ درصد به‌دست آید، تکرار می‌شود. سپس VaR محاسبه‌شده با بازدهی واقعی پرتفوی در هر روز، مقایسه می‌شود. تعداد دفعاتی که VaR محاسبه‌شده در هر روش، از بازدهی واقعی پرتفوی بزرگ‌تر است، شمرده می‌شود. روشی که کمترین میانگین خطا را داشته باشد، روش دقیق‌تری است.

جدول ۴ نتایج مدل کاپیولا- گارچ را برای توابع مختلف کاپیولا نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود کاپیولای تی- استیودنت در هر دو سطح اطمینان کمترین میانگین خطا را دارد. جدول ۵ نتایج مقایسۀ روش‌های سنتی محاسبۀ VaR را با روش کاپیولا- گارچ با توزیع حاشیه‌ای نرمال و تابع کاپیولا تی- استیودنت نشان می‌دهد. در بین تمامی روش‌های مقایسه‌شده، روش کاپیولا- گارچ کمترین میانگین خطا را دارد.

جدول ٤. مقایسۀ کاپیولاهای مختلف

سطح معناداری ٪۵					
روزهای معاملاتی	**٤۳۷**	**تعداد دفعات مورد انتظار**			**۲۲**
کاپیولا	**GARCH-n**	**GARCH-t**	**GJR-n**	**GJR-t**	**میانگین قدر مطلق خطا**
Gaussian	۲۱	۱۴	۲۱	۱۵	۴/۲۵
Student t	۲۲	۱۵	۲۱	۱۴	۴
Gumbel	۲۴	۱۰	۱۵	۹	۸/۵
Frank	۲۳	۹	۱۵	۸	۸/۷۵
Clayton	۲۴	۱۲	۱۸	۹	۷/۲۵
سطح معناداری ۱ درصد					
روزهای معاملاتی	**٤۳۷**	**تعداد دفعات مورد انتظار**			**۵**
Gaussian	۸	۱	۸	۱	3/۵
Student t	۶	۱	۳	۱	۲/۷۵
Gumbel	۹	۱	۲	۱	۳/۷۵
Frank	۹	۱	۳	۱	3/۵
Clayton	۸	۱	۲	۱	3/۵

جدول ۵. مقایسهٔ روش‌های مختلف محاسبهٔ VaR

روزهای معاملاتی	۴۳۷		
سطح معناداری	۵٪	۱٪	میانگین خطا
تعداد دفعات مورد انتظار	۲۲	۵	
t-copula-GARCH-n	۲۲	۶	۱
t-copula-GJR-n	۲۱	۳	۳
Variance-Covariance	۷	۲	۱۸
Historical Simulation	۸	۱	۱۸
EWMA	۲۷	۱۳	۱۳
GARCH-n	۲۳	۹	۵
GARCH-t	۲۲	۹	۴
GJR-n	۲۰	۶	۳
GJR-t	۲۰	۶	۳

افزون‌بر این، در این پژوهش به‌کمک روش پس‌آزمون[1] به بررسی معنادار‌بودن دقت VaR محاسبه‌شده از روش‌های مختلف پرداخته شد. جدول ۶ آماره‌های محاسبه‌شدهٔ آزمون پوشش غیرشرطی[2]، که توسط کوپیک (۱۹۹۵) ارائه شده است را در سطح اطمینان ۹۵ درصد و ۹۹ درصد به‌همراه مقادیر بحرانی مانند دو سطح اطمینان، نشان می‌دهد. فرضیهٔ صفر در این آزمون عبارت است از اینکه تعداد دفعاتی که VaR محاسبه‌شده از بازدهی واقعی پرتفوی بزرگ‌تر است، برابر است با تعداد دفعات مورد انتظار در سطح اطمینان مد نظر. با توجه به مقادیر بحرانی ۳/۸۴ و ۶/۶۳ در سطح ۵ درصد و ۱ درصد و آماره‌های ۰/۰۰۱۱ و ۰/۵۵۰۱، مشاهده می‌شود در هر دو سطح اطمینان نمی‌توان فرضیهٔ صفر را برای روش کاپیولا- گارچ رد کرد؛ یعنی روش کاپیولا- گارچ توانسته است VaR پرتفوی را با دقت محاسبه کند.

این پژوهش براساس کارهای پارلو و هوتا (۲۰۰۶) و هوانگ و همکاران (۲۰۰۹) است. نتایج این پژوهش مشابه پژوهش سال ۲۰۰۹ هوانگ و همکاران است. در هر دو پژوهش روش

1. Back Test
2. Unconditional Coverage Test

کاپیولا- گارچ با فرض نرمال‌بودن توزیع پسماندها بهترین عملکرد را دارند اما در پژوهش پارلو و هوتا، روش محاسبهٔ ریسک با استفاده از تابع کاپیولا SJC کمترین میانگین خطا را دارد.

جدول ٦. نتایج آزمون پوشش غیرشرطی

روزهای معاملاتی	٤٣٧	
مقدار بحرانی ٪۵	۳/۸۴	
مقدار بحرانی ٪۱	۶/۶۳	
روش برآورد VaR	**آماره ٪۵**	**آماره ٪۱**
t-copula-GARCH-n	۰/۰۰۱۱	۰/۵۵۰۱
t-copula-GJR-n	۰/۰۳۵۲	۰/۴۸۷۴
Variance-Covariance	۱۲/۲۸۸۹	۱/۶۲۶۴
Historical Simulation	۱۲/۰۸۱	۳/۸۱۶۶
EWMA	۱/۱۹۲۵	۱۱/۲۵۸۱
GARCH-n	۰/۰۶۲۶۸	۳/۷۹۴
GARCH-t	۰/۰۰۱۱	۳/۷۹۴
GJR-n	۰/۱۶۹۴	۰/۵۵۰۱
GJR-t	۰/۱۶۹۵	۰/۵۵۰۱

نتیجه‌گیری

این پژوهش نشان داد ترکیب تئوری کاپیولا با مدل‌های GARCH مـی‌توانـد ابـزار قدرتمنـدی برای محاسبهٔ VaR ارائه کند. در این پژوهش از توابع کاپیولای مختلف و توابع توزیع حاشـیه‌ای متفاوت استفاده شد. پس از مقایسهٔ نتایج به‌دست‌آمده با روش‌هـای دیگـر، مشـخص شـد VaR محاسبه‌شده از طریق روش کاپیولا- گارچ با تابع کاپیولای تی- استیودنت، دقیق‌تر از روش‌هـای دیگر، ریسک پرتفوی را محاسبه می‌کند.

References

Clayton, D. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application to a uranium exploration data set. *Technometrics*, 28 (2): 123-131.

Deng, L. Ma, C. & Yang, W. (2011). Portfolio Optimization via Pair Copula-GARCH-EVT-CVaR Model. *Systems Engineering Procedia*, 2 (1): 171-181.

Embrechts, P. McNeil, A. & Straumann, D. (2002). *Risk Management Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press.

Engle, R. (1982). Auto-regressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50 (4): 987-1007.

Frank, M. (1987). Best-poss bounds for the distribution of a sum – a problem of Kolmogorov. *Probability Theory and Related Fields,* 74 (1): 199-211.

Genest, C. (1987). Frank's family of bivariate distribution. *Biometrika*, 74 (3): 549-555.

Goorbergh, R. Genest, W. & Werker, B. (2005). Bivariate option pricing using dynamic copula models. *Insurance, Mathematics and Economics*, 37 (1): 101-114.

Gumbel, E. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of American Statistical Association*, 55 (292): 698-707.

Hamerle, A. & Rosch, D. (2005). Misspecified Copulas in Credit Risk Models: How Good is Gaussian?. *Journal of Risk*, 8 (1): 35-47.

Hotta, L. Lucas, E. & Palaro H. (2008). Estimation of VaR using copula and extreme value theory. *Multinational Finance Journal*, 12 (3/4): 205-221.

Huang, J. Lee, H. Liang, H. & Fu, W. (2009). Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45 (3): 315-324.

Kupiec, P. (1998). Stress testing in a value at risk framework. *The Journal of Derivatives*, 6 (1): 7–24.

Ling, C. (1965). Represention of associative functions. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 12 (1): 189-212.

Meneguzzo, D. & Vecchiato, W. (2004). Copula Sensitivity in Collateralized Debt Obligations and Basket Default Swaps. *The Journal of Future Markets*,24 (1): 37-70.

National Bureau of Economic Research. (1927). *The Behaviour of Prices*. [Brochure]. New York : Mills, C.

Neslehova, J. Embrechts, P. & Demoulin, C. (2006). Infinite-mean Models and the LDA for Operational Risk. *Journal of Operational Risk*, 1 (1): 3-25.

Palaro, H. & Hotta, L. (2006). Using conditional copulas to estimate value at risk. *Journal of Data Science*, 4 (1): 93-115.

Patton, A. (2001). Applications of Copula Theory in Financial Econometrics. (Unpublished Ph.D. dissertation). University of California, San Diego, USA.

Schweizer, B. & Sklar, A. (1961). Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 8 (1): 169-186.

Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges. *Publicationsde l'Institut Statistique de l'Universite de Paris*, 8 (1): 229-231.