تاریخ علم، دورهٔ ۱۱، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۲، ص۳۱-۴۶

تعبیر کروی هندسهٔ مسطحه در بخش هندسی الأشکال الکریهٔ منلائوس

حسن امینی
دکتری فلسفه علم، مؤسسهٔ پژوهشی حکمت و فلسفهٔ ایران
ehsan_am@yahoo.com
(دریافت: ۱۳۹۳/۰۲/۱۰، پذیرش: ۱۳۹۳/۰۴/۳۰)

چکیده
می‌توان الأشکال الکریه از منلائوس را مهم‌ترین اثر در سنت نگارش کتاب‌های اکر دانست؛ کتاب‌هایی که با هدف حل مسائل نجوم کروی به رشتهٔ تحریر درآمده‌اند. کتاب اصول از اقلیدس نیز مهمترین اثر دربارهٔ هندسهٔ اشکال مسطحه در ریاضی باستان است. در مقالهٔ پیش رو نگارنده بر آن است که با قیاس میان کتاب الأشکال الکریه و اصول اقلیدس، نشان دهد که مقالهٔ اول الأشکال الکریه کوششی جهت بازسازی محتوای مقالهٔ اول اصول برای شکل‌های کروی است. بر اساس این قیاس، موفقیت‌ها و محدودیت‌های او در انجام چنین کاری بررسی می‌شود و با تکیه بر همنهشتی مثلث‌ها به تمایزهای قضایای آن در حالت مسطحه و کروی اشاره می‌شود. در ضمن نشان داده می‌شود که معادل قضیهٔ بسیار مهم هندسهٔ مسطحه برای مجموع زوایای داخلی مثلث، نخستین بار توسط خواجه نصیر الدین طوسی و در تحریر او از الأشکال الکریه بیان شده است.
کلیدواژه‌ها: الأشکال الکریه، اصول اقلیدس، منلائوس، هندسهٔ کروی، هندسهٔ مسطحه

الأشکال الکریه

ابن ندیم می‌نویسد که منلائوس[۱] قبل از بطلمیوس بوده است، زیرا بطلمیوس در مجسطی از او یاد کرده است و می‌افزاید که از جملهٔ آثار او کتاب «اصول هندسه» است که سه مقاله از آن را ثابت بن قره ترجمه کرده است و «کتاب المثلثات» که مقداری از آن به عربی وارد شده است و نیز اثری دارد به نام «کتاب الاشکال الکریه» (ص۳۲۷). آن‌چه از این آثار باقی مانده فقط همین اثر اخیر است.[۲] منلائوس الأشکال الکریه را بیش از دو قرن بعد از اکر تئودوسیوس، کتاب مهم دیگری در سنت نگارش اکر، در حدود سال ۱۰۰ بعد از میلاد نوشته است. الأشکال الکریهٔ منلائوس از اکر تئودوسیوس پیشرفته‌تر است اما از اصل یونانی آن فقط بخش‌های کوچکی از مقالهٔ اول در شرح تئون بر مجسطی به یونانی به جا مانده است و از بقیه قسمت‌ها فقط نسخه‌هایی به عربی و نیز ترجمه‌های عبری و لاتینی در دست است.از این رو است که ترجمه آن به عربی از نظر تاریخی دارای اهمیت فراوان است.

کتاب الأشکال الکریه در قرن سوم هجری چندین بار به عربی ترجمه شد و مورد اصلاح و شرح قرار گرفت.[۳]خواجه نصیر طوسی در مقدمهٔ خود بر تحریری که از آن کرده است اطلاعات مفیدی دربارهٔ ترجمه‌های آن به دست می‌دهد. او ذکر می‌کند که نسخه‌هایی به اصلاح ماهانی و ابوالفضل احمد ابن ابی سعد هروی (وفات بین ۳۸۰-۳۹۰ق) در دست داشته است که استدلالاتشان ناصحیح و ناکامل بودند تا

---

1. Menelaus of Alexandria (about 70-130 A.D.)

۲. اصول او به جا نمانده است اما نشانه‌هایی از آن در آثار سجزی دانشمند دورهٔ اسلامی باقی است (نک : Hogendijk, Jan P. “Traces of the Lost Geometrical Elements of Menelaus in Two Texts of al-Sijzī”, *Zeitschrift fur Geschichte der Arabisch Islamischen Wissenschaften* (2000), pp. 129-164. p. 135)

۳. برای جزئیات ترجمه‌های عربی نک :

M Krause, “De Sphärik von MenelaosausAlexandrien”, *Abhandlungen der Gesellschaft der WissenschaftenzuGöttingen* 17 (1936); G Yussupova, “Commentaries to Menelaus' Spherics by al-Tusi and al-Yazdi”, *Izv.Akad. Nauk USSR Ser. Fiz.-Mat.Nauk* (6) (1990), 40-43, 80; G Yussupova, “Zwei mittelalterliche arabische Ausgaben der 'Sphaerica' des Menelaos von Alexandria”, *Historia Math.* 22 (1) (1995), 64-66.

برای تصحیح و ترجمهٔ آلمانی نسخهٔ ابونصر عراق نک :

Krause, Max: Die Sphärik von Menelaosaus Alexandrien in der Verbesserungvon Abû Nasr Mansûr b. 'Alî b. 'Irâq. Berlin 1936. 382 pp. Repr. 1998 (Islamic Mathematics and Astronomy. 37)

برای تحریر خواجه نصیر نک :

نصیر الدین طوسی، تحریر اکر منلائوس، مجموع رسائل، ۱۳۵۹ق.

آن‌که اصلاح ابونصر عراق به دستش می‌رسد و او تحریر خود را بر اساس آن می‌نویسد. او همچنین می‌افزاید که بعضی ازنسخه‌هایی که در دست او بودند دارای دو مقاله هستند ولی بیشترشان در سه مقاله ترتیب یافته‌اند که به ترتیب سی و نه، بیست و چهار و بیست و پنج قضیه دارند. در اصلاح ابونصر عراق مقالهٔ دوم بیست و یک قضیه دارد. در نسخهٔ عدهٔ معدودی هم تعداد قضایا شصت و یک، هجده و دوازده است. اما در نسخه‌های دو مقاله‌ای، مقالهٔ اول شصت و یک قضیه و مقالهٔ دوم سی قضیه دارد. در نتیجه مجموع قضایا بین هشتاد و پنج قضیه تا نود و یک قضیه متغیر است (طوسی، صص۲-۳).

الأشکال الکریه را می‌توان از نظر موضوعی به دو بخش هندسی و نجومی تقسیم کرد. بخش هندسی، مجموعه‌ای است از قضایا که تمهیدی هندسی برای حل مسائل بخش دوم هستند. بخش دوم شامل قضایایی است که در واقع مسائل نجوم کروی هستند که با شکل‌های کروی بیان شده‌اند. بخش هندسی اکر منلائوس از قضیهٔ اول مقالهٔ اول آغاز می‌شود و تا قضیهٔ هفدهم مقالهٔ دوم در نسخهٔ ابن عراق و قضیهٔ بیستم از مقالهٔ دوم در تحریر طوسی ادامه دارد.

روش

از حیث روش اثبات در الأشکال الکریه به عدم استفاده از برهان خلف تأکید خاصی شده است. در مقدمه‌ای که در نسخهٔ ابن عراق وجود دارد از قول منلائوس گفته می‌شود که او کوشیده است تا در اثبات‌های این کتاب از برهان خلف پرهیز کند («یجب فیها بالطریق المستقیم»؛ کراوزه،[1] ص۱)، خواجه نصیر نیز در مقدمه‌اش متذکر شده که در این کتاب سعی شده است تا از براهین خلف استفاده نشود و آن را در تقابل با روش مذکور در اکر تئودوسیوس می‌داند زیرا او درکتابش از برهان خلف و براهین جزئی برای موضوعات کلی استفاده کرده است. در الأشکال الکریهٔ منلائوس به‌وضوح می‌توان تلاش برای اجتناب از اثبات‌های غیر مستقیم را مشاهده کرد. با بررسی اثبات‌های رساله نیز معلوم است که برخی از قضایا که نظایر مسطح آن‌ها در اصول به شکل خلف اثبات شده است، در رسالهٔ الأشکال الکریه منلائوس به صورت مستقیم اثبات شده‌اند. با این حال خواجه در تحریر خود پس از بیان اثبات مستقیم منلائوس برای قضیه‌ای در بخش هندسی الأشکال الکریه اثبات خلفی نیز به دست

1. Krause

داده است. این قضیه، قضیهٔ بیست و یکم از مقالهٔ اول است، خواجه نصیر پس از ارائهٔ برهان خود افزوده است که:

لکن هذا البیان لا یناسب کلام مانالاوس لأنّه لا یستعمل الخلف.[۱]

مقدمات

مقالهٔ اول به سبک بیشتر رسالات این سنت با ذکر مقدمات آغاز می‌شود، در تحریر طوسی این مقدمات ذیل عنوان «مصادرات» آمده‌اند در حالی که طوسی در اکر تئودوسیوس برای این مقدمات عنوان «حدود» را که به معنای تعاریف است، انتخاب کرده است و حتی در مورد اصول موضوعه‌ای هم که بر آن افزوده به عبارت «و ینبغي أن نسلّم أنّ لَنا»[۲] بسنده کرده است. این مصادرات به قرار زیرند:

۱. اشکال کروی همان‌گونه شناخته می‌شوند که اشکال مستقیم‌الخط شناخته می‌شوند جز آن‌که ضلع‌های آن‌ها کمان‌هایی از دوایر عظیمه کوچکتر از نصف دایره هستند: آن‌چه سه ضلع به آن محیط است سه‌ضلعی یا مثلث است و چهارضلعی نیز همین طور تعریف می‌شود.

۲. زاویای شکل آن است که اضلاع به آن محیط هستند و اگر سطح یکی از دو دایره بر دیگری با زاویهٔ قائمه عمود باشد، محیط آن‌دو دایره یکدیگر را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کند و آن‌چه از آن کمتر است حاده و آن‌چه از آن بیشتر است منفرجه نامیده می‌شود.

۳. واضح است که سطحی که میلش بر سطح دیگر بیشتر است زاویه‌اش کوچکتر است و اگر میل سطحی بر سطح دیگر برابر میل سطحی دیگر بر سطحی دیگر باشد زاویه‌ای که نیم دایرهٔ آن دو سطح به آن محیط است با زاویه‌ای که نیم دایرهٔ دو سطح دیگر به آن محیط است برابر می‌باشد.

۴. تساوی آن دو از روی تساوی قوس میلشان فهمیده می‌شود و منظور از قوس میل، قوس وتر آن زاویه روی دایرهٔ عظیمه‌ای است که دو ضلع آن زاویه از دو قطبش می‌گذرند و اگر اندازهٔ این میل را به اندازهٔ میل نصف دایره‌ها محدود کنیم در این‌صورت میل هر قوس غیر نصف به اندازهٔ قوسی است که از انتهای آن قوس خارج می‌شود و به صورت عمود بر دایرهٔ دیگری می‌رسد.

---

۱. لکن این بیان با کلام منلائوس متناسب نیست زیرا او از برهان خلف استفاده نمی‌کند.

۲. و شایسته است که مسلم بدانیم که

واضح است که در بین این مصادرات، مصادرهٔ اول و دوم، می‌کوشند تا شکل و زاویهٔ مسطحه را با تعریفی به روی دایره ببرند. موضوع اصلی این است که با مشابه قرار دادن قوس روی کره با پاره خط روی صفحه و ارائهٔ تعریفی مشابه برای زاویه روی کره می‌توان قضایای هندسی مسطحه را روی کره نیز برقرار دانست. اما باید در نظر داشت که این شکل مقدمه متعلق به تحریر خواجه است و نسخهٔ ابن عراق که اصلاح ترجمهٔ متن یونانی است به جای آن‌چه گفته شد مطالب زیر را می‌آورد بی‌آنکه آن را از توضیحات قبلی جدا کند و نام مصادرات بر آن نهد:

۱. شکلی از شکل‌های روی کره که آن را سه‌ضلعی («ذا ثلاثة الاضلاع») می‌نامیم آن است که سه کمان از دایره‌های عظیمه به آن محیط هستند که هر کمانی کوچکتر از نصف دایره است، و زاویه‌های آن سه‌ضلعی آن‌هایی است که این کمان‌ها به آنها محیط هستند تا این‌که سطح واحد مثلث حاصل شود و این کمان‌ها به آن محیط باشند.

۲. زاویه‌هایی که زاویه‌های مساوی نامیده می‌شوند دایره‌های عظیمه‌ای به آنها محیط هستند و قوس‌های میلِ نصف این دایره‌ها مساوی هستند یعنی قوسی که بین دو دایره قرار دارد از دایره‌ای که به دو قطب آن دو می‌گذرد (کراوزه، صص۲-۳).

برخلاف خواجه که قصد دارد شکل‌های کروی را در برقراری نوعی قیاس با شکل‌های مسطحه تعریف کند، در نسخهٔ یونانی تعریف مثلث کروی مستقلاً صورت پذیرفته است. می‌توان چنین برداشت کرد که در نسخهٔ یونانی این تعمیم خواجه وجود نداشته است و بیش از آن‌که نظر به ضلع‌های شکل‌های روی کره باشد به مثلث کروی به عنوان شکل اساسی و سازندهٔ رساله بوده است. در واقع همین شکل ساده‌تر نیز با قالب رساله سازگارتر است و به نظر می‌رسد تعمیم خواجه نصیر در راستای تشابهی بوده است که قصد داشته است میان هندسهٔ مسطحه و هندسهٔ کروی برقرار کند.

دو مصادرهٔ سوم و چهارم در تحریر طوسی، که مشخصاً تعریف هستند، در ارتباط مستقیم با سه تعریف ششم، هفتم از مقالهٔ یازدهم اصول قرار دارند. این تعاریف در اصول به این قرارند:

- میل یک صفحه نسبت به صفحهٔ دیگر زاویهٔ حادهٔ حاصل از دو خط راست عمود بر فصل مشترک از یک نقطه از فصل مشترک در دو صفحه است.
- یک صفحه نسبت به یک صفحه را با یک صفحه نسبت به صفحهٔ دیگر متساوی المیل گویند اگر زاویه‌های میل آنها نسبت به هم متساوی باشند.

در الأشکال الکریه کوشش شده است که این تعاریف به روی سطح کره انتقال داده شوند، همانطور که در مصادرهٔ چهارم مشاهده می‌شود، به جای زاویه از قوس مربوط به آن استفاده شده است. جالب آن‌که تلاش نشده است تعریفی مشابه تعریف هشتم از مقالهٔ یازدهم اصول، که در ادامهٔ همین دو تعریف است، ارائه شود. مطابق این تعریف صفحه‌های متوازی صفحه‌هایی هستند که یکدیگر را قطع نمی‌کنند. چنین کاری می‌تواند بیانگر نوعی اجتناب از به کار گرفتن مفهوم توازی در مقدمات باشد. زیرا باید دانست که روی کره اصل توازی برقرار نیست.

قضایای مشابه

اما کار بدیع منلائوس این است که با برقراری تشابه میان اشکال مسطح و کروی می‌کوشد تا قضایا را روی سطح کره اثبات کند؛ کاری که در سنت اکر و در آثار پیش از او بی‌سابقه بوده است. شاید عنوان الأشکال الکریه در مقابل اکر با توجه به همین تفاوت عمده باشد. او برای انجام دادن چنین کاری مقالهٔ اول را با قضایایی در مورد مثلث کروی تنظیم می‌کند، چنان‌که اقلیدس نیز مقالهٔ اول اصول را برای مثلث‌های مسطحه تنظیم کرده بود. در ابتدای مقالهٔ اول این رساله برای نخستین بار مثلث کروی بر اساس کمان‌های دایره تعریف می‌شود.

در این مقاله نظیر عمدهٔ قضایای مقالهٔ اول اصول اقلیدس، که برای مثلث‌های مسطحه اثبات شده بودند، این بار برای مثلث‌های کروی تنظیم و اثبات شده است. قضیهٔ اول از مقالهٔ اول تنها قضیهٔ بخش هندسی است که مستقیماً دربارهٔ مثلث کروی نیست.

قضیهٔ اول از مقالهٔ اول

> نرید أن نُبیّنَ کیف نُقیم علی قوس معلومة من دایرة عظیمة علی نقطة منها معلومة زاویة مساویة لزاویة معلومة یُحیط بها دائرتان عظیمتان.[۱]

این قضیه، قضیهٔ انتقال یک زاویهٔ کروی است. در اصول قضیه‌ای برای یک زاویهٔ مسطحه وجود ندارد. قضیهٔ دوم از مقالهٔ اول که یک ساخت است امکان داشتن خطی برابر با خطی دیگر را در هندسهٔ اصول فراهم می‌آورد. این قضیه می‌گوید:

---

۱. می‌خواهیم بیان کنیم که چگونه بر یک نقطه از قوس معلومی از یک دایرهٔ عظیمه، زاویه‌ای برابر زاویهٔ معلوم دیگری قرار دهیم که دو دایرهٔ عظیمه آن را محاط کرده‌اند.

> مطلوب رسم خط راستی است از یک نقطهٔ مفروض، مساوی با خط راستی مفروض که آن نقطه یک سر آن باشد.

اما انتقال یک زاویه در اصول پیش از اثبات قضایای بیست و نهم تا سی و یکم که مبتنی بر اصل توازی هستند ممکن نیست، لذا اقلیدس تلویحاً در اثبات قضیهٔ چهارم از مقالهٔ اول از انتقال زاویه استفاده کرده است.[1] این یکی از شکاف‌های شناخت‌شناسانهٔ اصول است، اگر چه کل موضوع انتقال و حرکت در هندسه به‌خصوص در دورهٔ علم اسلامی مورد اعتراض بود. در الأشکال الکریه از آنجا که دیگر اصل توازی موضوعیت ندارد، منلائوس انتقال زاویه را از همان ابتدا به عنوان قضیهٔ اساسی هندسهٔ خود بنا نهاده است تا با آن امکان ساخت مثلث کروی را فراهم آورد. این تک قضیه باید همان نقشی را بازی کند که چهار قضیهٔ اول اصول بازی می‌کنند، یعنی ساختن یک مثلث دلخواه.

حال ادامهٔ راه نیز با توجه به اصول طی می‌شود. قضایای دوم و سوم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه مشابه قضایای پنجم و ششم از مقالهٔ اول اصول هستند، با این تفاوت که قضایای اصول برای اثبات تساوی زوایای مجاور به دو ضلع در مثلث متساوی‌الساقینِ مسطح وعکس آن و قضایای الأشکال الکریه برای اثبات تساوی زوایای مجاور به دو ضلع و عکس آن در مثلث متساوی الساقین کروی هستند.

قضیهٔ دوم از مقالهٔ اول

> کلّ شکل ذي ثلاثة اضلاع متساوي الساقین فإنّ زاویتیه اللتین علي القاعدة متساویتان.

قضیهٔ سوم از مقالهٔ اول

> إذا کانت زاویتان من زوایا شکل ذي ثلاثة اضلاع متساویتین فإنّ الضلعین الذین یوتّرانهما متساویان.

قضیه‌های چهارم، پنجم، ششم، هفتم، هشتم و نهم از الأشکال الکریه نیز مشابه قضیه‌های هشتم، بیستم، بیست و یکم، نوزدهم، بیست و چهارم و هجدهم از مقالهٔ اول اصول هستند.

---

1. Mueller, I., 1981, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge, MIT Press, pp. 21-22.

قضیهٔ چهارم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه

إذا کان ضلعان من شکل ذي ثلاثة أضلاع مساويين لضلعين من شکل آخَر ذي ثلاثة أضلاع کل لنظيره و کانت القاعدة مساوية للقاعدة فإنّ زاويتي الشکلين اللتين يحيط بهما الأضلاع المتساوية متساويتان و إن کانت الزاوية مساوية للزاوية فإن القاعدة مساوية للقاعدة.

قضیهٔ هشتم از مقالهٔ اول اصول

اگر دو ضلع از مثلثی به ترتیب با دو ضلع از مثلثی دیگر مساوی و قاعده‌های آنها هم با یکدیگر مساوی باشند، زاویه‌های بین آن دو ضلع متساوی هم با یکدیگر مساویند

(قضیهٔ الأشکال الکریه شامل عکس قضیه نیز می‌شود.)

قضیهٔ پنجم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه

کل شکل ذي ثلاثة أضلاع فإنّ کل ضلعين من أضلاعه أي ضلعين کانا أعظم من الضلع الباقي.

قضیهٔ بیستم از مقالهٔ اول اصول

در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

قضیهٔ ششم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه

إذا قام على ضلع من أضلاع شکل ذي ثلاثة أضلاع ضلعان آخَران من غير أضلاع ذلک الشکل فالتقيا في داخل ذلک الشکل فإنّهما أصغر من ضلعي ذلک الشکل الأوّل.

قضیهٔ بیست و یکم از مقالهٔ اول اصول

اگر از دو سر یک ضلع مثلثی و در یک طرف آن دو خط راست چنان رسم کنیم که یکدیگر را در داخل مثلث ببرند، مجموع این دو خط راست از مجموع دو ضلع دیگر مثلث کوچک‌تر ولی زاویهٔ بین آن دو از زاویهٔ سوم بزرگ‌تر است.

(قضیهٔ الأشکال الکریه بخش مقایسهٔ زاویه سوم را ندارد.)

قضیهٔ هفتم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه

کل شکل ذي ثلاثة أضلاع فإنّ الزاوية العظمی منه يوترها الضلع الأطول.

قضیهٔ نوزدهم از مقالهٔ اول اصول

در هر مثلث زاویهٔ بزرگ‌تر، روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است.

قضیهٔ هشتم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه

إذا کان شکلان ذوا ثلاثة أضلاع وکان ضلعان من أحدي مساويين لضلعين من الآخَر کل ضلع لنظيره و کانت الزاوية التي يحيط بها الضلعان مساويان للآخرين من أحدهما أعظم من نظيرتها من الآخر فإنّ القاعدة أعظم من القاعدة.

قضیهٔ بیست و چهارم از مقالهٔ اول اصول

هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر به نظیر متساوی باشند ولی زاویهٔ بین آنها در یکی از زاویهٔ نظیرش در دیگری بزرگ‌تر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر هم در یکی از ضلع متناظرش در دیگری بزرگ‌تر است.

قضیهٔ نهم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه

کلّ شکل ذي ثلاثة أضلاع فإنّ ضلعه الأطول يوتر الزاوية العظمی.

قضیهٔ هجدهم از مقالهٔ اول اصول

در هر مثلث ضلع بزرگ‌تر، روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر است.

قضایای متفاوت

داستان مشابهت‌ها به این‌جا خاتمه نمی‌یابد، اما آن‌چه می‌تواند برای تحقیق ما حائز اهمیت باشد جایی است که این تشابه‌ها تمام می‌شود. در واقع جایی است که مثلث کروی در هندسهٔ کروی خصوصیات متفاوتی از مثلث مسطحه در هندسهٔ اصول دارد. مثال واضح چنین قضایایی، قضیهٔ دهم و یازدهم الأشکال الکریه است.

قضیهٔ دهم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه

إذا کان ضلعان من شکل ذي ثلاثة الأضلاع أقلّ من نصف دائرة فإنّ الزاوية الخارجة التي تلي الضلع أعظم من زاوية الداخلة المتقابلة لها من الزاويتين

> اللتين على الضلع الباقي و إن كان الضلعان منه أعظم من نصف دايرة فإنّ الزاوية الخارجه أصغر من الداخلة التي تقابلها و إن كان ضلعان مساويين لنصف دايرة فإنّ الزاوية الخارجة مساوية للداخلة التي تقابلها.[۱]

درهندسهٔ مسطحه تنها بخش اول قضیه صادق است، که می‌شود قضیهٔ شانزدهم از مقالهٔ اول اصول که می‌گوید: در هر مثلث اگر یکی از ضلع‌ها را امتداد دهیم زاویهٔ خارجی حاصل، از هر یک از زاویه‌های داخلی غیر مجاور با آن بزرگ‌تر است.

دو حالت بعدی مختص مثلث کروی است. یعنی با توجه به این قضیه می‌توان فهمید که قانونی که در مورد تمامی مثلث‌های مسطحه برقرار است وقتی مثلث کروی باشد برای یک حالت خاص از مثلث کروی، یعنی آن مثلث کروی که اضلاعش از نیم دایره کوچک‌ترند، صادق است. این قضیه تفاوت بخشی از مثلث‌های کروی با مثلث مسطحه را نشان می‌دهد، یعنی همچنان می‌توان شباهتی پیدا کرد، اما قضیهٔ یازدهم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه، خصوصیتی در مورد تمام مثلث‌های کروی اثبات می‌کند که در مورد تمام مثلث‌های مسطح صدق نمی‌کند.

قضیهٔ یازدهم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه

> كل شكل ذي ثلاثة أضلاع فإنّ زاويته الخارجة أصغر من الزاويتين الداخلتين المتقابلتين لها.[۲]

این قضیه اگر چه در هندسهٔ مسطحه صدق نمی‌کند اما نظیری برای مثلث کروی دارد. نظیر قضیهٔ فوق الذکر در هندسهٔ مسطحه یکی از مهم‌ترین قضیه‌های اصول است و اثبات آن ارتباط مستقیم با اصل توازی دارد. این قضیهٔ مهم قضیهٔ سی و دوم از مقالهٔ اول اصول است که می‌گوید: در هر مثلث اگر یک ضلع را امتداد دهیم زاویهٔ خارجی حاصل با دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور با آن مساوی است و سه زاویهٔ داخلی مثلث برابر با دو قائمه است.

در اثبات این قضیه از دو قضیهٔ بیست و نهم و سی و یکم استفاده می‌شود، که هر دو قضیه مستقیماً بر اصل توازی مبتنی هستند. این قضیه نخستین قضیه‌ای است که

---

۱. اگر دو ضلع از یک شکل سه‌ضلعی از نصف دایره کوچک‌تر باشند، پس زاویهٔ خارجی مجاور به ضلع، از هر یک از زوایای داخلی که روی ضلع دیگر هستند بزرگ‌تر است، و اگر دو ضلع از نصف دایره بزرگ‌تر باشند، پس زاویهٔ خارجی کوچکتر از زاویهٔ داخلی متقابل آن است، و اگر اضلاع مساوی نصف دایره باشند، زاویهٔ خارجی با زاویهٔ داخلی متقابل آن برابر است.

۲. در هر شکل سه‌ضلعی زاویهٔ خارجی کوچک‌تر از [مجموع] دو زاویهٔ داخلی متقابل به آن است.

در اصول پس از استفاده از اصل توازی برای اثبات قضایایی دربارهٔ خطوط موازی می‌آید.

بخش دوم این قضیه که صد و هشتاد درجه بودن مجموع زوایای داخلی مثلث است، یکی از معادل‌های اصل توازی است. اگر چه در ترجمهٔ عربی ابن عراق و احتمالاً در اصل یونانی اشاره‌ای به بخش مجموع زوایای داخلی مثلث کروی نشده است (کراوزه، ص۹۰) اما در تحریر طوسی «و جمیع زوایاه الثلاث أعظم من قائمتین» به انتهای صورت قضیه اضافه شده است (طوسی، ص۱۱). این قضیه نشان می‌دهند که مجموع زوایای داخلی یک مثلث کروی می‌تواند بیش از دو قائمه باشد. امروزه می‌دانیم که این مقدار بیشتر که «اضافهٔ زاویه‌ای»[1] نامیده می‌شود با مساحت مثلث متناسب است و اگر مثلث کروی را به دو مثلث تقسیم کنیم مجموع اضافهٔ زاویه‌ای آن دو مثلث برابر اضافهٔ زاویه‌ای مثلث اصلی خواهد بود.

همنهشتی مثلث‌ها

مسألهٔ دیگر در مورد متفاوت بودن مثلث کروی در مورد همنهشتی‌ها است. برای همنهشتی مثلث‌های مسطحه می‌توان به حصر منطقی چهار حالت را لحاظ کرد. اثبات همنهشتی مثلث‌ها به اصل توازی ربطی ندارد، به همین لحاظ سه قضیه‌ای که در اصول عهده‌دار اثبات آنها هستند قبل از قضیهٔ بیست و نهم آمده‌اند. قضیهٔ چهارم از مقالهٔ اول همنهشتی دو مثلث را در حالت دو ضلع و زاویهٔ نظیر بین آنها، قضیهٔ هشتم از مقالهٔ اول همنهشتی دو مثلث را در حالت برابری سه ضلع نظیر و قضیهٔ بیست و ششم از مقالهٔ اول همنهشتی دو مثلث را در حالت دو زاویه و یک ضلع نظیر بیان می‌کنند.[2] حالت چهارمی هست که در اصول اثبات نشده است و آن همنهشتی دو مثلث در حالت تساوی دو ضلع نظیر و زاویهٔ نظیر مقابل ضلع بزرگتر است، صورت خاصی از این حالت یعنی وقتی‌که زاویهٔ مورد نظر قائمه باشد در جریان اثبات قضیهٔ چهاردهم از مقالهٔ سوم اصول اثبات شده است.

در بخش هندسی الأشکال الکریه شرایط همنهشتی دو مثلث کروی در نظر گرفته شده است. برخی از این قضایا مشابه شکل مسطح قضیه هستند. چنان‌که قضیهٔ چهارم

1. Angular Excess

۲. اقلیدس از مفهوم همنهشتی (Congruence) صحبت نمی‌کند و وقتی می‌گوید دو مثلث مساوی هستند یعنی سه زاویهٔ نظیر و سه ضلع نظیر آنها برابر و مساحت آنها برابر می‌باشد.

مقالهٔ اول الأشکال الکریه مانند قضیهٔ هشتم از مقالهٔ اول اصول همنهشتی را در حالت برابری سه ضلع نظیر اثبات می‌کند.

اگر چه همنهشتی مثلث‌ها مبتنی بر اصل توازی نیست، و چنان‌که دیدیم قضایای آن در اصول پیش از نخستین استفاده از اصل توازی آمده بودند، اما تفاوت سطح کروی با صفحه حالت دیگری را روی کره ایجاد می‌کند که در این حالت تناظری بین حالت همنهشتی مثلث کروی و مثلث مسطحه وجود ندارد و آن همنهشتی در حالت برابری سه زاویهٔ نظیر است. زیرا در حالی‌که در روی صفحه می‌توان بی‌شمار مثلث متشابه با سه زاویهٔ نظیر برابر و اندازهٔ متفاوت ساخت، اما روی یک کرهٔ مشخص اندازهٔ اضلاع و مساحت تمام مثلث‌هایی که زاویه‌های نظیر برابر دارند یکی است. در واقع روی کره هیچ دو مثلث متشابهی که با هم برابر نباشند وجود ندارد. به این تفاوت در قضیهٔ هجدهم از مقالهٔ اول الأشکال الکریه توجه شده است که متن آن از این قرار است:

> إذا کان شکلان ذوا ثلاثة الأضلاع و کانت الزوایا الثلاث من أحدهما مساویة للزوایا الثلاث من الآخَر أعني کل زاویة تساوي نظیرتها فإنّ الأضلاع التي توترها الزوایا المتساویة متساویة.

اما برای همنهشتی دو مثلث در حالات دیگر قضایای زیر بیان شده‌اند:
قضیهٔ دوازدهم از مقالهٔ اول

> إذا کان شکلان ذوا ثلاثة أضلاع و کانت زاویتان من زوایاهما التي عند القاعدتین قائمتین و کانت الزاویتان الباقیتان منهما متساویتین غیر قائمتین وکان الضلعان اللذان یوتران الزاویتین القائمتین متساویین فإنّ الضلعین الباقیین من أحد المثلثین مساویان للضلعین من الآخَر کل ضلع للنظیره.

مطابق این قضیه دو مثلث کروی با هم همنهشت هستند در حالتی که این اجزای نظیر از دو مثلث برابر باشند: یک زاویهٔ قائمهٔ مجاور به قاعده، یک زاویهٔ غیرقائمه و وتر زاویهٔ قائمه؛ که شکل خاصی از همنهشتی در حالت دو زاویه و یک ضلع است.
قضیهٔ سیزدهم از مقالهٔ اول

> إذا کان شکلان ذوا ثلاثة الأضلاع و کانت زاویة من أحدهما مساویة لزاویة من الآخَر و کان الضلعان من أحدهما المحیطان بزاویة من الزاویتین الباقیتین من

أحد الشكلين مساويين للضلعين للمحيطين بنظيرة تلك الزاوية من الشكل الآخَر كل ضلع لنظيره وكانت الزاويتان الباقيتين من الشكلين متساويتان.

مطابق این قضیه دو مثلث کروی با هم همنهشت هستند در حالتی که این اجزای نظیر از دو مثلث برابر باشند: یک زاویه و دو ضلع زاویه‌ای دیگر؛ که تعمیمی از همنهشتی در حالت دو ضلع و زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است.

قضیهٔ چهاردهم از مقالهٔ اول

إذا كان شكلان ذوا ثلاثة أضلاع و كانت زاويتان من أحدهما مساويتين لزاويتين من الأخَر كل زاوية لنظيرتها وكان الضلعان اللذان يليان الزوايا المتساوية متساويين فإنّ الأضلاع الباقية من المثلثين متساوية.

مطابق این قضیه دو مثلث کروی با هم همنهشت هستند در حالتی که این اجزای نظیر از دو مثلث برابر باشند: دو زاویه و ضلع بین آن دو زاویه؛ که شکل خاصی از همنهشتی در حالت دو زاویه و ضلع است. در اثبات قضیهٔ چهاردهم تنها حالت خاصی که زوایا قائمه باشند اثبات شده است، و قضیهٔ پانزدهم اثبات قضیه در حالت کلی است.

قضیهٔ شانزدهم از مقالهٔ اول

إذا كان شكلان ذوا ثلاثة أضلاع وكان ضلعان من أحدهما مساويين لضلعين من الآخَر كل ضلع لنظيره وكانت الزوايا التي توترها الأضلاع المتساوية متساوية ولم تكن واحدة من النقطتين على رأسي الشكلين قطبا لقاعدة ذلك الشكل فإنّ القاعدتين متساويتان.

مطابق این قضیه دو مثلث کروی با هم همنهشت هستند در حالتی که این اجزای نظیر از دو مثلث برابر باشند: دو ضلع، دو زاویهٔ مقابل به آن دو ضلع و نقاط رأس مثلث‌ها قطب قاعدهٔ آنها نباشند. با تساوی دو ضلع از فرض و قاعده از حکم دو مثلث در حالت سه ضلع همنهشت می‌شوند.

قضیهٔ هفدهم از مقالهٔ اول

إذا كان شكلان ذوا ثلاثة أضلاع وكانت زاويتان من أحدهما مساويتين لزاويتين من الآخَر كل زاوية لنظيرتها وكان أحد الضلعين اللذين يوتران الزاويتين من أحدهما المساويتين لزاويتي الآخَر مساويا لنظيره من المثلث الآخَر أعني الذي يوتر الزاوية المساوية لتلك الزاوية في المثلث الآخَر ولم

یکن الضلعان الباقیان من الاضلاع التي توتر الزوایا المتساویة إذا جمعا [مساویین] لنصف دائرة فإنّ باقي أضلاع المثلثین متساویة.[۱]

مطابق این قضیه دو مثلث کروی با هم همنهشت هستند در حالتی که این اجزای نظیر از دو مثلث برابر باشند: دو زاویه، ضلع روبه‌رو به یکی از آن دو زاویه و مجموع ضلع روبه‌رو به زاویهٔ مساوی دیگر در دو مثلث برابر نصف دایره نباشد. که با تساوی یک ضلع از فرض و دو ضلع از حکم در حالت سه ضلع دو مثلث همنهشت می‌شوند.

خواجه نصیر در تحریر خود می‌نویسد که در مورد این شکل هفت اختلاف وجود دارد. سپس اضافه می‌کند که در بعضی نسخ این را که مجموع ضلع بین دو زاویهٔ مساوی نیز با نظیرش در مثلث دیگر مساوی نصف دایرهٔ عظیمه نباشند شرط کرده‌اند و برای تحقیق در مورد آن باید هر یک را یک ربع دایرهٔ عظیمه در نظر گرفت، خواجه سپس با این فرض و با استفاده از برهان خلف به تناقض می‌رسد اما می‌گوید این تناقض به این معنی نیست که نقیض فرض درست است بلکه از این تناقض نتیجه می‌شود که با این شرط نمی‌توان قضیه را اثبات کرد. سپس دو حالت دیگر را که در آن هر دو ضلع نظیر مقابل به دو زاویه مجموعشان برابر نصف دایره باشد و حالتی که دو ضلع نظیر در دو مثلث مساوی نباشند ولی مجموعشان مساوی نصف دایره باشد بیان می‌کند و نشان می‌دهد که آن دو هم به مطلوب منجر نمی‌شوند. و می‌گوید که بیان تساوی دو مثلث در حالتی‌که مجموع هر دو ضلع نظیر بدون این‌که ما بدانیم با هم برابرند مساوی نصف دایرهٔ عظیمه نیست باقی می‌ماند. و در انتها می‌گوید که:

و اما منلائوس فلم یر لاشتراط عدم ما هو نقیض للوضع وجهاً ولذلک اقتصر علی اشتراط عدم ما هو غیر مؤد الی المطلوب.[۲]

این تحلیل دقیق شروط در تحریر خواجه نصیر نشان دهندهٔ آن است که او می‌کوشیده علاوه بر شروط کافی، شروط لازم را نیز تحلیل نماید. این گرایش او در رسالهٔ کشف القناع عن اسرار الشکل القطاع بروز مشخصی دارد.

---

۱. صورت قضیه در تحریر خواجه با توضیح بیشتری آمده است ولی معادل با بیان ابن عراق است: کل مثلثین ساوی زاویتان وضلع لیس بینهما من أحدهما نظائرها من الآخَر وکان الضلع الباقي من الموترین لتینک الزاویتین مع نظیره غیر معادل لنصف عظیمة فإنّ الضلعین الآخَرین والزاویة الباقیة من أحدهما مساویة لنظائرها من الآخَر.

۲. و اما منلائوس نظرش این نبود که نبودن وجوهی را که با فرض در تناقض است شرط کند و به شروطی که نبودنش باعث به نتیجه نرسیدن می‌شود بسنده کرده است.

نتیجه

در انتها می‌توان گفت که الأشکال الکریه (اکر) منلائوس تلاشی برای بازسازی فصل اول اصول اقلیدس روی کره است و این کوشش منجر به مشخص شدن برخی از تفاوت‌ها میان قضایای معادل مسطحه و کروی شده است. لذا می‌توان دانست که ریاضی‌دانان قدیم به برخی از مهم‌ترین تمایزات و تشابهات میان آن‌چه امروزهٔ هندسه اقلیدسی و هندسه کروی می‌نامیم آگاهی داشته‌اند و نیز می‌توان کار منلائوس را تلاش برای بنیان نهادن نوعی هندسهٔ کروی دانست. این مسیر را طوسی به‌دقت پی گرفته است و معادل مهم قضیهٔ مجموع زوایای داخلی مثلث برای هندسهٔ کروی را بیان کرده است.

منابع

ابن ندیم، الفهرست، به کوشش گوستاو فلوگل، لایپزیگ، ۲-۱۸۷۱م (افست از مکتبة الخیاط، بیروت، [بی تا]).

نصیرالدین طوسی، تحریر اشکال الکریه منلائوس، مجموع الرسائل، حیدرآباد دکن، ۱۳۵۹.

Hogendijk, Jan P. “Traces of the Lost Geometrical Elements of Menelaus in Two Texts of al-Sijzī”, *Zeitschrift fur Geschichte der Arabisch Islamischen Wissenschaften* (2000), pp. 129-164.

Krause, M., “De Sphärik von MenelaosausAlexandrien”, *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, No.17, 1936.

———, *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abû Nasr Mansûr b. ‘Alî b. ‘Irâq*, Berlin, 1936 (Reprinted in *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 37, 1998)

Mueller, I., 1981, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid’s Elements*, Cambridge: MIT Press.

Heath, Thomas Little, *The thirteen books of Euclid’s Elements*. Courier Corporation, 1956.

Yussupova, G, “Commentaries to Menelaus' Spherics by al-Tusi and al-Yazdi”, *Izv.Akad. Nauk USSR Ser. Fiz.-Mat.Nauk* (6), 1990.

———, “Zwei mittelalterliche arabische Ausgaben der 'Sphaerica' des Menelaos von Alexandria”, *Historia Math.* 22 (1), 1995, pp. 64-66.