مکان‌یابی برای دو تسهیل مستعد ازدحام با در نظر گرفتن مشتریان کم‌حوصله

جمال ارکات*[1] و شکوفه زمانی[2]

[1] استادیار گروه مهندسی صنایع - دانشگاه کردستان

[2] دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی صنایع - دانشگاه کردستان

(تاریخ دریافت ۹۲/۲/۲۱، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۲/۱۱/۶، تاریخ تصویب ۹۲/۱۲/۱۸)

چکیده

در این مقاله، مسئله مکان‌یابی شبکه‌ای برای دو تسهیل مستعد ازدحام و مشتریان کم‌حوصله مورد بررسی قرار می‌گیرد. هر مشتری هنگام مراجعه به تسهیل مربوطه، در صورتی که با اندازه صفی بیش از آستانه تحمل خود مواجه شود، از ورود منصرف شده و به تسهیل دیگر مراجعه می‌کند. در تسهیل دوم نیز اگر وضعیتی مشابه وجود داشته باشد، مشتری از دریافت خدمت، منصرف می‌شود. هدف این مسئله، انتخاب دو مکان از بین تعدادی مکان کاندیدا برای احداث دو تسهیل خدمت‌دهنده و تخصیص مشتریان شبکه به تسهیلات ذکرشده است؛ به گونه‌ای که میزان تقاضای از دست رفته به دلیل وجود صف طولانی، کمینه شود. با تعریف و توسعه گونه جدیدی از سیستم‌های صف فوق‌مکعبی، مدل ریاضی مسئله ارائه می‌شود و برای سنجش کارآیی و درستی آن، یک مثال عددی، ارائه و توسط نرم‌افزار GAMS حل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مکان‌یابی شبکه‌ای، تسهیلات پرازدحام، سیستم‌های صف فوق‌مکعبی، مشتریان کم‌حوصله

مقدمه

به طور کلی مسائل مکان‌یابی تسهیلات را می‌توان به دو دسته مکان‌یابی تسهیلات متحرک و مکان‌یابی تسهیلات ثابت تقسیم کرد. در مسائل مکان‌یابی تسهیلات ثابت، در هر تسهیل، یک یا چند خدمت‌دهنده مستقر هستند و هر مشتری برای دریافت خدمت مورد نیاز به محل استقرار تسهیل متناظر مراجعه می‌کند. مکان‌یابی دستگاه‌های خودپرداز بانک، وب‌پروکسی‌های[1] مربوط به سیستم‌های ارتباطی و ایستگاه‌های سوخت‌رسانی از جمله کاربردهایی هستند که در ادبیات تحقیق به فراوانی به آنها پرداخته شده است. در مکان‌یابی تسهیلات متحرک، فرض می‌شود که یک یا چند خدمت‌دهنده که در هر یک از تسهیلات مستقر هستند، برای ارائه خدمات به محل مشتریان مراجعه می‌کنند و خدمت مربوطه در محل مشتری ارائه می‌شود. مکان‌یابی تسهیلات اضطراری مانند ایستگاه‌های آمبولانس، پلیس یا آتش‌نشانی، کاربردهای اصلی برای این نوع از مسائل مکان‌یابی به شمار می‌روند.

از سویی، مسائل مکان‌یابی را می‌توان بر اساس معیار وجود یا نبود ازدحام[2] در سیستم خدمت‌دهی به دو دسته تقسیم کرد. در دسته نخست، مسائل متعارفی همچون p-میانه[3]، c-مرکز[4] و پوشش مجموعه[5] قرار می‌گیرند که در آنها فرض می‌شود که خدمت‌دهی به هر مشتری بلافاصله پس از ورود وی به تسهیل انجام می‌گیرد و هیچگاه در سیستم، صف تشکیل نمی‌شود. در دسته دوم، زمان‌های خدمت‌دهی در مقایسه با فواصل زمانی بین ورود مشتریان متوالی، قابل ملاحظه هستند و بنابراین صف تشکیل می‌شود و مشتریان مجبور خواهند بود در نظامی از قبل مشخص، برای شروع خدمت‌دهی، منتظر بمانند. به دلیل نبود قطعیت در زمان‌های بین ورود مشتریان و زمان‌های خدمت‌دهی، مسائل مکان‌یابی با ازدحام، از مسائل پیچیده برای مدل‌سازی و حل به شمار می‌روند.

لارسون [۱ و ۲] نخستین محققی است که با ارائه ایده ایجاد ازدحام در ارائه خدمت به مشتریان، فرض متداول قطعی بودن ماهیت مسایل دنیای واقعی را در مسائل مکان‌یابی به چالش کشید. مدل‌های مکان‌یابی با ازدحام، بر اساس معیارهایی مانند تعداد خدمت‌دهندگان مستقر در هر تسهیل، قاعده تخصیص مشتریان به تسهیلات (مانند قاعده مجاورت[6] و قاعده جاذبه[7])، توزیع زمان‌های بین ورود مشتریان متوالی و توزیع زمان‌های خدمت‌دهی، دسته‌بندی می‌شوند. مهم‌ترین وجه تمایز مدل‌های مکان‌یابی با تسهیلات با ازدحام، نوع تابع هدف به کار

* نویسنده مسئول: تلفن: ۰۸۷۱۶۶۶۰۰۷۳، Email: j.arkat@uok.ac.ir

گرفته در آنها است و از این نظر، این مسائل به سه دسته مسائل میانه، مسائل پوششی و مسائل مرکز تقسیم می‌شوند.

مدل‌های میانه به مدل‌هایی اطلاق می‌شوند که در آنها توابع هدف به صورت حداقل کردن مجموع هزینه‌ها یا زمان‌های سفر و انتظار مشتریان تعریف می‌شوند. وانگ و همکاران [۳] مدل مکان‌یابی تسهیلات پرازدحام با خدمت‌دهنده ثابت را برای حالتی که در هر تسهیل، حداکثر یک خدمت‌دهنده مستقر شود و مدل صف ایجاد شده از نوع M/M/1 (یک خدمت‌دهنده، ورودهای پواسان و زمان‌های خدمت‌نمایی) باشد، مورد مطالعه قرار دادند. تابع هدف مدل ارائه شده، با تأکید بر جنبه‌های مشتری‌مداری، مجموع هزینه‌های سفر مشتریان و تسهیلات و هزینه‌های انتظار آنها در صف را کمینه می‌کند. برمن و درزنر [۴] با توسعه مدل وانگ [۳] از تسهیلات تک‌خدمت‌دهنده به تسهیلات چندخدمت‌دهنده، به بررسی سیستم‌های M/M/c پرداخته‌اند. در مدل ارائه شده، از قاعده مجاورت برای تخصیص مشتریان استفاده شده است. یعنی هر مشتری برای دریافت خدمت به نزدیک‌ترین خدمت‌دهنده مراجعه می‌کند و در شرایطی که دو یا چند خدمت‌دهنده در فاصله یکسانی از وی قرار داشته باشند، به نسبت یکسان، از آنها استفاده می‌کند. در تابع هدف این تحقیق، مجموع هزینه‌های مربوط به زمان‌های سفر مشتریان به تسهیلات و میانگین زمان‌های صرف شده در صف انتظار، کمینه می‌شوند. نویسندگان برای حل این مسئله از سه روش فراابتکاری الگوریتم ژنتیک[۸]، بازپخت شبیه‌سازی شده[۹] و جستجوی ممنوعه[۱۰] استفاده کرده‌اند و نشان داده‌اند که الگوریتم ژنتیک نسبت به دو الگوریتم دیگری کارآیی بالاتری دارد.

مدل ریاضی ارائه شده توسط پسندیده و اخوان نیاکی [۵] از جمله معدود مدل‌هایی است که به طور همزمان هر دو جنبه مشتری و خدمت‌دهنده را در تابع هدف در نظر گرفته است. محققان یک مدل دوهدفه را به صورت کمینه کردن همزمان مجموع زمان‌های سپری شده توسط مشتریان (زمان‌های سفر و زمان‌های انتظار در سیستم) و درصد بیکاری خدمت‌دهندگان ارائه کرده‌اند. در این مدل، فرض شده است که در هر تسهیل، فقط یک خدمت‌دهنده می‌تواند مستقر شود، بنابراین مدل صف بررسی‌شده، از نوع M/M/1 است. از آنجایی که مدل ارائه شده یک مدل دوهدفه عدد صحیح آمیخته غیرخطی است، نویسندگان برای حل آن از الگوریتم ژنتیک استفاده کرده‌اند. مشابه تحقیق پیشین، چمبری و همکاران [۶] یک مدل دوهدفه را با در نظر گرفتن همزمان دو جنبه مشتری و خدمت‌دهنده ارائه کرده‌اند. توابع هدف مدل ارائه شده، مشابه توابع هدف تحقیق قبلی است. فرض اصلی که این مدل را از مدل پیشین متمایز می‌کند، در نظر گرفتن ظرفیت محدود برای فضای انتظار در هر یک از تسهیلات و در نتیجه استفاده از نتایج مربوط به سیستم‌های صف M/M/1/K است. محققان برای به دست آوردن مجموعه نقاط نامغلوب، از دو روش فراابتکاری چندهدفه NRGA و NSGA-II استفاده کرده‌اند. نتایج محاسباتی ارائه شده حاکی از برتری روش دوم نسبت به روش نخست است.

بر خلاف دسته اول، مدل‌های مکان‌یابی تسهیلات پرازدحام با سرورهای ثابت که در آنها تابع هدف به کیفیت پوشش مشتریان معطوف است، تمرکز تابع هدف دسته دوم این گونه مدل‌ها (یعنی مدل‌های پوششی) بر میزان پوشش مشتریان است. بدین ترتیب در دسته دوم، توابع هدفی نظیر بیشینه کردن میزان پوشش یا کمینه کردن مشتریان خارج از محدوده پوشش تسهیلات، به کار برده شده‌اند. برمن و همکاران [۷] تابع هدف حداکثر کردن امید تعداد مشتریان پوشش داده شده را برای مسئله مکان‌یابی تسهیلات، ثابت در نظر گرفته‌اند. در این تحقیق، معیار مجاورت یعنی مراجعه مشتری به نزدیک‌ترین تسهیل، به عنوان یکی از مفروضات اصلی در نظر گرفته شده است. در صورتی که تسهیل متناظر یک مشتری به حداکثر ظرفیت خود رسیده باشد و امکان پذیرش مشتریان جدید وجود نداشته باشد، مشتریان تخصیص یافته به آن، به نزدیک‌ترین تسهیل بعدی که تا کنون ملاقات نکرده‌اند، مراجعه می‌کنند. هاماگوچی و ناکاده [۸] مسئله مکان‌یابی شبکه‌ای با تسهیلات ثابت را بر اساس سیستم صف M/G/1 مدل‌سازی کرده‌اند؛ بدین معنی که محققان فرض کرده‌اند که زمان‌های بین ورودهای متوالی مشتریان از توزیع نمایی پیروی می‌کنند، اما زمان‌های خدمت‌دهی به صورت یک توزیع کلی در نظر گرفته می‌شوند. تابع هدف مدل ارائه شده، بیشینه کردن مجموع تقاضاهای پوشش داده شده است. در این تحقیق، از روش تبدیل لاپلاس برای محاسبه تابع توزیع زمان انتظار مشتریان در سیستم استفاده شده است، اما به دلیل

پیچیدگی وارون تبدیل لاپلاس، شکل صریحی برای زمان‌های انتظار مشتریان به دست نیامده و بنابراین محققان به روش‌های ابتکاری متوسل شده‌اند. معین مقدس و تقی‌زاده کاخکی [۹] مسئله مکان‌یابی بیشینه پوشش را با در نظر گرفتن تسهیلات چندخدمت‌دهنده، مورد بررسی قرار داده‌اند. در مدل ارائه شده برای این مسئله، فرض شده است که متوسط زمان انتظار در هر تسهیل و همچنین مجموع هزینه‌های برپایی تسهیلات و خدمت‌دهندگان از آستانه‌های مشخصی، تجاوز نکند. از آنجایی که تعداد خدمت‌دهندگان موجود در هر تسهیل، جزو متغیرهای تصمیم مدل ریاضی در نظر گرفته شده‌اند، ساختار مدل ریاضی ارائه شده، به مراتب پیچیده‌تر از مدل‌های متعارف M/M/1 است. نویسندگان برای حل مسئله ارائه شده، دو الگوریتم ابتکاری جستجوی محلی را توسعه داده‌اند.

تابع هدف مدل‌های مکان‌یابی مرکز به عنوان دسته سوم از مسائل مکان‌یابی تسهیلات پرازدحام، از نوع کمینه کردن بیشینه (minimax) فاصله یا زمان‌های خدمت‌دهی است. استفاده از این نوع تابع هدف، مختص مسائل مکان‌یابی تسهیلات اورژانسی است، یعنی مسائلی که در آنها لازم است در کوتاه‌ترین زمان ممکن به دورترین مشتری نیز خدمت‌رسانی انجام شود. مسائلی همچون مکان‌یابی ایستگاه‌های آمبولانس، آتش‌نشانی یا پلیس از این قبیل مسائل هستند. به عنوان نمونه‌ای از تحقیقاتی که به این نوع از مسائل پرداخته‌اند، می‌توان به آبولین [۱۰] اشاره کرد. در مدل ریاضی ارائه شده در این تحقیق، بر بهینه کردن نیاز هر یک از مشتریان، تأکید و تابع هدف به صورت کمینه‌کردن حداکثر زمان طی شده برای هر مشتری در نظر گرفته شده است. همچنین زمان سپری شده توسط هر مشتری مشتمل بر زمان‌های سفر مشتری از مکان استقرار تا تسهیل تخصیص یافته به انضمام زمان‌های انتظار در صف دریافت خدمت، در نظر گرفته شده است.

فرض وجود ازدحام علاوه بر مسائل متعارف مکان‌یابی تسهیلات، در نسخه‌های جدیدتری از مسائل مکان‌یابی مانند مکان‌یابی هاب[۱۱]، مکان‌یابی رقابتی[۱۲] و طراحی زنجیره تأمین، در نظر گرفته شده‌اند. دی کامارگو و میراندا [۱۱] یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی عدد صحیح آمیخته برای تعیین مکان استقرار هاب‌ها ارائه کرده‌اند. در این تحقیق هزینه‌های ناشی از ازدحام در هر هاب به کمک تابعی از مقدار جریان در هاب محاسبه می‌شود. تابع هدف مدل پیشنهادی هزینه‌های استقرار، هزینه‌های حمل و نقل و هزینه‌های ناشی از ازدحام در هاب‌ها را کمینه می‌کند. محققان برای حل مدل پیشنهادی خود از روش تجزیه بندرز[۱۳] استفاده کرده‌اند. کونور و گیونس [۱۲] یک مدل مکان‌یابی چندتسهیلی رقابتی را با در نظر گرفتن وقوع ازدحام ترافیکی در خطوط ارتباطی ارائه کرده‌اند. در این مدل تعدادی شرکت ضمن استقرار مراکز فروش خود، برای افزایش منافع خود به رقابت می‌پردازند. هزینه‌های ازدحام در هر یک از مسیرهای ارتباطی برای هر شرکت به صورت تابعی خطی از مقدار کل جریان در آن مسیر محاسبه می‌شود. محققان برای حل مدل، یک روش ابتکاری پیشنهاد و نتایج آن را با روش جستجوی تصادفی مقایسه کردند. جوزدانی و همکاران [۱۳] یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته غیرخطی پویا برای برنامه‌ریزی زنجیره تأمین و مکان‌یابی تسهیلات مرتبط با چرخه تولید لبنیات ارائه کرده‌اند. در این مدل، نبود قطعیت در مقادیر تقاضا به صورت اعداد فازی مثلثی نمایش داده شده است. علاوه بر این، فرض وقوع ازدحام ترافیکی در مسیرهای ارتباطی از جمله فرض‌های کلیدی در این تحقیق محسوب می‌شود. تابع هدف مدل ارائه شده، مجموع هزینه‌های استقرار تسهیلات، هزینه‌های ناشی از ازدحام ترافیکی و هزینه‌های حمل شیر خام، شیر پردازش شده و محصولات لبنی را کمینه می‌کند.

یکی از موضوعات مهمی که در تحقیقات مکان‌یابی تسهیلات پرازدحام، کمتر بدان پرداخته شده است، امکان انصراف مشتری، قبل یا بعد از ورود به سیستم خدمت‌دهی است؛ مقوله‌ای که در بسیاری از سیستم‌های صف دنیای واقعی، مشاهده می‌شود. انصراف قبل از ورود که به دلیل ازدحام بیش از آستانه تحمل مشتری اتفاق می‌افتد، مهم‌ترین نوع انصراف به شمار می‌رود. همچنین در بسیاری از سیستم‌های صف دنیای واقعی، مشتری پس از انصراف از ورود به یک تسهیل، ممکن است به امید خلوت‌تر بودن تسهیلات دیگر، به این تسهیلات مراجعه کند. تحقیق انجام شده توسط برمن و همکاران [۷] از معدود مطالعاتی است که به موضوع انصراف مشتری پرداخته است. مدل صف در نظر گرفته شده در این مطالعه، از نوع M/M/1/K است. به دلیل ساختار پیچیده این

مسئله ، مدل ریاضی صریحی در این تحقیق ارائه نشده است و فقط شکل ریاضی معیار ارزیابی راه‌حل‌ها (به عنوان تابع هدف) به صورت حداکثرکردن امید ریاضی تقاضای جذب‌شده، ارائه شده است. بر اساس معیار ارزیابی مربوطه، دو الگوریتم ابتکاری تقریبی برای حل مسئله پیشنهاد شده است. الگوریتم‌های ارائه شده ساختار تکراری حریصانه[۱۴] دارند؛ بدین معنی که در حلقه‌های بهبود تکرارشونده، مکان‌های استقرار تسهیلات تا جایی تغییر داده می‌شوند که امکان بهبود راه‌حل وجود داشته باشد. به دلیل ساختار ابتکاری الگوریتم‌های ارائه شده، تضمینی برای بهینگی راه‌حل نهایی وجود ندارد.

در تحقیق حاضر، مسئله مکان‌یابی شبکه‌ای برای دو تسهیل پرازدحام در قالب یک مدل پوششی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مسئله، انصراف قبل از ورود (به دلیل فضای انتظار تسهیل یا کم‌حوصلگی مشتری) به عنوان یکی از منابع از دست دادن تقاضا مدنظر قرار می‌گیرد. بدین منظور فرض می‌شود که تقاضای هر مشتری از طریق نزدیک‌ترین تسهیل پوشش داده می‌شود و در صورتی که مشتری در لحظه ورود با تعداد مشتریانی بیش از آستانه انتظار، روبه‌رو شود، از ورود منصرف شده و به تسهیل‌باز دیگر مراجعه می‌کند. در صورتی که مشتری در تسهیل دوم نیز با صف بیش از حد تحمل، مواجه شود، از دریافت خدمت منصرف می‌شود و در نتیجه، تقاضای وی به عنوان تقاضای از دست رفته محسوب می‌شود. در مسئله دوتسهیلی حاضر به عنوان شکل خاصی از مسئله چندتسهیلی، هر تسهیل به عنوان پشتیبان برای تسهیل دیگر عمل می‌کند، بنابراین نیازی به گرفتن تصمیم در مورد انتخاب تسهیل پشتیبان برای هر تسهیل وجود ندارد. این در حالی است که در شکل اصلی مسئله، باید برای هر یک از تسهیلات احداث شده، تسهیل پشتیبان نیز با در نظر گرفتن متغیرهای تصمیم مناسب، مشخص شود. در نظر گرفتن این مجموعه از متغیرهای تصمیم، مدل‌سازی مسئله را بسیار پیچیده می‌کند، به گونه‌ای که لازم است شیوه دیگری برای مدل‌سازی، مدنظر قرار گیرد.

ساختار مطالبی که در ادامه عنوان خواهند شد، بدین ترتیب است: در بخش بعدی، شکل کلی مسئله، تشریح و یک مدل ریاضی ارائه می‌شود. برای به دست آوردن شکل صریحی برای مدل ریاضی، مدل صف متناظر مسئله در بخش سوم، تحلیل و نتایج آن در بازنویسی مدل ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بخش چهارم، یک مثال عددی برای تشریح نحوه استفاده از مدل ریاضی و به دست آوردن راه‌حل بهینه، ارائه می‌شود. در نهایت، جمع‌بندی، نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادها در بخش آخر مقاله ارائه می‌شوند.

بیان مسئله و ارائه مدل ریاضی

مسئله‌ای که در این تحقیق بررسی می‌شود، مسئله مکان‌یابی شبکه‌ای برای دو تسهیل مستعد ازدحام یا دارای صف است. فرض شده است که شبکه‌ای از گره‌ها و کمان‌های واصل بین آنها از قبل مشخص است. مشتریان متقاضی دریافت خدمات در برخی از گره‌های این شبکه مستقر هستند و مقدار تقاضای هر یک از آنها، یک متغیر تصادفی است. هدف مسئله، انتخاب دو تسهیل از بین تعدادی مکان‌های کاندیدا است که از قبل مشخص شده است؛ به نحوی که میزان تقاضای از دست رفته به دلیل انصراف مشتری از دریافت خدمات کمینه شود. در هر یک از دو تسهیل، یک خدمت‌دهنده با زمان‌های خدمت‌دهی نمایی، مستقر است. بر اساس قاعده مجاورت، فرض می‌شود که هر مشتری به نزدیک‌ترین تسهیل مراجعه می‌کند. در صورتی که در لحظه رسیدن مشتری به تسهیل متناظر با تعداد نفراتی بیش از آستانه تحملش مواجه شود، از ورود به آن منصرف و به تسهیل دوم مراجعه می‌کند. در تسهیل دوم نیز در صورتی که مشتری با ظرفیت کامل صف مواجه شود، به طور کلی از دریافت خدمت، منصرف می‌شود و در نتیجه، تقاضای وی به عنوان تقاضای از دست رفته، تلقی می‌شود.

از آنجایی که زمان‌های بین دو مراجعه به هر یک از تسهیلات و همچنین زمان‌های خدمت‌دهی در هر تسهیل، متغیرهای تصادفی هستند، لازم است برای محاسبه احتمال انصراف کلی هر یک از مشتریان، سیستم صف هر خدمت‌دهنده مشخص و تحلیل شود. در این بخش، نخست با در نظر گرفتن احتمال انصراف کلی مشتریان (احتمال کامل بودن ظرفیت هر دو تسهیل باز) به صورت پارامتر، مدل ریاضی مسئله ارائه می‌شود و سپس در بخش بعدی، احتمال مربوطه از طریق تحلیل معادلات تعادل سیستم صف محاسبه و در مدل، جایگزین می‌شود. مفروضات زیر در مدل‌سازی مسئله، مدنظر قرار گرفته‌اند:

- مختصات گره‌های شبکه و در نتیجه، کوتاه‌ترین فاصله بین هر جفت گره از قبل مشخص است.
- مشتریان در گره‌هایی از شبکه مستقر شده‌اند.
- فواصل زمانی بین تقاضاهای متوالی هر یک از گره‌های متقاضی دریافت خدمات از یک توزیع نمایی با نرخ مشخص پیروی می‌کند.
- زمان‌های خدمت‌دهی در هر یک از دو تسهیل باز از توزیع‌های نمایی با نرخ‌های یکسان، پیروی می‌کنند.
- ظرفیت تسهیلات باز که معرف آستانه تحمل مشتریان است، از قبل مشخص است.
- نظام خدمت‌دهی از نوع نوبتی است و صف‌ها در حالت پایدار[15] بررسی می‌شوند.

نمادگذاری به کار رفته در مدل ریاضی به شرح زیر است:

مجموعه اندیس‌ها

I : مجموعه مشتریان (i اندیس مشتریان)

J : مجموعه سایت‌های بالقوه احداث تسهیل (j و r اندیس سایت‌های کاندیدا)

L : مجموعه تسهیلات (l و k اندیس تسهیل)

پارامترها

C : تعداد مشتریان

S : تعداد سایت‌های کاندیدا

K : ظرفیت تسهیلات باز (آستانه تحمل مشتریان)

d_i : نرخ تقاضا (تعداد در واحد زمان) برای مشتری i

μ : نرخ خدمت‌دهی در هر یک از تسهیلات

t_{ij} : کوتاه‌ترین فاصله بین گره i و گره j

M_1 و M_2 : اعداد بزرگ مثبت

$\boldsymbol{Q}$: ماتریس نرخ انتقال برای وضعیت‌های سیستم صف

متغیرهای تصمیم

y_{jl} : اگر سایت بالقوه j به منظور استقرار تسهیل lام فعال شود، برابر ۱ و در غیر این صورت برابر ۰ است.

x_{ijl} : اگر مشتری i به تسهیل lام که در سایت j مستقر است، تخصیص یابد، برابر ۱ و در غیر این‌صورت برابر ۰ است.

λ_l : مجموع نرخ تقاضای ورودی به تسهیل l.

$\boldsymbol{\Pi}$: بردار احتمالات حدی برای سیستم صف.

$\pi_{n,m}$: احتمال حدی حضور n نفر در تسهیل اول و m نفر در تسهیل دوم.

با در نظر گرفتن نمادگذاری معرفی شده، مدل ریاضی متناظر با مسئله به این ترتیب ارائه می‌شود:

$$Min\ Z = \pi_{K,K} \quad (۱)$$

$$\lambda_l = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{s} x_{ijl} d_i \quad \forall l \quad (۲)$$

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{2} x_{ijl} = 1 \quad \forall i \quad (۳)$$

$$\sum_{l=1}^{2} y_{jl} \le 1 \quad \forall j \quad (۴)$$

$$\sum_{j=1}^{s} y_{jl} = 1 \quad \forall l \quad (۵)$$

$$\sum_{i=1}^{c} x_{ijl} \le M_1 y_{jl} \quad \forall j,l \quad (۶)$$

$$\sum_{r=1}^{s}\sum_{l=1}^{2} x_{irl} t_{ir} \le t_{ij} + M_2\left(1 - y_{jk}\right) \quad \forall i,j,k \quad (۷)$$

$$\boldsymbol{\Pi}.\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0} \quad (۸)$$

$$\sum_{n,m} \pi_{n,m} = 1 \quad (۹)$$

$$x_{ijl}, y_{jl} \in \{0,1\} \quad \forall i,j,l \quad (۱۰)$$

$$\lambda_l \ge 0 \quad (۱۱)$$

$$0 \le \pi_{(n,m)} \le 1 \quad \forall n,m \quad (۱۲)$$

در صورتی که مشتری هنگام مراجعه، با ظرفیت کامل هر دو تسهیل مواجه شود، امکان پوشش تقاضای وی وجود ندارد. با این اوصاف، درصد اوقاتی که تقاضای مشتریان از دست می‌رود، برابر با درصد اوقاتی است که هر دو تسهیل به طور کامل پر هستند (به عبارتی، امکان پذیرش مشتریان را ندارند). بنابراین تابع هدف مسئله به صورت کمینه‌کردن درصد زمان‌های بلوکه‌شدن هر دو تسهیل یعنی $\pi_{K,K}$ در رابطه (۱) تعریف شده است. رابطه (۲) مجموع تقاضای مربوط به هر یک از تسهیلات را محاسبه می‌کند. محدودیت (۳) تضمین می‌کند که هر مشتری به یک تسهیل، تخصیص داده شود. محدودیت (۴) نشان می‌دهد که در هر سایت کاندیدا، حداکثر یک تسهیل مستقر می‌شود. محدودیت (۵) تضمین می‌کند که هر تسهیل فقط در یکی از سایت‌های کاندیدا مستقر شود. محدودیت (۶) تضمین می‌کند که مشتریان فقط به

تسهیلات باز تخصیص یابند. در این محدودیت، M_1 نشان‌دهنده یک عدد مثبت بزرگ است و حداقل باید برابر با تعداد کل نقاط تقاضا در نظر گرفته شود. محدودیت (۷) قاعده مجاورت را تضمین می‌کند، بدین معنی که هر مشتری به نزدیک‌ترین تسهیل، تخصیص می‌یابد. M_2 نیز یک عدد مثبت بزرگ است و حداقل باید برابر با بزرگ‌ترین عدد موجود در ماتریس فاصله در نظر گرفته شود. محدودیت‌های (۸) و (۹) مجموعه معادلات تعادل مرتبط با سیستم صف را نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که رابطه (۸) فقط شکل کلی معادلات تعادل برای یک زنجیره مارکوف پیوسته است و لازم است پس از تحلیل سیستم صف به صورت مجموعه‌ای از معادلات صریح، بازنویسی شود. محدودیت‌های (۱۰) تا (۱۲) دامنه متغیرهای مربوط به مدل ارائه شده را نشان می‌دهند.

تحلیل سیستم صف

مدل ریاضی ارائه شده در بخش قبل، شکل صریحی ندارد. بدین معنی که برای به دست آوردن مقدار تابع هدف (احتمال انصراف مشتری) لازم است نخست دستگاه معادلات تعادل سیستم صف (روابط (۸) و (۹)) حل شود. برای دستیابی به شکلی صریح برای تابع هدف، لازم است سیستم صف مربوطه، تحلیل و دستگاه معادلات تعادل آن، حل شود. نخستین گام در تحلیل یک سیستم صف، ارائه تعریفی مناسب برای وضعیت‌های آن است. واضح است که دو خدمت‌دهنده موجود در شبکه به طور کامل مستقل عمل نمی‌کنند و بخشی از مشتریان هر یک از این دو تسهیل به دلیل وجود ازدحام بیش از حد انتظار (تکمیل ظرفیت) در خدمت‌دهنده متناظرشان، به خدمت‌دهنده دیگر، مراجعه می‌کنند. با این اوصاف، ورودی هر یک از تسهیلات، علاوه بر مشتریانی که به آن تخصیص یافته‌اند، شامل بخشی از مشتریان تسهیل دیگر که موفق به دریافت خدمت نشده‌اند نیز هست. بنابراین، فرآیند ورود به هر تسهیل، پواسان نیست و سیستم‌های صف مربوط به تسهیلات باز را نمی‌توان به صورت سیستم‌های مستقل M/M/1/K در نظر گرفت. وجود چنین مشکلی (نبود استقلال خدمت‌دهندگان) باعث می‌شود نتوان از تعریف وضعیت و نتایج سیستم‌های صف متعارف استفاده کرد. در نظر گرفتن همزمان تعداد مشتریان حاضر در دو تسهیل خدمت‌دهنده، به عنوان وضعیت سیستم صف، چنین مشکلی را حل می‌کند. بدین ترتیب، وضعیت سیستم صف به صورت $\alpha=(n,m)$ تعریف می‌شود که در آن، n تعداد مشتریان موجود در تسهیل اول و m تعداد مشتریان موجود در تسهیل دوم را نشان می‌دهد. این نوع تعریف، وضعیت مشابه تعریف وضعیت برای سیستم‌های صف فوق‌مکعبی[۱۶] است. تحقیقاتی که به بررسی چنین سیستم‌های صفی پرداخته‌اند، به دشواری تحلیل این سیستم‌های صف، اذعان کرده‌اند. لارسون [1] اولین کسی است که از سیستم‌های صف فوق‌مکعبی در تحلیل مسئله مکان‌یابی تسهیلات اورژانسی استفاده کرده است. در این مسئله، فرض همکاری تسهیلات در ارائه خدمات در نظر گرفته شده است، بدین معنی که در صورتی که تسهیلی قادر به پاسخ‌گویی نیاز یکی از مشتریان خود نشود، سایر تسهیلات می‌توانند به عنوان پشتیبان، این نیاز را جوابگو باشند. محقق برای هر یک از تسهیلات، دو وضعیت صفر و یک را که معرف مشغول یا بیکار بودن تسهیل است، در نظر گرفته و به ارائه معادلات تعادل پرداخته است. چنین تعریف وضعیتی برای مسائل مکان‌یابی تسهیلات اورژانسی که در آنها فرض تسهیل پشتیبان در نظر گرفته می‌شود، متداول است؛ به طور مثال می‌توان از ماریانوف و رول [۱۴] و آتکینسون [۱۵] نام برد.

تعریف وضعیتی که در تحقیق حاضر استفاده شده است را می‌توان حالت تعمیم‌یافته‌ای از تعریف وضعیت مربوط به سیستم‌های صف فوق‌مکعبی در نظر گرفت. بدین صورت که وضعیت هر یک از تسهیلات خدمت‌دهنده به جای بیکار یا مشغول بودن (صفر یا یک)، به صورت تعداد مشتریان موجود در آنها در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که وضعیت هر تسهیل به صورت تعداد نفرات موجود در آن تعریف شده است و ظرفیت هر یک از تسهیلات نیز K نفر است، تعداد کل وضعیت‌های سیستم $(K+1)^2$ خواهد بود. معادلات تعادل مربوط به وضعیت‌های این سیستم صف به شرح روابط (۱۳) تا (۲۱) هستند:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\pi_{0,0}=\mu\left(\pi_{1,0}+\pi_{0,1}\right) \tag{۱۳}$$

$$\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2+\mu)\pi_{n,0}&=\lambda_1\pi_{n-1,0}\\&+\mu\left(\pi_{n+1,0}+\pi_{n,1}\right);\quad 0<n<K\end{aligned} \tag{۱۴}$$

$$\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu\right)\pi_{0,m}=\lambda_2\pi_{0,m-1} + \mu\left(\pi_{1,m}+\pi_{0,m+1}\right);\quad 0<m<K \qquad (۱۵)$$

$$\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu\right)\pi_{K,0}=\lambda_1\pi_{K-1,0}+\mu\pi_{K,1} \qquad (۱۶)$$

$$\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu\right)\pi_{0,K}=\lambda_2\pi_{0,K-1}+\mu\pi_{1,K} \qquad (۱۷)$$

$$\left(\lambda_1+\lambda_2+2\mu\right)\pi_{n,m}=\lambda_1\pi_{n-1,m}+\lambda_2\pi_{n,m-1} + \mu\left(\pi_{n+1,m}+\pi_{n,m+1}\right);\quad 0<n,m<K \qquad (۱۸)$$

$$\left(\lambda_1+\lambda_2+2\mu\right)\pi_{n,K}=(\lambda_1+\lambda_2)\pi_{n-1,K} + \lambda_2\pi_{n,K-1}+\mu\pi_{n+1,K};\quad 0<n<K \qquad (۱۹)$$

$$\left(\lambda_1+\lambda_2+2\mu\right)\pi_{K,m}=(\lambda_1+\lambda_2)\pi_{K,m-1} + \lambda_1\pi_{K-1,m}+\mu\pi_{K,m+1};\quad 0<m<K \qquad (۲۰)$$

$$2\mu\pi_{K,K}=\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left(\pi_{K-1,K}+\pi_{K,K-1}\right) \qquad (۲۱)$$

در حقیقت این معادلات، هم‌ارز شکل ماتریسی معادلات تعادل است که در رابطه (۸) نشان داده شده‌اند. با مشخص بودن ظرفیت تسهیلات (K) و نرخ خدمت‌دهی در هر تسهیل (μ)، می‌توان با پارامتریک در نظر گرفتن نرخ‌های ورود هر یک از تسهیلات (λ_1 و λ_2)، احتمالات حدی را از حل دستگاه معادلات بالا به دست آورد. از سویی، از آنجایی که مجموع نرخ‌های ورود به دو تسهیل برابر با کل نرخ تقاضای مشتریان ($\lambda=\sum\lambda_i$) است، می‌توان احتمالات حدی را فقط بر حسب λ_1 محاسبه کرد. بدین ترتیب، تابع هدف مدل ریاضی ارائه شده در بخش قبل ($\pi_{K,K}$) به صورت تابعی از متغیر تصمیم λ_1 بازنویسی شده و مجموعه معادلات تعادل (روابط (۸) و (۹)) از مجموعه محدودیت‌های مسئله حذف می‌شوند. با انجام این مراحل، مدل ریاضی در شکلی صریح به دست خواهد آمد و می‌توان از نرم‌افزارهای بهینه‌ساز برای حل آن استفاده کرد.

مثال عددی

در این قسمت، مدل ارائه شده برای یک مثال عددی، حل و بررسی می‌شود. مثال عددی ارائه شده شامل ۱۰ نقطه تقاضا است و هر نقطه تقاضا به عنوان یک مکان کاندیدا برای احداث دو تسهیل در نظر گرفته شده است. محدودیت فضا برای هر یک از تسهیلات، سه نفر در نظر گرفته شده است. ماتریس فواصل بین جفت گره‌های شبکه و همچنین نرخ‌های تقاضای مربوط به هر گره (مشتری) در جدول (۱) نشان داده شده‌اند. نرخ خدمت‌دهی برای هر یک از دو تسهیل برابر با یک خدمت در واحد زمان در نظر گرفته شده است. مجموع کل تقاضای مشتریان نیز که از آخرین سطر جدول (۱) قابل محاسبه است، برابر با یک تقاضا در واحد زمان است.

جدول ۱: ماتریس فاصله‌ای و نرخ‌های وقوع تقاضا

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	26	34	13	83	12	84	103	74	77
2	26	0	36	38	85	14	86	77	49	79
3	34	36	0	43	49	32	50	73	44	43
4	13	38	43	0	92	24	93	115	86	82
5	83	85	49	92	0	82	20	60	57	16
6	12	14	32	24	82	0	82	91	62	76
7	84	86	50	93	20	82	0	40	38	36
8	103	77	73	115	60	91	40	0	29	76
9	74	49	44	86	57	62	38	29	0	74
10	77	79	43	82	16	76	36	76	74	0
d	0.08	0.05	0.07	0.06	0.06	0.04	0.19	0.18	0.19	0.08

با توجه به آنچه در بخش قبل گفته شد، تعداد کل وضعیت‌های سیستم، ۱۶ وضعیت است. بنابراین ۱۶ معادله تعادل نیز متناظر با این وضعیت‌ها بر اساس روابط (۱۳) تا (۲۱) به دست می‌آیند. از آنجایی که این معادلات وابستگی خطی دارند، دستگاه معادلات تعادل مربوط به سیستم صف از جایگزین کردن یکی از معادلات با رابطه مربوط به مجموع احتمالات حدی (رابطه (۹)) به دست خواهد آمد. با انجام جایگزینی‌های $\mu=1$ و $\lambda_1=1-\lambda_2$ در دستگاه معادلات به دست آمده، می‌توان مقادیر احتمالات حدی را بر حسب λ_1 به دست آورد. پس از حل پارامتریک این دستگاه معادلات، مقدار تابع هدف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi_{K,K}=\frac{A}{B} \qquad (۲۲)$$

که در آن A و B چندجمله‌ای‌هایی به شکل زیر هستند:

$$A=24\lambda_1^6-72\lambda_1^5+54\lambda_1^4+12\lambda_1^3+3518\lambda_1^2-3536\lambda_1+2197 \qquad (۲۳)$$

$$B=360\lambda_1^6-1080\lambda_1^5+674\lambda_1^4+452\lambda_1^3+84356\lambda_1^2-84762\lambda_1+102212 \qquad (۲۴)$$

با در اختیار داشتن شکل صریح تابع هدف، می‌توان مدل ریاضی ارائه شده را با در نظر گرفتن رابطه (۲۲) به عنوان تابع هدف و محدودیت‌های (۲) تا (۷) و (۱۰) و (۱۱) بازنویسی کرد. مدل ایجادشده توسط حل‌کننده COUENNE از نرم‌افزار بهینه‌ساز GAMS حل شده است. نتایج حل، حاکی از آن است که در راه‌حل بهینه، تسهیلات ۱ و ۲ به ترتیب در مکان‌های کاندیدای ۳ و ۵ مستقر شده و به ترتیب مجموعه مشتریان {۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۹} و {۵، ۷، ۸ و ۱۰} را با مجموع تقاضاهای ۰/۴۹ و ۰/۵۱ پوشش می‌دهند. مقدار بهینه به دست آمده برای تابع هدف نیز ۰/۰۱۶ است.

با توجه به اینکه پارامترهای K (ظرفیت تسهیلات) و μ (نرخ خدمت‌دهی در هر تسهیل) از اصلی‌ترین پارامترهای مؤثر بر درصد تقاضای از دست رفته هستند، در این قسمت به تحلیل حساسیت و بررسی تأثیر این دو پارامتر بر نتایج حل مدل می‌پردازیم. برای این منظور، مثال یاد شده، با در نظر گرفتن مقادیر K و μ مختلف، حل می‌شود. جداول (۲) و (۳) مقادیر مربوط به پارامترهای یاد شده و نتایج حل مثال عددی را نمایش می‌دهد. نتایج حل حاکی از آن است که با افزایش ظرفیت تسهیلات (آستانه تحمل مشتریان)، درصد تقاضای از دست رفته کاهش می‌یابد. علاوه بر این، افزایش نرخ خدمت‌دهی در تسهیلات نیز به کاهش درصد تقاضای از دست رفته کمک می‌کند.

جدول ۲: نتایج تحلیل حساسیت روی ظرفیت تسهیلات

K	شماره تسهیلات	تابع هدف
1	2 , 7	0.200
2	1 , 10	0.055
3	3 , 5	0.016
4	2 , 10	0.005
5	2 , 10	0.001

جدول ۳: نتایج تحلیل حساسیت بر روی نرخ دمت‌دهی

μ	شماره تسهیلات	تابع هدف
0.8	2 , 10	0.041
0.9	3 , 5	0.025
1	3 , 5	0.016
1.1	2 , 10	0.011
1.2	2 , 10	0.007

جمع‌بندی و ارائه پیشنهادها

مکان‌یابی تسهیلات پرازدحام با خدمت‌دهندگان ثابت، یکی از پرکاربردترین انواع مدل‌های مکان‌یابی به شمار می‌رود که در طی دو دهه اخیر توجه بسیاری از محققان این حوزه را به خود جلب کرده است. در این مقاله به مسئله مکان‌یابی شبکه‌ای برای دو تسهیل مستعد ازدحام با در نظر گرفتن بی‌حوصلگی مشتریان پرداخته شد. در این مسئله چنین فرض شد که هر مشتری به نزدیک‌ترین تسهیل باز مراجعه می‌کند. در صورتی که در لحظه رسیدن مشتری به تسهیل متناظر با تعداد نفراتی بیش از آستانه تحمل خود مواجه شود، از ورود منصرف شده و به تسهیل دوم مراجعه می‌کند. در تسهیل دوم نیز در صورتی که مشتری با ظرفیت کامل صف تسهیل مواجه شود، به طور کلی از دریافت خدمت، منصرف و تقاضای وی به عنوان تقاضای از دست رفته تلقی می‌شود. این مسئله با هدف کمینه‌کردن مجموع تقاضاهای از دست رفته در قالب یک مدل ریاضی عدد صحیح آمیخته غیرخطی، مدل‌سازی شد. برای تحلیل سیستم صف مسئله، حالت تعمیم‌یافته‌ای از تعریف وضعیت در سیستم‌های صف فوق‌مکعبی، معرفی شده و شکل کلی معادلات تعادل سیستم صف به دست آمدند. در تعریف وضعیت جدید،

وضعیت هر یک از تسهیلات خدمت‌دهنده به جای بیکار یا مشغول بودن (صفر یا یک) که در سیستم‌های فوق‌مکعبی متداول است، به صورت تعداد مشتریان موجود در آنها تعریف شد. از ترکیب نتایج به دست آمده از تحلیل سیستم صف در مدل ریاضی اولیه، شکل صریحی از یک مدل ریاضی عدد صحیح آمیخته غیرخطی، معرفی شد. برای تشریح نحوه استفاده از مدل ریاضی معرفی شده، یک مثال عددی، معرفی و توسط نرم‌افزار بهینه‌ساز GAMS حل شد. حوزه‌های پژوهشی که در ادامه معرفی می‌شوند، می‌توانند زمینه‌های تحقیقاتی جذابی برای مطالعات بعدی باشند:

با افزایش تعداد تسهیلات، تعداد معادلات به صورت نمایی افزایش یافته و از این رو حل پارامتریک معادلات تعادل برای استخراج احتمالات حدی، دشوار و گاه غیرممکن می‌شود. به این دلیل، ارائه مدل‌هایی جامع‌تر برای استقرار بهینه تعداد بیشتری از تسهیلات می‌تواند در تحقیقات بعدی مدنظر قرار گیرد. در این مقاله شکل خاصی از بی‌حوصلگی مشتریان (انصراف قبل از ورود به دلیل مشاهده جمعیتی بیش از آستانه تحمل) مورد مطالعه قرار گرفت. در بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی، مشتریان با توجه به تعداد نفرات موجود در هر تسهیل در مورد ورود یا انصراف، تصمیم‌گیری می‌کنند. در واقع با افزایش تعداد نفرات منتظر در تسهیل، احتمال ورود فرد جدید به آن تسهیل کاهش می‌یابد. از سویی، افرادی که در صف منتظر هستند، ممکن است قبل از آنکه نوبت آنها برسد، از دریافت خدمت منصرف شده و سیستم را ترک کنند (انصراف بعد از ورود). در نظر گرفتن گونه‌های دیگر انصراف مشتریان و حالات ترکیبی این دسته‌ها، می‌تواند زمینه تحقیقاتی مناسبی برای ادامه مطالعات باشد.

مراجع

1- Larson, R. C. (1974). “A hypercube queuing model for facility location and redistricting in urban emergency services.” *Computers and Operations Research.*, 1, PP. 67–95.

2- Larson, R. C. (1975). “Approximating the performance of urban emergency service systems.” *Operations Research.*, PP. 845–868.

3- Wang, Q., Batta, R. and Rump, C. (2002). “Algorithms for a facility location problems with stochastic customer demand and immobile servers.” *Annals of Operations Research.*, 111, PP. 17–34.

4- Berman, O. and Drezner, Z. (2007). “The multiple server location problem.” *Journal of the Operational Research Society.*, 58:91–9.

5- Pasandideh, S. H. R. and Akhavan Niaki, S. T. (2010). “Genetic application in a facility location problem with random demand within queuing framework.” *J Intell Manuf.*, DOI 10.1007/s10845-010-0416-1

6- Chambari, A. H., Rahmati, S. H. Hajipoor, V. and Karimi, A. (2011). “A Bi-Objective Model for Location-Allocation Problem within Queuing Framework.” *World Academy of Science, Engineering and Technology.*, 78.

7- Berman, O., Huang. R . Kim, S. and Menezes. (2007). “Locating capacitated facilities to maximize captured demand.” *IIE Transactions.*, 39, PP. 1015–1029.

8- Hamaguch, T. and Nakade, K. (2010). “Optimal Location of Facilities on a Network in Which Each Facility is Operating as an M/G/1 Queue.” *J. Service Science & Management.*, 3, 287-297.

9- Moghadas, F. M. and Taghizadeh, K. (2011). “Maximal covering location-allocation problem with M/M/k queuing system and side constraints.” *Iranian Journal of Operations Research.*, 2(2), 1-16.

10- Aboolian, R., Berman, O. and Drezner, Z. (2009). “The multiple server center location problem.” Journal *of Operations Research.*, 167:337–52.

11- De Camargo, R. S. and Miranda, G. (2012). Single allocation hub location problem under congestion: Network owner and user perspectives. *Expert Systems with Applications*, *39*(3), 3385-3391.

12- Konur, D. and Geunes, J. (2012). Competitive multi-facility location games with non-identical firms and convex traffic congestion costs. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, *48*(1), 373-385.

13- Jouzdani, J., Sadjadi, S. J. and Fathian, M. (2013). Dynamic dairy facility location and supply chain planning under traffic congestion and demand uncertainty: A case study of Tehran. *Applied Mathematical Modelling*, *37*(18), 8467-8483.

14- Marianov, V. and ReVelle, C. (1996). "The queueing maximal availability location problem: a model for the siting of emergency vehicles." *European Journal of Operational Research*., 93:110–20.

15- Atkinson, J., Kovalenko, I. Kuznetsov, N. and Mykhalevych,K. (2008). "A hypercube queueing loss model with customer-dependent service rates." *European Journal of Operational Research.*, 191 (1), ISSN 0377-2217, PP. 223 – 239.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Web Proxy
2 - Congestion
3 - p median
4 - c center
5 - Set Covering
6 - Proximity Rule
7 - Gravity Rule
8- Genetic Algorithm
9- Simulated Annealing
10- Tabu Search
11- Hub Location Problem
12- Competitive Facility Location
13- Benders Decomposition
14- Greedy
15- Steady State
16- Hypercube Queuing Model