مدل کنترل موجودی تصادفی چندمحصولی با درنظرگرفتن ضایعات تحت سیاست پرداخت معوقه

عطاالله طالعی‌زاده[۱*] و محمد حسنی[۲]

۱. استادیار دانشکدهٔ مهندسی صنایع دانشگاه تهران

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکدهٔ مهندسی صنایع دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب

(تاریخ دریافت ۹۳/۰۸/۰۷ ـ تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۳/۱۲/۱۹ ـ تاریخ تصویب ۹۳/۱۲/۲۷)

چکیده

مدل مقدار تولید اقتصادی، یکی از مدل‌های کلاسیک کنترل موجودی است که به‌طور گسترده به‌کار می‌رود. این مدل فرضیه‌های متفاوتی دارد که استفاده از آن را در شرایط واقعی محدود می‌کند. در اغلب پژوهش‌ها فرض بر این است که کیفیت تمامی قطعات تولیدی، کامل و مناسب است، اما در عمل ممکن است درنتیجهٔ عوامل مختلف مانند کیفیت پایین تولید، مواد اولیهٔ معیوب و...، قطعاتی نامرغوب تولید شوند. از سوی دیگر، در سیستم‌های کنترل موجودی کلاسیک، همواره فرض بر این است که تولیدکننده به‌محض دریافت کالا هزینهٔ آن را پرداخت می‌کند؛ درحالی‌که ممکن است تأمین‌کننده به‌عنوان یک سیاست تشویقی برای جذب مشتریان بیشتر، برای بازپرداخت بدهی، مهلت معینی به تولیدکننده بدهد. در این مقاله، یک مدل مقدار تولید اقتصادی چندکالایی، با درنظرگرفتن تولید کالای معیوب، دوباره‌کاری و سیاست پرداخت معوقه در شرایط ظرفیت محدود تولید، توسعه داده می‌شود. در این پژوهش با استفاده از روشی جبری به حل مدل پرداخته می‌شود. هدف اصلی تعیین حجم تولید بهینه، حجم کمبود بهینه و طول سیکل بهینه است؛ به‌نحوی‌که هزینهٔ تولیدکننده مینیمم شود.

واژه‌های کلیدی: اقلام معیوب، پرداخت معوقه، دوباره‌کاری، کنترل موجودی.

مقدمه

یکی از مدل‌های پرکاربرد کنترل موجودی، مدل مقدار تولید اقتصادی است. فرض‌هایی که در این مدل به کار رفته است، کاربرد آن‌ها را برای شرایط کنونی سیستم‌های تولیدی محدود می‌کند. پس این روش‌ها باید تا حد امکان کنار گذاشته شوند. در اغلب پژوهش‌ها فرض بر این است که کیفیت تمامی قطعات تولیدی، کامل و مناسب است، اما در عمل ممکن است درنتیجهٔ عوامل مختلف مانند کیفیت پایین تولید، مواد اولیهٔ معیوب و...، قطعات نامرغوبی تولید شوند. در سال‌های اخیر، مسئلهٔ میزان تولید اقتصادی با درنظرگرفتن دوباره‌کاری قطعات معیوب، از سوی پژوهشگران بررسی شده است. در مطالعهٔ حاضر فرض شده است که تمامی قطعات، پس از دوباره‌کاری به قطعهٔ سالم تبدیل شده‌اند و هیچ‌گونه ضایعاتی تولید نمی‌شود. همچنین تأثیر تولید کالای معیوب و هزینهٔ ایجاد شده به‌دلیل فرایند دوباره‌کاری[۱] در تعیین میزان بهینهٔ انباشته، بررسی و مقدار بهینه از طریق کمینه‌کردن هزینه‌های کل سیستم ارائه می‌شود. از سوی دیگر، یکی از فرضیه‌های اصلی در سیستم‌های کنترل موجودی کلاسیک، همواره این بوده است که تولیدکننده به‌محض دریافت کالا، پرداخت هزینهٔ خرید کالا را پرداخت کند؛ درحالی‌که در واقعیت ممکن است تأمین‌کننده، برای پرداخت هزینه، به تولیدکننده مهلت معینی بدهد. این شیوه که به معاملهٔ اعتباری[۲] معروف است- به‌عنوان سیاست تشویقی برای جذب مشتریان بیشتر، از سوی تأمین‌کنندگان اعمال می‌شود. نکتهٔ شایان‌توجه این است که تولیدکننده می‌تواند در هر زمان از دورهٔ اعتباری تخصیص‌یافته‌اش، بدهی خود را بازپرداخت کند و هیچ‌گونه بهرهٔ اضافه نپردازد. به‌عبارت دیگر، در سیستم کنترل موجودی در خرید اعتباری،

* نویسندهٔ مسئول: تلفن: ۸۲۰۸۴۴۸۶، فکس: ۸۸۰۱۳۱۰۲ Email: taleizadeh@ut.ac.ir

زمانی‌که سفارش صورت می‌گیرد، تأمین‌کننده به اعتبار تولیدکننده به وی اجازه می‌دهد که هزینهٔ خرید را با تأخیر پرداخت کند. معاملهٔ اعتباری، هزینه‌های سیستم موجودی را تغییر می‌دهد و روابط کلاسیک، دیگر در این سیستم‌ها صادق نیست؛ بنابراین، هزینه‌های هر سیستم موجودی و سیاست بهینهٔ آن‌ها باید دوباره محاسبه شوند. پس تعدادی از فرض‌های ساده‌کنندهٔ سیستم‌های کنترل موجودی کلاسیک کنار گذاشته می‌شوند؛ بدین‌شکل که برای درآمد ناشی از فروش محصول‌هایی که هنوز پول خرید آن‌ها پرداخت نشده است و در بانک نگهداری می‌شود، سود درنظر گرفته می‌شود. همچنین لزومی ندارد که زمان پرداخت هزینهٔ معوقه، پیش از پایان همان سیکل باشد. از سوی دیگر، در شرایطی که هزینهٔ خرید، پرداخت نشده است، نباید برای کالاهای داخل انبار، هزینه‌های سرمایه را لحاظ کرد. ضمن آنکه نرخ هزینهٔ سرمایه، بیش از نرخ بهرهٔ دریافتی حاصل از فروش کالاهایی است که هنوز پول خرید آن‌ها پرداخت نشده است. بدین‌ترتیب، اهداف پژوهش حاضر عبارت‌اند از: ۱. ارائهٔ مدل ریاضی برای یک سیستم کنترل موجودی چندکالایی با فرایند دوباره‌کاری در سیاست خرید اعتباری، به‌نحوی‌که هزینهٔ تولیدکننده حداقل شود؛ ۲. تعیین حجم تولید بهینه؛ ۳. تعیین حجم کمبود بهینه و ۴. تعیین طول دورهٔ بهینه. مدل‌های کلاسیک مقدار سفارش اقتصادی و مقدار تولید اقتصادی، به‌طور گسترده در زمینه‌های مختلف برای کنترل موجودی به‌کار می‌روند. از سویی این مدل‌ها شرایط و فرضیه‌هایی دارند که در شرایط واقعی کمتر مورد قبول‌اند و به‌همین‌دلیل برای کاربردهای متفاوت، باید از جنبه‌های مختلفی توسعه داده شوند. یکی از مهم‌ترین تعمیم‌ها در مدل‌های کنترل موجودی، افزودن مباحث کنترل کیفیت[3] به آن‌هاست. مدل‌های کلاسیک موجودی را ابتدا هریس [۱] در سال ۱۹۱۵ مطرح کرد. در این مدل‌ها، سفارش‌ها به‌صورت آنی دریافت می‌شدند، کمبود موجودی مطرح نبود و همهٔ پارامترها قطعی درنظر گرفته شده بودند. هادلی و ویتن [۲] چندین مدل قطعی را گسترش دادند. آن‌ها در مدل‌هایشان فرض مجازبودن کمبود را بررسی کردند و بدین‌ترتیب، مدل اولیهٔ هریس (۱۹۱۵) را بهبود بخشیدند. داروپچ [۳] مدل‌های کلاسیک مقدار تولید اقتصادی را با مجازدانستن کمبود موجودی و هزینهٔ آماده‌سازی متغیر ارائه کرد و سپس به‌کمک مشتق‌گیری از تابع هدف، مقادیر بهینه را به‌دست آورد. فرد پیشگام در زمینهٔ تلفیق مسائل کنترل کیفیت و کنترل موجودی پرتوس [۴] است. درنظرگرفتن کیفیت محصول در مسائل کنترل موجودی، با ارائهٔ این مقاله مورد توجه پژوهشگران واقع شد. گروبستران و وانگ [۵] مدلی احتمالی برای سیستم موجودی چندمحصولی و چندمرحله‌ای با محدودیت ظرفیت تولید را با به‌کارگیری ارزش زمانی پول ارائه دادند و هدف مدل را حداقل‌کردن مجموع هزینه‌ها بیان کردند. آن‌ها برای حل مدل، از برنامه‌ریزی پویا و به‌عنوان ابزار ساخت مدل، از تبدیل لاپلاس و تجزیه و تحلیل ورودی-خروجی استفاده کردند. روزنلات و لی [۶] با بررسی مدل تولید و محصول‌های معیوب به این نتیجه رسیدند که درنظرگرفتن محصول‌های معیوب سبب کاهش اندازهٔ دستهٔ تولید می‌شود. آن‌ها همچنین در مقالهٔ دیگری، با این فرض که قطعات ممکن است به وضعیت خارج از کنترل وارد شوند، مقولهٔ بازرسی قطعات را مطرح ساختند. طالعی‌زاده و همکاران [۷] به توسعهٔ مدل مقدار تولید اقتصادی پرداختند. آن‌ها تولید ضایعات را در مدل خود درنظر گرفتند؛ بدین‌صورت که پس از پایان فرایند دوباره‌کاری، همچنان ضایعات وجود دارد و سبب افزایش هزینه‌ها می‌شود. چان و همکاران [۸] مدل مقدار تولید اقتصادی را با درنظرگرفتن فروش بخشی از قطعات معیوب با قیمت کمتر، بخشی به‌صورت دوباره‌کاری و بخشی به‌صورت ضایعات گسترش دادند. آن‌ها برای فروش قطعات معیوب با قیمت کمتر، سه حالت «فروش به‌محض شناسایی توسط عملیات بازرسی»، «در پایان زمان تولید به‌صورت یک دسته» و «در پایان زمان سیکل به‌صورت یکجا» را درنظر گرفتند. پژوهش سلامه و جابر [۹] اولین مدلی بود که مدل مقدار سفارش اقتصادی را برای خریدار دریافت‌کنندهٔ کالای

معیوب ارائه داد. طالعی‌زاده و همکاران [۱۰] به توسعهٔ یک مدل کنترل موجودی با وقفه در تولید پرداختند. آن‌ها یک مدل مقدار تولید اقتصادی، با وقفه در تولید، ضایعات و دوباره‌کاری را درنظر گرفتند. سارکر و همکاران [۱۱] مدلی را با درنظرگرفتن دوباره‌کاری در یک سیستم تولید تک‌مرحله‌ای و کمبود برنامه‌ریزی‌شده توسعه دادند و با درنظرگرفتن میزان ضایعات تصادفی، به توسعهٔ یک مدل کنترل موجودی پرداختند. خرید اعتباری، برای نخستین‌بار از سوی هالی و هیگنز [۱۲] توسعه داده شد. بعد از آنان چپمن و همکاران [۱۳] سیاست بازپرسازی بهینه‌ای را در شرایط متفاوتی مانند مدل کلاسیک مقدار سفارش اقتصادی، پرداخت هزینهٔ زمانی‌که کالاها در دورهٔ اعتباری به فروش می‌روند و پرداخت بعضی از کالاها بعد از یک دورهٔ مشخص، به‌دست آوردند. آباد و جاگی [۱۴] با فرض برابری بهرهٔ دریافتی و پرداختی، مدل فروشنده- خریدار را در شرایط شراکت‌داشتن یا نداشتن فروشنده و خریدار توسعه دادند و سیاستی بهینه‌ای را برای خریدار و فروشنده به‌دست آوردند. از سوی دیگر، در زمینهٔ برابرنبودن هزینه‌های خریدوفروش، چانگ و هانگ [۱۵] مدل گویال (۱۹۸۵) را در شرایطی توسعه دادند که خریدار مقداری از کل هزینهٔ خرید را در انتهای دورهٔ اعتباری به فروشنده می‌دهد و مابقی هزینه را از طریق وام بانکی به فروشنده پرداخت می‌کند. چانگ و هانگ [۱۶] مدل گویال (۱۹۸۵) را در شرایطی برای مدل مقدار سفارش اقتصادی توسعه دادند که درصدی از کالاها معیوب باشند. همچنین در شرایطی که دورهٔ اعتباری وابسته به دو دوره باشد و بهرهٔ پرداختی پیشنهادی بانک، تصاعدی باشد. مطالعهٔ خوجی و مهرز [۱۷] را می‌توان اولین پژوهشی درنظر گرفت که امکان پرداخت معوقه را وابسته به سطح سفارش کرده است. در این مقاله، تأمین‌کننده تنها درصورتی به خریدار امکان پرداخت معوقه را می‌دهد که سطح سفارش از میزان معینی بالاتر باشد. چارچوب اصلی مسئلهٔ مورد بررسی در این تحقیق بدین‌شرح است که تولیدکننده برای سفارش یک دسته از محصول‌های خود با یک تأمین‌کننده در ارتباط است و تأمین‌کننده این اختیار را به تولیدکننده می‌دهد تا هزینه‌های محصول‌های سفارش‌داده‌شده را با تأخیر پرداخت کند. از لحاظ موقعیت زمانی نیز زمان پرداخت معوقه (M) شامل دو حالت است: ۱. زمان پرداخت معوقه در بازه‌ای از زمان قرار بگیرد که کمبود وجود دارد؛ ۲. زمان پرداخت معوقه در بازه‌ای از زمان قرار بگیرد که کمبود وجود ندارد.

در این مقاله، برای نخستین‌بار مدل کنترل موجودی مقدار تولید اقتصادی چندمحصولی و تک‌ماشینه- که در آن، پس از تولید کالاهای معیوب، روی این کالاها دوباره‌کاری صورت می‌گیرد و همهٔ کالاها درنهایت به کالاهای باکیفیت تبدیل می‌شوند- با سیاست پرداخت معوقه توسعه داده می‌شود. از نکات دیگر حائز اهمیت، درنظرگرفتن محدودیت ظرفیت در مدل مدنظر است که از دردست‌بودن تنها یک ماشین سرچشمه می‌گیرد. شایان ذکر است که می‌توان تمامی سیستم‌های تولیدی را که در آن‌ها چند محصول از طریق یک ماشین تولید می‌شود، از طریق مدل توسعه‌داده‌شده در این مقاله بهینه ساخت. محدودیت ظرفیت در تمامی سیستم‌های تولید- که نشئت‌گرفته از تعداد ماشین‌آلات دردسترس است- نیاز به تولید بهینه برای هر محصول و زمان‌بندی سیکل‌های موجودی را براساس مدل توسعه‌داده‌شده بیش از پیش ضروری می‌سازد.

درادامه، پس از تعریف مسئله و مدل‌سازی آن، روش حل مربوط به هر حالت ارائه می‌شود. در بخش بعدی، مثال عددی و در بخش آخر نیز جمع‌بندی و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

مدل‌سازی ریاضی

نمادگذاری:

پارامترها

P_i: نرخ تولید i امین کالا برای هر دوره

d_i: نرخ تقاضا برای i امین کالا برای هر دوره

K_i: هزینهٔ راه‌اندازی برای تولید i امین کالا

C_i: هزینهٔ خرید هر واحد کالای خام i ام

v_i: هزینهٔ تولید برای هر واحد از i امین کالا شامل هزینهٔ خرید و هزینهٔ بازرسی$(C_i > v_i)$

S_i: قیمت فروش هر واحد از کالای i ام

M: زمان پرداخت معوقه که خریدار اعلام می‌کند

b_i: هزینهٔ نگهداری هر واحد از کالای i ام به‌استثنای بهرهٔ دریافتی

X_i: درصد تولید i امین کالای معیوب تولیدشده

d_i: نرخ تولید i امین کالای معیوب تولیدشده در سیستم تولید: $d_i = P_i X_i$

P_i^1: نرخ دوباره‌کاری برای i امین کالای معیوب

C_i^R: هزینهٔ دوباره‌کاری برای i امین کالای معیوب

Q_i: میزان بستهٔ تولید برای i امین کالا در هر دوره

T: طول دورهٔ تولید

I_i: بالاترین سطح موجودی در دست، زمانی‌که فرایند تولید تمام می‌شود

I_i^{Max}: بالاترین سطح موجودی در دست، زمانی که فرایند دوباره‌کاری تمام می‌شود

I_e: نرخ بهرهٔ دریافتی در یک سیکل

I_c: نرخ بهرهٔ پرداختی در یک سیکل

SE_i: زمان لازم برای راه‌اندازی ماشین برای کالای i ام

N: تعداد دوره‌ها در یک سال

$TC_j(T,B)$: هزینهٔ کل موجودی برای یک دوره در سال برای حالت j ام (j=1, 2, 3)

$TCU_j(T,B)$: هزینهٔ سالیانهٔ کل موجودی برای حالت j ام (j=1, 2, 3)

مفروضات

۱. نرخ تولید کالای باکیفیت، بزرگ‌تر از نرخ تقاضاست.
۲. همهٔ کالاهای معیوب، پس از فرایند دوباره‌کاری به کالای باکیفیت تبدیل می‌شوند.
۳. طول دورهٔ سیکل برای همهٔ کالاها یکسان است.
۴. کل کمبود، پس‌افت می‌شود.
۵. سیاست تشویقی لحاظ‌شده در این مدل، خرید اعتباری است.
۶. تابع هدف از نوع هزینه است و برای تولیدکننده درنظر گرفته می‌شود.

۱. هزینه‌های مشترک سیستم موجودی

سیستم تولید موجودی، از الگوی شکل ۱ پیروی می‌کند. طول سیکل برابر مجموع زمان تولید، دوباره‌کاری، دوره‌ای که تولید صورت نمی‌گیرد، ولی موجودی مثبت است و دورهٔ کمبود است؛ پس:

$$T = \sum_{k=1}^{5} t_i^k \qquad (۱)$$

از آنجاکه تمام محصول‌ها با یک دستگاه و ظرفیت محدود تولید می‌شوند، طول دورهٔ همهٔ محصول‌ها با هم برابر است.

براساس شکل ۱ داریم:

$$t_i^1 = \frac{\beta_i}{P_i - d_i - \lambda_i} \quad , \ i = 1,2,3,\dots,n \qquad (۲)$$

$$t_i^2 = \frac{I_i}{P_i - d_i - \lambda_i} \qquad (۳)$$

$$t_i^3 = \frac{X_i Q_i}{P_i^1} = \frac{d_i Q_i}{P_i^1 P_i} \qquad (۴)$$

$$t_i^4 = \frac{I_i^{\max}}{\lambda_i} \qquad (۵)$$

$$t_i^5 = \frac{B_i}{\lambda_i} \qquad (۶)$$

$$I_i = (P_i - d_i - \lambda_i)\frac{Q_i}{P_i} - B_i \qquad (۷)$$

$$I_i^{\max} = I_i + (P_i^1 - \lambda_i)t_i^3 = Q_i\left(1 - \frac{\lambda_i}{P_i} - \frac{d_i \lambda i}{P_i^1 P_i}\right) - B_i \qquad (۸)$$

و درنهایت:

$$T = t_i^1 + t_i^2 + t_i^3 + t_i^4 + t_i^5 = \frac{Q_i}{\lambda_i} \qquad (۹)$$

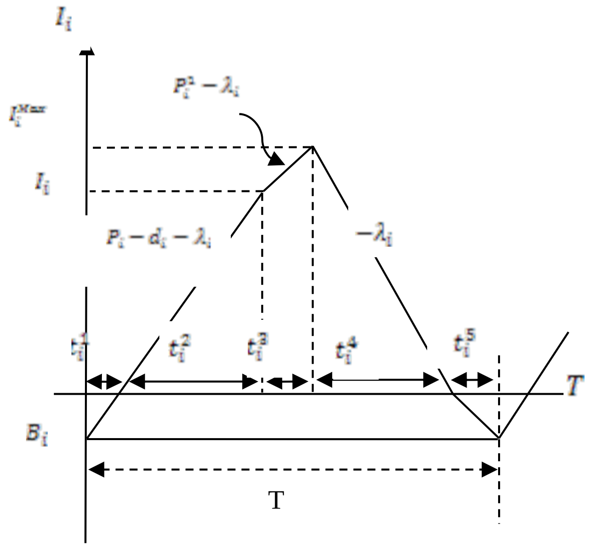
همچنین خواهیم داشت:

$$t_a^i \equiv t_i^1 \qquad (۱۰)$$

$$t_b^i \equiv t_i^1 + t_i^2 = \frac{Q_i}{P_i} \qquad (۱۱)$$

$$t_c^i \equiv t_i^1 + t_i^2 + t_i^3 = \frac{Q_i}{P_i} + \frac{X_i Q_i}{P_i^1} \qquad (۱۲)$$

$$t_d^i \equiv t_i^1 + t_i^2 + t_i^3 + t_i^4 = \frac{Q_i - B_i}{\lambda_i} \qquad (۱۳)$$



شکل ۱. نمایش سیستم موجودی با درنظرگرفتن دوباره‌کاری

مؤلفه‌های مشترک هزینه‌های سیستم موجودی در هر دوره عبارت‌اند از:

- هزینهٔ تولید محصول

$$C_i Q_i \qquad (۱۴)$$

- هزینهٔ تعمیر کالاهای معیوب

$$C_i^R X_i Q_i \qquad (۱۵)$$

- هزینهٔ ثابت راه‌اندازی

$$K_i \qquad (۱۶)$$

- هزینهٔ نگهداری کالاها، اعم از سالم و معیوب

$$\frac{h_i}{2\lambda_i}\left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}}\right)(B_i)^2-\frac{h_i}{\lambda_i}Q_iB_i+\frac{h_i}{2\lambda_i}\left(1-\frac{\lambda_i}{P_i}\right)(Q_i)^2 \qquad (۱۷)$$

- هزینهٔ کمبود پس‌افت

$$\frac{b_i(B_i)^2}{2}\left(\frac{1}{P_i(1-X_i)-\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_i}\right) \qquad (۱۸)$$

۲. بهرهٔ دریافتی و بهرهٔ پرداختی

براساس ارزش M، t_i^a و t_i^d دو حالت کلی را می‌توان درنظر گرفت:

۱. $M < t_i^a$
۲. $t_i^a \le M < t_i^d$

این دو حالت، در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند.

۱. $M < t_i^a$: در این حالت، تولیدکننده درآمدی از لحظهٔ ۰ تا M به‌دست می‌آورد و بهرهٔ I_e را در این مدت به‌ازای هر دلار در سال دریافت می‌کند؛ بنابراین، بهرهٔ دریافتی در هر دوره برابر است با:

$$s_iI_e\left[\frac{\lambda_i(M_i)^2}{2}+\frac{(P_i-d_i-\lambda_i)M_i^2}{2}\right]=s_iI_e\frac{(P_i-d_i)M_i^2}{2} \qquad (۱۹)$$

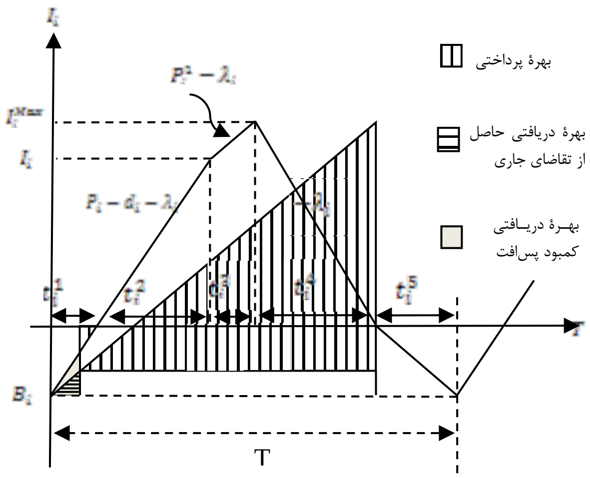
از سوی دیگر، تولیدکننده در زمان M درآمد حاصل از همهٔ واحدهای فروخته‌شده را می‌پردازد، سود آن را نگه می‌دارد و پرداخت بهره بابت آیتم‌های فروخته‌شده را بعد از زمان M آغاز می‌کند.

بنابراین، بهرهٔ پرداختی در هر دوره برابر است با:

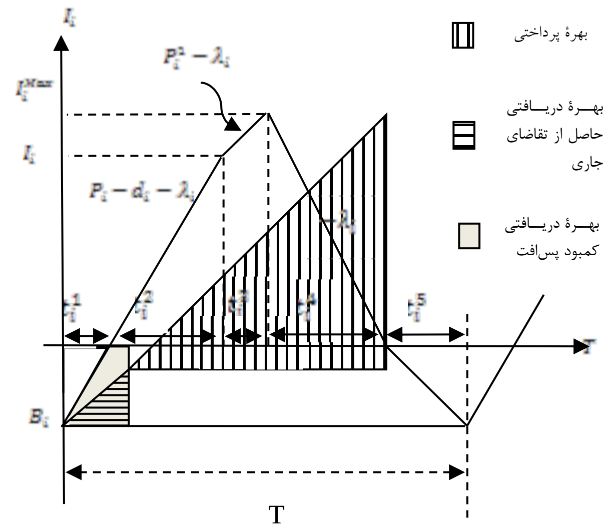
$$v_iI_c\left[\frac{(P_i-d_i-\lambda_i)(t_a^i-M_i)^2}{2}+\frac{\lambda_i(t_d^i-M_i)^2}{2}\right]$$
$$=v_iI_c\left[\frac{(P_i-d_i)B_i^2}{2\lambda_i(P_i-d_i-\lambda_i)}+\frac{(Q_i)^2}{2\lambda_i}-\frac{Q_iB_i}{\lambda_i}-Q_iM_i+\frac{(P_i-d_i)M_i^2}{2}\right] \qquad (۲۰)$$

۲. $t_i^a \le M < t_i^d$: در این حالت، بهرهٔ دریافتی در هر دوره عبارت است از:

$$s_iI_e\left[\frac{\lambda_i(M_i)^2}{2}+\frac{[(M_i-t_i^a)+M_i]B_i}{2}\right]$$
$$=s_iI_e\left[\frac{\lambda_i(M_i)^2}{2}+M_iB_i-\frac{(B_i)^2}{2(P_i-d_i-\lambda_i)}\right] \qquad (۲۱)$$



شکل ۲. نمودار بهرهٔ دریافتی و بهرهٔ پرداختی خریدار در حالت $M < t_a$



شکل ۳. نمودار بهرهٔ دریافتی و پرداختی خریدار در حالت $t_d \le M < t_a$

از سوی دیگر، بهرهٔ پرداختی در این حالت برابر است با:

$$v_i I_c\left[\frac{\lambda_i}{2}(t_i^d - M_i)^2\right]$$

$$= v_i I_c\left[\frac{Q_i^2}{2\lambda_i}+\frac{(B_i)^2}{2\lambda_i}+\frac{\lambda_i (M_i)^2}{2}-\frac{Q_i B_i}{\lambda_i}-M_i Q_i+M_i B_i\right] \quad (۲۲)$$

با توجه به استدلال بالا، می‌توان هزینهٔ کل موجودی در هر دوره را شامل هزینه‌های تولید، دوباره‌کاری، آماده‌سازی، نگهداری، کمبود، بهرهٔ دریافتی و بهرهٔ پرداختی تعریف کرد. با توجه به مفروضات، تابع هزینهٔ تولیدکننده را برای هر سه حالت، جداگانه به‌دست می‌آوریم.

۱. $M < t_i^a$: در این حالت، تأمین‌کننده به تولیدکننـده این اجازه را می‌دهد که هزینهٔ خرید مـواد اولیـه را در دورهٔ کمبود پرداخت کند. بـا توجـه بـه $Q_i = T\lambda_i$ و $N = \frac{1}{T}$، هزینهٔ سالیانهٔ تولیدکننده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$TCU_1(T,B_i) = \frac{TC_1(T,B_i)}{T} = \lambda_i\left(C_i + C_i^R X_i - v_i I_C M_j\right)Q_i + \frac{K_i}{T} + \left(v_i I_C - s_i I_e\right)\frac{(P_i - d_i)(M_j)^2}{2T} - \left(h_i + v_i I_C\right)B_i \quad (۲۳)$$

$$+\frac{(B_i)^2}{2T\lambda_i}\left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}}\right)(b_i+h_i+\nu_i I_C)+\left[h_i\left(1-\frac{\lambda_i}{P_i}\right)+\nu_i I_C\right]\frac{T\lambda_i}{2}$$

برای ساده‌کردن عبارات، از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$G_i^1 = C_i + C_i^R X_i - \nu_i I_C M_j \qquad (۲۴)$$

$$W_i^1 = h_i + \nu_i I_C > 0 \qquad (۲۵)$$

$$U_i^1 = \left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}}\right)(b_i+h_i+\nu_i I_C) > 0 \qquad (۲۶)$$

$$R_i^1 = h_i\left(1-\frac{\lambda_i}{P_i}\right)+\nu_i I_C > 0 \qquad (۲۷)$$

با درنظرگرفتن چندکالایی‌بودن تولید، تابع نهایی هزینهٔ تولیدکننده برای حالت اول- که $M < t_i^a$ است- به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$TCU_1(T,B_i) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i G_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{U_i^1}{2\lambda_i T}\left(B_i - \frac{W_i^1\lambda_i T}{U_i^1}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{2K_i + (\nu_i I_C - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2}{2T} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2\right)\lambda_i T}{2U_i^1} \qquad (۲۸)$$

۲. $t_i^a \le M < t_i^d$: مانند حالت ۱ با جایگذاری $N=\frac{1}{T}$ و $Q_i = T\lambda_i$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} TCU_2(T,B_i) &= \frac{TC_2(T,B_i)}{T} \\ &= \lambda_i\left(C_i + C_i^R X_i - \nu_i I_C M_j\right)Q_i + \frac{K_i}{T} \\ &+ (\nu_i I_C - s_i I_e)\frac{\lambda_i (M_j)^2}{2T} - (h_i+\nu_i I_C)B_i \\ &+ \frac{(B_i)^2}{2T\lambda_i}\left[\left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}}\right)(b_i+h_i) + \left(\nu_i I_C + \frac{\lambda_i s_i I}{P_i\left(1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}\right)}\right)\right] \\ &+ (\nu_i I_C - s_i I_e)\frac{M_j B_i}{T} + \left[h_i\left(1-\frac{\lambda_i}{P_i}\right)+\nu_i I_C\right]\frac{T\lambda_i}{2} \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

همچنین می‌توان برای ساده‌سازی فرض کرد:

$$G_i^2 = C_i + C_i^R X_i - \nu_i I_C M_j \qquad (۳۰)$$

$$W_i^2 = h_i + \nu_i I_C > 0 \qquad (۳۱)$$

$$U_i^2 = \left[\left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}}\right)(b_i+h_i) + \left(\nu_i I_C + \frac{\lambda_i s_i I}{P_i\left(1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}\right)}\right)\right] > 0 \qquad (۳۲)$$

$$R_i^2 = h_i\left(1-\frac{\lambda_i}{P_i}\right)+\nu_i I_C > 0 \qquad (۳۳)$$

درنهایت، تابع هدف هزینهٔ تولیدکننده برای حالت دوم به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} TCU_2(T,B_i) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i G_i + \frac{W_i^2(\nu_i I_C - s_i I_e)\lambda_i M_j}{U_i^2}\right] \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\frac{U_i^2}{2\lambda_i T}\left[\left(B_i - \frac{W_i^2\lambda_i T}{U_i^2}\right) + \frac{(\nu_i I_C - s_i I_e)\lambda_i M_j}{U_i^2}\right]^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\frac{2K_i + (\nu_i I_C - s_i I_e)\lambda_i (M_j)^2\left(1-\frac{\nu_i I_C - s_i I_e}{U_i^2}\right)}{2T} \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(R_i^2 U_i^2 - (W_i^2)^2\right)\lambda_i T}{2U_i^2} \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

۳. محدودیت ظرفیت تولید

به‌دلیل تولید چندین کالا توسط یک دستگاه، قطعاً با محدودیت ظرفیت تولید مواجه می‌شویم. برای اینکه تولید صورت گیرد، باید مجموع زمان‌هایی که طی آن دستگاه در حال تولید کالاست، زمان بازسازی و زمان راه‌اندازی دستگاه برای همهٔ کالاها کمتر از طول دورهٔ مشترک باشد. به‌عبارت دیگر:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^1 + t_i^2 + t_i^3 + \sum_{i=1}^{n} SE_i \le T \qquad (۳۵)$$

با قراردادن معادله‌های ۲ تا ۴ در معادلهٔ ۳۵ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\left(P_i^1 + X_i P_i\right)}{P_i P_i^1}T + \sum_{i=1}^{n} SE_i \le T \qquad (۳۶)$$

و درنهایت، خواهیم داشت:

$$T \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} SE_i}{\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\left(P_i^1 + X_i P_i\right)}{P_i P_i^1}\right]} = T_{Min} \qquad (۳۷)$$

روش حل

در این قسمت، برای پیداکردن طول سیکل، میزان کمبود و درنهایت، حجم تولید بهینه، از عملیات‌های سادهٔ جبری و نامعادلهٔ میانگین هندسی- حسابی[۴] استفاده می‌کنیم. این نامساوی نشان می‌دهد که اگر $a > 0$ و $b > 0$، آن‌گاه $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. تساوی در این نابرابری، زمانی اتفاق می‌افتد که $a = b$ باشد.

۱. $M < t_i^a$: برای مینیمم‌کردن $TCU_1(T, B_i)$ در معادلهٔ ۲۹ اجازه می‌دهیم:

$$\left(B_i - \frac{W_i^1 \lambda_i T}{U_i^1}\right)^2 = 0 \qquad (۳۸)$$

بنابراین،

$$B_i = \frac{W_i^1 \lambda_i T}{U_i^1} \qquad (۳۹)$$

با جایگذاری معادلهٔ ۳۹ در معادلهٔ ۲۸ تابع هزینه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$TCU_1(T, B_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{2K_i + (v_i I_C - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2}{2T} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2\right)\lambda_i T}{2U_i^1} \qquad (۴۰)$$

لم ۱. تابع $R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2$ مثبت است.

اثبات: اثبات لم ۱ در پیوست آمده است.

با توجه به لم ۱، هنگامی‌که $2K_i + (v_i I_C - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2$ مثبت است، سه شرط بارون در سال ۲۰۱۰ تأیید می‌شود؛ بنابراین، می‌توان از نامعادلهٔ میانگین حسابی- هندسی، به‌عنوان یک روش بهینه‌سازی برای به‌حداقل‌رساندن هزینهٔ کل موجودی استفاده کرد.

$$TCU_1(T, B_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{2K_i + (v_i I_C - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2}{2T}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2\right)\lambda_i T}{2U_i^1}\right)} \qquad (۴۱)$$

برای مینیمم‌کردن تابع هزینه، این نابرابری باید به‌صورت تساوی برقرار شود و این تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2K_i + (v_i I_C - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2}{2T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2\right)\lambda_i T}{2U_i^1} \qquad (۴۲)$$

درنتیجه داریم:

$$T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} 2K_i + (v_i I_C - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2\right)\lambda_i}{U_i^1}}} \qquad (۴۳)$$

برای اطمینان از اینکه $M < t_i^a$ است، با استفاده از $t_a \cong t_1$ معادلهٔ ۲، $d = PX$ و $B_i = \frac{W_i^1 \lambda_i T}{U_i^1}$، خواهیم داشت $T > \frac{M_i U_i^1 (P_i - d_i - \lambda_i)}{W_i^1 \lambda_i}$ و با جایگذاری معادلهٔ ۴۳ در این نامعادله به این نتیجه می‌رسیم که اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^{n} 2K_i > \Delta_i^1$ باشد، $M < t_i^a$ است؛ به‌نحوی‌که Δ_i^1 به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta_i^1 = \left(\frac{M_i U_i^1}{W_i^1 \lambda_i}\right)^2 (P_i - d_i - \lambda_i)^2 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2\right)\lambda_i}{U_i^1}\right] - \sum_{i=1}^{n} (v_i I_C - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2 \qquad (۴۴)$$

از این‌رو، T از معادلهٔ ۴۳ و B_i از معادلهٔ ۳۹ به‌دست می‌آیند. درنتیجه، مینیمم هزینهٔ تولیدکننده، از معادلهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$TCU_1(T, B_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} 2K_i + (v_i I_C - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2\right)\lambda_i}{U_i^1}\right)} \qquad (۴۵)$$

درمقابل، اگر $\sum_{i=1}^{n} 2K_i \leq \Delta_i^1$ باشد، برای هر $T_1 > T_2 > \frac{M_i U_i^1 (P_i - d_i - \lambda_i)}{W_i^1 \lambda_i} > 0$ داریم:

$$TCU_1(T_2) - TCU_1(T_1) \geq 0$$

بنابراین، تابع هزینه در این حالت، یک تابع اکیداً صعودی در بازهٔ $\left(\frac{M_i U_i^1 (P_i - d_i - \lambda_i)}{W_i^1 \lambda_i}, \infty\right)$ است و مینیمم ندارد.

لم ۲. ۱. اگر $\sum_{i=1}^{n} 2K_i > \Delta_i^1$ باشد، مقدار به‌دست‌آمده T از معادلهٔ ۴۳، مقدار بهینهٔ دورهٔ سیکل است که تابع هزینه را مینیمم می‌کند.

۲. اگر $\sum_{i=1}^{n} 2K_i \le \Delta_i^1$ باشد، مقدار بهینه‌ای برای T وجود ندارد که تابع هزینه را مینیمم کند.

۲. $t_i^a \le M < t_i^d$: مانند حالت اول برای مینیمم‌کردن $TCU_2(T, B_i)$ در معادلهٔ ۳۴ فرض کنید:

$$\left[\left(B_i - \frac{W_i^{\,2}\lambda_i T}{U_i^2}\right) + \frac{\left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i M_j}{U_i^2}\right]^2 = 0 \qquad (۴۶)$$

درنتیجه:

$$B_i = \frac{W_i^{\,2}\lambda_i T}{U_i^2} - \frac{\left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i M_j}{U_i^2} \qquad (۴۷)$$

حال با جایگذاری معادلهٔ ۴۶ در معادلهٔ ۳۴ تابع هزینه به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$TCU_2(T, B_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i G_i + \frac{W_i^{\,2}\left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i M_j}{U_i^2}\right] + \sum_{i=1}^{n}\frac{2K_i + \left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i\left(M_j\right)^2\left(1 - \frac{\nu_i I_C - s_i I_e}{U_i^2}\right)}{2T}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(R_i^2 U_i^2 - \left(W_i^{\,2}\right)^2\right)\lambda_i T}{2U_i^2} \qquad (۴۸)$$

لم ۳. تابع $R_i^2 U_i^2 - \left(W_i^{\,2}\right)^2$ مثبت است.

اثبات: مانند لم ۱، اثبات می‌شود. زمانی‌که برای هر i، $2K_i + \left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i\left(M_j\right)^2\left(1 - \frac{\nu_i I_C - s_i I_e}{U_i^2}\right)$ مثبت است، مشابه استدلالی که برای حالت اول آوردیم، نامعادلهٔ میانگین حسابی– هندسی را می‌توان به‌عنوان روش بهینه‌سازی برای به‌حداقل‌رساندن هزینهٔ کل موجودی به‌کار برد.

$$TCU_2(T, B_i) \ge \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i G_i + \frac{W_i^{\,2}\left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i M_j}{U_i^2}\right] + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2K_i + \left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i\left(M_j\right)^2\left(1 - \frac{\nu_i I_C - s_i I_e}{U_i^2}\right)}{T}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(R_i^2 U_i^2 - \left(W_i^{\,2}\right)^2\right)\lambda_i T}{U_i^2}\right)} \qquad (۴۹)$$

و تساوی زمانی رخ می‌دهد که:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2K_i + \left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i\left(M_j\right)^2\left(1 - \frac{\nu_i I_C - s_i I_e}{U_i^2}\right)}{T} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(R_i^2 U_i^2 - \left(W_i^2\right)^2\right)\lambda_i T}{U_i^2} \qquad (۵۰)$$

درنتیجه داریم:

$$T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} 2K_i + \left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i\left(M_j\right)^2\left(1 - \frac{\nu_i I_C - s_i I_e}{U_i^2}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(R_i^2 U_i^2 - \left(W_i^{\,2}\right)^2\right)\lambda_i}{U_i^2}}} \qquad (۵۱)$$

برای اطمینان از اینکه $t_i^a \le M < t_i^d$ است، با استفاده از $t_a \equiv t_1$، $t_d \equiv t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{T_2\lambda_i - B_i}{\lambda_i}$ معادلهٔ ۲، $d = PX$ و $B_i = \frac{W_i^{\,2}\lambda_i T}{U_i^2} - \frac{\left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i M_j}{U_i^2}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda_i M_i\left[U_i^2 - \left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\right]}{\lambda_i\left(U_i^2 - W_i^{\,2}\right)} < T \le \frac{\left(P_i - d_i - \lambda_i\right)M_i U_i^2 + \left(\nu_i I_C - s_i I_e\right)\lambda_i M_i}{W_i^{\,2}\lambda_i} \qquad (۵۲)$$

و با جایگذاری معادلهٔ ۵۱ در نامعادلهٔ ۵۲ به این نتیجه می‌رسیم که اگر و تنها اگر $\Delta_i^2 < \sum_{i=1}^{n} 2K_i \le \Delta_i^3$ باشد، وقتی $t_i^a \le M < t_i^d$ است که Δ_i^2 و Δ_i^3 به‌صورت زیر بیان شوند:

$$\Delta_i^2=\left[\frac{(\lambda_i M_i)^2\left[U_i^2-(\nu_i I_C-s_i I_e)\right]^2}{\left[\lambda_i\left(U_i^2-W_i^2\right)\right]^2}\right.$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(R_i^2U_i^2-\left(W_i^2\right)^2\right)\lambda_i}{U_i^2}$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n}(\nu_i I_C-s_i I_e)\lambda_i\left(M_j\right)^2\left(1-\frac{\nu_i I_C-s_i I_e}{U_i^2}\right)\right] \qquad (۵۳)$$

$$\Delta_i^3=\left[\frac{(P_i-d_i-\lambda_i)M_iU_i^2+(\nu_i I_C-s_i I_e)\lambda_i M_i}{W_i^2\lambda_i}\right]^2$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(R_i^2U_i^2-\left(W_i^2\right)^2\right)\lambda_i}{U_i^2}$$
$$-\sum_{i=1}^{n}(\nu_i I_C-s_i I_e)\lambda_i\left(M_j\right)^2\left(1-\frac{\nu_i I_C-s_i I_e}{U_i^2}\right) \qquad (۵۴)$$

بنابراین، هنگامی‌که $\Delta_i^2<\sum_{i=1}^{n}2K_i\le\Delta_i^3$ است، T از معادلهٔ ۵۱ و B_i از معادلهٔ ۴۷ به‌دست می‌آید. درنتیجه، مینیمم هزینهٔ تولیدکننده، از معادلهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$TCU_2(T,B_i)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i G_i+\frac{W_i^2(\nu_i I_C-s_i I_e)\lambda_i M_j}{U_i^2}\right] \qquad (۵۵)$$
$$+\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}2K_i+(\nu_i I_C-s_i I_e)\lambda_i\left(M_j\right)^2\left(1-\frac{\nu_i I_C-s_i I_e}{U_i^2}\right)\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(R_i^2U_i^2-\left(W_i^2\right)^2\right)\lambda_i}{U_i^2}\right)}$$

درمقابل، اگر $\sum_{i=1}^{n}2K_i>\Delta_i^3$ باشد، شبیه حالت اول می‌توانیم نشان دهیم برای هر:

$$\frac{\lambda_i M_i\left[U_i^2-(\nu_i I_C-s_i I_e)\right]}{\lambda_i\left(U_i^2-W_i^2\right)}<T_2^1<T_2^2$$
$$\le\frac{(P_i-d_i-\lambda_i)M_iU_i^2+(\nu_i I_C-s_i I_e)\lambda_i M_i}{W_i^2\lambda_i} \qquad (۵۶)$$

درنتیجه، $TCU_2(\mathrm{T}_2^2)-TCU_2(\mathrm{T}_2^1)<0$ پس تابع در بازهٔ $\left(\frac{\lambda_i M_i\left[U_i^2-(\nu_i I_C-s_i I_e)\right]}{\lambda_i\left(U_i^2-W_i^2\right)},\frac{(P_i-d_i-\lambda_i)M_iU_i^2+(\nu_i I_C-s_i I_e)\lambda_i M_i}{W_i^2\lambda_i}\right]$ اکیداً نزولی است و به‌ازای: $T_2=\frac{(P_i-d_i-\lambda_i)M_iU_i^2+(\nu_i I_C-s_i I_e)\lambda_i M_i}{W_i^2\lambda_i}$، تابع هزینه مینیمم می‌شود. همچنین اگر $\sum_{i=1}^{n}2K_i\le\Delta_i^2$ باشد، برای هر $T_1<T_2$ متعلق به بازهٔ فوق، تابع هزینه اکیداً صعودی است و T بهینه‌ای وجود ندارد که تابع هزینه را مینیمم کند.

لم ۴. ۱. اگر $\Delta_i^2<\sum_{i=1}^{n}2K_i\le\Delta_i^3$ باشد، مقدار T از معادلهٔ ۵۱، مقدار بهینهٔ دورهٔ سیکل است که تابع هزینه را مینیمم می‌کند.

۲. اگر $\sum_{i=1}^{n}2K_i>\Delta_i^3$ باشد، مقدار بهینهٔ $T_2=\frac{(P_i-d_i-\lambda_i)M_iU_i^2+(\nu_i I_C-s_i I_e)\lambda_i M_i}{W_i^2\lambda_i}$ وجود دارد که تابع هزینه را مینیمم می‌کند.

۳. اگر $\sum_{i=1}^{n}2K_i\le\Delta_i^2$ باشد، مقدار بهینه‌ای برای T وجود ندارد که تابع هزینه را مینیمم کند.

الگوریتم حل

- مرحلهٔ ۱: اگر $\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\left(P_i^1+X_iP_i\right)}{P_iP_i^1}<1$ به مرحلهٔ ۲ می‌رویم. درغیراین‌صورت، مسئله جوابی شدنی ندارد.
- مرحلهٔ ۲: $\Delta_i^3,\Delta_i^2,\Delta_i^1$ را محاسبه می‌کنیم.
- مرحلهٔ ۳: تابع هزینه را برای حالت اول محاسبه می‌کنیم.

اگر $\sum_{i=1}^{n}2K_i>\Delta_i^1$ باشد، T_1 و B_i بهینه از طریق معادله‌های ۴۳ و ۳۹ به‌دست می‌آیند و مینیمم هزینهٔ سالانه، با معادلهٔ ۴۵ محاسبه می‌شود. درغیراین‌صورت، $TCU_1(T,B_i)=\infty$ است.

- مرحلهٔ ۴: تابع هزینه را برای حالت دوم محاسبه می‌کنیم.

اگر $\Delta_i^2<\sum_{i=1}^{n}2K_i\le\Delta_i^3$ باشد، مقدار T_2و B_i بهینه از معادله‌های ۵۱ و ۴۷ به‌دست می‌آیند. مینیمم هزینهٔ سالانه را با استفاده از معادلهٔ ۵۴ محاسبه می‌کنیم.

اگر $\sum_{i=1}^{n}2K_i>\Delta_i^3$ باشد، مقدار بهینه

$$T_2=\frac{(P_i-d_i-\lambda_i)M_iU_i^2+(\nu_i I_C-s_i I_e)\lambda_i M_i}{W_i^2\lambda_i}$$

است که در آن، تابع هزینه مینیمم می‌شود. با جایگذاری T_2 در معادلهٔ ۴۷، B_i را به‌دست آورید و تابع هزینه را نیز از معادلهٔ ۴۸ به‌دست آورید.

امـا اگـر $\sum_{i=1}^{n} 2K_i \le \Delta_i^2$ باشـد، $TCU_2(T, B_i) = \infty$ است.

- مرحلـۀ ۵: بـرای حالـت اول، از بـین T_1^i هـای به‌دست‌آمده، بزرگ‌ترین آن‌ها را انتخاب می‌کنـیم و آن را T_1 می‌نامیم. T_1 را با T_{Min} مقایسه مـی‌کنـیم. اگـر $T_1 > T_{Min}$ باشـد، $T_1 = T^*$ و درغیـراین‌صـورت $T^* = T_{Min}$ است. سپس هزینۀ متناظر بـا T^* را بـه‌دست می‌آوریم. همین مراحل را برای حالت دوم انجـام می‌دهیم.
- مرحلۀ ۶: هزینۀ بهینـۀ سیسـتم، مینـیمم هزینـه‌هـای حالت‌های مختلف است و T^* متناظر با T بهترین هزینه خواهد بود. با استفاده از T به‌دست‌آمده، $Q_i^* = \lambda_i T^*$ است.

$$TCU(T^*) = Min\left\{TCU_1(T_1^*), TCU_2(T_2^*)\right\}$$

مثال عددی

در ایـن قسـمت، بـرای مـدل کنتـرل موجـودی، سـه نـوع محصول را درنظر می‌گیریم و آن‌ها را حل می‌کنـیم و پـس از اتمـام مثـال عـددی مـدل، بـه تحلیـل و بررسـی آن می‌پردازیم. از آنجاکه مدل ارائه‌شده، دو حالـت دارد، مثـال عددی را برای دو حالت زیر درنظر می‌گیریم:

الف) $M < t_i^a$

ب) $t_i^a \le M < t_i^d$

مقادیر درنظرگرفته‌شده برای پارامترها در جدول‌های ۱ و ۳ مشاهده می‌شود.

جدول ۱. مقادیر درنظرگرفته‌شده برای پارامترها

P	P_i	P_i^1	λ_i	K_i	C_i	C_R^i	b_i	h_i
۱	۱۰۰۰۰	۶۰۰	۲۰۰۰	۷۵۰	۲	۰/۵	۰/۲۵	۰/۲
۲	۱۰۵۰۰	۶۵۰	۱۵۰۰	۷۰۰	۱/۵	۰/۶	۰/۵	۰/۱۵
۳	۱۱۰۰۰	۷۵۰	۱۰۰۰	۶۵۰	۱	۰/۷	۰/۷۵	۰/۱

جدول ۲. مقادیر درنظرگرفته‌شده برای پارامترها

P	M_j	I_c	I_e	S_i	v_i	SE_i	X_i
۱	۰/۰۴	۰/۰۹	۰/۰۵	۴	۱/۵	۰/۰۰۳	۰/۰۵
۲	۰/۰۴	۰/۰۹	۰/۰۵	۳	۱	۰/۰۰۴	۰/۰۷۵
۳	۰/۰۴	۰/۰۹	۰/۰۵	۲	۰/۵	۰/۰۰۵	۰/۱

با توجه به الگوریتم ارائه‌شده در بخش ۳ و پارامترها، با حل مدل به جواب زیر می‌رسیم:

جدول ۳. نتایج حاصل از حل مدل

P	$T_{\min}$	T	$T^* = T_1$	Q_i	B_i	Z
۱				۵۱۵۷	۲۳۳۱	
۲	۰/۱۲۸۸	۲/۵۷۶	۲/۵۷۶	۳۶۳۸	۱۰۶۰	۹۰۴۶,۹۳
۳				۲۵۷۹	۳۷۵	

درنتیجه، جواب بهینۀ سیستم موجـودی در حالـت اول رخ می‌دهد که $M < t_i^a$ است.

نتیجه‌گیری

به‌طورکلی، با توجه به پژوهش‌های پیشین و بررسـی‌هـا در زمینه‌های مربوط به موضوع این مقاله، می‌توان گفت اگرچه مقاله‌هایی که در زمینۀ موضوع کنتـرل موجـودی و تولیـد کالای معیوب، خرید اعتباری و تولید چندمحصـول بـا یـک ماشین بسیار متعددند، مقاله یا مطالعه‌ای دیده نمی‌شود که هم‌زمان به مدل مقـدار سـفارش اقتصـادی و وجـود نـوعی

سیاست تشویقی مانند خرید اعتباری و تولید کالای معیوب و چندمحصولی‌بودن پرداخته باشد. در پژوهش حاضر، در یکی از مدل‌های کنترل موجودی، یعنی مدل مقدار تولید اقتصادی در شرایط پرداخت معوقه، در طول فرایند تولید، کالاهای معیوب و بدون کیفیت با نرخ ثابتی تولید می‌شوند. پس از فرایند دوباره‌کاری این کالاها به کالای باکیفیت تبدیل می‌شوند و همین امر هزینه‌های تولیدکننده را تغییر می‌دهد. در مدل‌سازی صورت‌گرفته، پس از به‌دست‌آوردن هزینه‌های اساسی در سیستم کنترل موجودی و محاسبهٔ تابع هزینه، با استفاده از نامعادلهٔ میانگین حسابی-هندسی، طول سیکل بهینه، میزان تولید و میزان کمبود بهینه به‌دست آمد. در انتها با ذکر یک مثال عددی، حل بهینهٔ مدل ارائه‌شده میسر شد. همان‌طورکه در مثال عددی مشاهده شد، با افزایش نرخ بهرهٔ دریافتی، هزینهٔ حاصل نیز کاهش می‌یابد. شایان ذکر است می‌توان تمامی سیستم‌های تولیدی را- که در آن‌ها چند محصول از طریق یک ماشین تولید می‌شود- از طریق مدل این مقاله بهینه ساخت. به‌طور طبیعی، وجود محدودیت ظرفیت در تمامی سیستم‌های تولید- که نشئت‌گرفته از تعداد ماشین‌آلات دردسترس است- تولید بهینه برای هر محصول و زمان‌بندی سیکل‌های موجودی را براساس مدل توسعه-داده‌شده بیش از پیش ضروری می‌سازد. توسعهٔ مدل با سیاست‌های پیش‌پرداخت و همچنین درنظرگرفتن سایر سیاست‌های انگیزشی نظیر حراج و افزایش قیمت در زمان مشخص را می‌توان در پژوهش‌های آتی مطالعه کرد.

قدردانی

از حمایت مالی دانشگاه تهران از این پژوهش در قالب طرح پژوهشی با شمارهٔ ۰۲-۱-۳۰۰۱۵ قدردانی می‌شود.

پیوست

می‌دانیم

$$U_i^1=\left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}}\right)\left(b_i+h_i+v_iI_C\right)>0$$

و

$$R_i^1=h_i\left(1-\frac{\lambda_i}{P_i}\right)+v_iI_C>0$$

و

$$W_i^1=h_i+v_iI_C>0;$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$U_i^1R_i^1=\left[b_i\left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}}\right)+\left(h_i+v_iI_C\right)\left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}}\right)\right]$$

$$\times\left[h_i\left(1-\frac{\lambda_i}{P_i}\right)+v_iI_C\right]$$

$$\geq\left(h_i+v_iI_C\right)\left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}}\right)\left(h_i+v_iI_C-h_i\frac{\lambda_i}{P_i}\right)$$

$$\geq\left(h_i+v_iI_C\right)^2\left(\frac{(1-X_i)(P_i-\lambda_i)}{(1-X_i)P_i-\lambda_i}\right)\geq\left(h_i+v_iI_C\right)^2=\left(W_i^1\right)^2$$

مراجع

1. Harris, F. (1915). “Operations and cost (factory management series)”, Chicago: A. W. Show Co.
2. Hadley, G. and Whiten, T. M. (1963). “Analysis of inventory systems”, Clifs, NJ: Prentice- Hall.
3. Darwish, M. A. (2008). “EPQ models with varying setup cost.” *International Journal of Production Economics*, Vol. 113, No. 1, PP. 297–306.
4. Porteus, E.L. (1986). “Optimal lot sizing, process quality improvement and setup cost reduction.” *Operations Research*, Vol. 34, No. 5, PP. 137–44.
5. Grubbstrom, R.W. and Wang, Z. (2003). “A stochastic model of multi-level/multi-stage capacity constrained production–inventory systems.” *International Journal of Production Economics*, Vol. 81, No. 1, PP. 483–494.
6. Rosenblatt, M.J. and Lee, H.L. (1986). “Economic production cycles with imperfect production processes.” *IIE Transactions*, Vol. 18, No, 1, PP. 48–55.
7. Taleizadeh, A.A., Najafi, A.A. and Niaki, S.T.A. (2010a). “Economic production quantity model with scraped items and limited production capacity.” *Scientia Iranica*, Vol. 17, No. 1, PP. 58–69.

8. Chan, W.M., Ibrahim, R.N. and Lochert, P.B. (2003). “A new EPQ model: Integrating lower pricing, rework and reject situation.s” *Production Planning and Control*, Vol. 14, No. 7, PP. 588–595.

9. Salameh, M.K. and Jaber M.Y. (2000). “Economic order quantity model for items with imperfect quality.” *International Journal of Production Economics*, Vol. No. 1-3, PP. 59–64.

10. Taleizadeh, A.A., Cárdenas-Barrón, L.E. and Mohammadi, B., (2014). “A deterministic multi product single machine EPQ model with backordering, scraped products, rework and interruption in manufacturing process.” *International Journal of Production Economics*. Vol. 3, No. 2, PP. 9–27.

11. Sarkar, B., Cárdenas-Barrón., L.E, Sarkar., M. and Singgih., M.L. (2014). An economic production quantity model with random defective rate, rework process and backorders for a single stage production system. *Journal of Manufacturing Systems*, Vol. 33, No. 3, PP. 423-435.

12. Haley C.W. and Higgins, R.C. (1973). “Inventory policy and trade credit financing.” *Management Science*, Vol. 20, No. 4, PP. 464–471.

13. Chapman, C.B., Ward, S.C., Cooper, D.F., and Page, M. J. (1984). “Credit policy and inventory control.” *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 35, No. 12, PP. 1055–1065.

14. Abada, P.L. and Jaggi, C.K. (2003). “A joint approach for setting unit price and the length of the credit period for a seller when end demand is price sensitive.” *International Journal of Production Economics*, Vol. 83, No. 2, PP. 115–122.

15. Chung K. and Huang, Y. (2003). “The optimal cycle time for EPQ inventory model under permissible delay in payments.” *International Journal of Production Economics*, Vol. 84, No. 3, PP. 307–318.

16. Chung K. and Huang, Y. (2006). “Retailer's optimal cycle times in the EOQ model with imperfect quality and a permissible credit period.” *Quality and Quantity*, Vol. 40, No. 1, PP. 59–77.

17. Khouja, M. and Mehrez, A. (1996). “Optimal inventory policy under different supplier credit policies.” *Journal of Manufacturing Systems*, Vol. 15, No. 5, PP. 334-339.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1. Rework
2. Trade credit
3. Quality Control
4. Arithmetic – geometric mean inequality