

## مقایسه بین منظم‌سازی تیخونف و تجزیه مقدار تکین قطع شده در وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی

وحید ابراهیم‌زاده اردستانی<sup>۱</sup>، سعید وطن‌خواه<sup>۲\*</sup> و رضوان سلطان‌آبادی<sup>۳</sup>

۱. استاد، گروه فیزیک زمین، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

۲. استادیار، گروه فیزیک زمین، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

۳. دانش‌آموخته کارشناسی ارشد ژئوفیزیک، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۴/۴/۱۵، پذیرش نهایی: ۹۴/۱۱/۱۱)

### چکیده

در این مقاله وارون‌سازی سه‌بعدی گرانی‌سنجی با استفاده از دو روش منظم‌سازی تیخونف و تجزیه مقدار تکین قطع‌شده بررسی شده است. ماتریس وزن‌دهی عمقی و قید Minimum Support در وارون‌سازی مورد استفاده قرار گرفته است. در منظم‌سازی تیخونف از روش  $\chi^2 - principle$  برای تعیین پارامتر تنظیم استفاده شده است درحالی‌که ترسیم پیکارد برای تعیین اندیس قطع در روش تجزیه مقدار تکین قطع‌شده به کار رفته است. داده مصنوعی تولید شده از یک دایک شیب‌دار با اضافه کردن نوفه در سه سطح متفاوت، درحکم ورودی برای وارون‌سازی استفاده شده است. نتایج حاصل از مدل‌سازی دلالت بر آن دارد که الگوریتم‌های عرضه شده به‌طور کلی توانایی خوبی برای بازسازی شیب و مرزهای مدل دارند. این نتایج نشان می‌دهد که تکنی مدل با استفاده از روش تجزیه مقدار تکین قطع‌شده بیشتر است، هم‌زمان تعداد تکرارهای بیشتری برای توقف وارون‌سازی در این روش مورد نیاز است. روش تیخونف برای نوفه سطح بالا مدلی هموار بازسازی کرده است درحالی‌که برای دو سطح نوفه دیگر مدل ساخته شده بسیار نزدیک به مدل اصلی است. در روش تجزیه مقدار تکین قطع‌شده، در مقایسه با روش تیخونف، نیاز به ترسیم پیکارد سبب کاهش سرعت اجرای الگوریتم می‌شود. الگوریتم‌های عرضه شده روی داده برداشت شده در ناحیه سد گتوند به کار رفته و نتایج حاصل از مدل‌سازی نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: گرانی‌سنجی، وارون‌سازی، منظم‌سازی تیخونف، تجزیه مقدار تکین قطع‌شده، پارامتر تنظیم، گتوند.

### ۱ مقدمه

هم‌زمان دارای حساسیت کمی نسبت به نوفه باشد، باید از فرایند منظم‌سازی (Regularization) جواب استفاده کرد. چندین روش متفاوت برای منظم‌سازی مسئله‌های وارون خطی وجود دارد. یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین آنها تنظیم تیخونف (Tikhonov Regularization) است. در این حالت تابع هدفی مشکل از دو عبارت نبود انطباق داده‌ها (Data Misfit) و عبارت پایدارکننده (Stabilizer) جایگزین مسئله بدوضع اولیه می‌شود، به طوری که جواب از کمینه کردن این تابع هدف به دست می‌آید. در منظم‌سازی تیخونف پایدارسازی جواب را با عامل‌های فیلتر (filter factors) و کاهش نبود یکتایی مسئله با اعمال ماتریس منظم‌سازی کنترل می‌کنند. روش دیگری که برای منظم‌سازی

در وارون‌سازی گرانی، هدف آن است که با استفاده از داده‌های برداشت شده در سطح زمین به برآوردی از چگالی و توزیع هندسی چشمه زیرسطحی تولیدکننده این داده دست یافت. وارون گرانی‌سنجی از نوع مسئله‌های بدوضع (Ill-posed) است، به این معنا که نبود یکتایی (non-uniqueness) و نبود پایداری جواب برای آن، مشکل ساز است. مسئله نبود یکتایی از دو جنبه قابل طرح است؛ نبود یکتایی ناشی از ماهیت چشمه‌های گرانی و نبود یکتایی جبری ناشی از نوع تقسیم‌بندی سطح زیرین. مسئله نبود پایداری جواب مربوط به بدشرط بودن (ill-condition) ماتریس کرنل و وجود نوفه در داده‌های گرانی است. بنابراین برای به دست آوردن جوابی که از لحاظ زمین‌شناسی مناسب و

جواب‌ها نیاز است که قید مناسب آنها در الگوریتم وارون به کار رود. در این مقاله هدف بازسازی ساختارهایی با مرزهای گسسته است، لذا از قید MS استفاده خواهد شد.

در ادامه ابتدا نظریه روش مورد استفاده بیان خواهد شد. سپس نحوه اجرای تنظیم تیخونف و تجزیه مقدار تکین قطع شده در وارون‌سازی گرانی نشان داده می‌شود. در مورد روش تعیین پارامتر تنظیم و نیز ترسیم پیکارد به تفصیل بحث صورت می‌پذیرد. سپس استفاده از این روش‌های منظم‌سازی روی داده حاصل از مدل مصنوعی دایک شیب‌دار نشان داده می‌شود. در پایان داده گرانی برداشت شده در ناحیه سد گتوند مورد استفاده قرار می‌گیرد و با مدل‌سازی ناحیه زیر سطح، ابعاد و گسترش چشمه‌های کم‌چگال در این ناحیه تعیین می‌شود.

## ۲. نظریه روش

در بررسی‌های گرانی‌سنجی معمولاً داده‌ها از تعداد محدودی نقاط روی سطح برداشت می‌شوند. فرض کنید این داده‌ها در بردار  $\mathbf{d}^{obs} \in \mathbb{R}^m$  قرار داده شوند. برای وارون‌سازی نیاز است که سطح زیرین در ناحیه برداشت داده به صورت گسسته مدل شود. روش غالب مورد استفاده معمولاً تقسیم سطح زیرین به مکعب‌هایی با اندازه ثابت است (لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۶ و بولانگر و چوتو، ۲۰۰۱). تباین چگالی مجهول این مکعب‌ها در بردار  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$  در نظر گرفته می‌شود. در مورد انتخاب ابعاد بهینه برای این مکعب‌ها به بولانگر و چوتو (۲۰۰۱) مراجعه شود. رابطه بین پارامترهای مدل و داده‌ها با ماتریس کرنل  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  به صورت زیر برقرار است (بلکلی، ۱۹۹۶):

$$G\mathbf{m} = \mathbf{d}^{obs} \quad (1)$$

در وارون‌سازی گرانی هدف پیدا کردن جوابی تقریبی برای رابطه (۱) است که هم‌زمان از نظر زمین‌شناسی نیز قابل قبول باشد. همان‌طور که پیش‌تر شرح داده شد این مسئله بدو وضع است، بنابراین دستیابی

مسئله‌های وارون خطی به کار برده شده، تجزیه مقدار تکین قطع شده (Truncated Singular Value Decomposition) است. در این روش بردارهای تکین مربوط به مقادیر تکین کوچک کنار گذاشته می‌شود و جواب در زیرفضایی شامل تعدادی از بردارهای تکین مربوط به مقادیر تکین بزرگ حاصل می‌شود. در حالت کلی تفاوت این دو روش در عامل‌های فیلتر به کار رفته برای هر یک است. مقادیر عامل‌های فیلتر در تنظیم تیخونف در بازه بین صفر و یک قرار دارد، در حالی که در روش TSVD عامل‌های فیلتر فقط دو مقدار صفر و یک را می‌پذیرند. در این تحقیق هر دوی این روش‌های تنظیم روی مسئله وارون خطی گرانی‌سنجی به کار می‌رود.

دو نکته در همه روش‌های منظم‌سازی مهم است، به طوری که تعیین آنها تاثیر مستقیم بر جواب نهایی خواهد داشت. اولین نکته، انتخاب پارامتر تنظیم است. در تنظیم تیخونف این پارامتر که به صورت اسکالر  $\alpha$  است، در واقع تعادل بین دو عبارت تابع هدف را برقرار می‌کند. مقادیر  $\alpha$  کوچک منتهی به جواب‌هایی می‌شوند که نوسان زیادی دارند، در حالی که  $\alpha$  های بزرگ سبب همواری جواب خواهند شد. روش‌های متفاوتی برای تعیین این پارامتر معرفی شده است. در این مقاله از روش  $\chi^2$  - principle برای برآورد پارامتر تنظیم بهینه استفاده خواهد شد. در روش TSVD اندیس قطع  $q$ ، که بر تعداد بردارهای تکین مورد استفاده دلالت دارد، در واقع نقش پارامتر تنظیم را ایفا می‌کند. در این مقاله برای تعیین اندیس قطع از روش ترسیم پیکارد استفاده می‌شود. نکته مهم دوم آن است که جواب مورد نظر باید در دسته جواب‌های خاصی جست‌وجو شود. برای مثال در وارون‌سازی گرانی اغلب دو نوع مدل مورد جست‌وجو است: مدل‌های هموار و مدل‌های با مرزهای شاخص. انتخاب نوع مدل به دیدگاه مفسر از نوع زمین‌شناسی منطقه و ساختار مورد جست‌وجو مربوط است. برای دست‌یابی به هر یک از این دسته

مدلی با کمترین حجم است، در نتیجه به الگوریتم توانایی بازسازی مرزهای شاخص را می‌دهد. در سال‌های بعد این قید را پورتنیاگوین و زادانف (۱۹۹۹) تحت نام Minimum Support (MS) توسعه دادند. برای استفاده از قید MS ماتریس قطری  $W_{MS} = \text{diag}(1/((\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}})^2 + \varepsilon^2)^{1/2}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  در فرایند وارون‌سازی اعمال می‌شود. پارامتر  $\varepsilon$  میزان فشردگی مدل را تعیین می‌کند و مقدار آن برابر یک عدد مثبت کوچک در نظر گرفته می‌شود. ماتریس MS وابسته به پارامترهای مدل است، پس نیاز است که الگوریتم وارون به صورت تکرار حل شود. در مورد نحوه اجرای این قید در ادامه توضیح داده می‌شود. با توجه به این نکات و با در نظر گرفتن  $W = W_{\text{depth}} W_{MS}$  رابطه (۳) به شکل رابطه (۴) نوشته می‌شود:

$$W_d G W^{-1} W y = W_d r \quad (4)$$

توجه شود که ماتریس  $W$  قطری است، لذا وارون‌پذیر است. با در نظر گرفتن  $\tilde{G} = W_d G$ ،  $W y = z$ ،  $\tilde{r} = W_d r$  رابطه (۴) به صورت رابطه (۵) بازنویسی می‌شود:

$$\tilde{G} z = \tilde{r} \quad (5)$$

پرکاربردترین روش برای حل رابطه (۵) در وارون‌سازی گرانی، استفاده از روش تنظیم تیخونف است. در این روش رابطه (۵) با تابع هدفی به شکل رابطه (۶) جایگزین می‌شود:

$$P^\alpha(z) = \left\| \tilde{G} z - \tilde{r} \right\|_2^2 + \alpha^2 \|z\|_2^2 \quad (6)$$

که در آن، عبارت نبود انطباق داده،  $\left\| \tilde{G} z - \tilde{r} \right\|_2^2$ ، کیفیت برازش داده حاصل از جواب را با داده مشاهده‌ای تعیین می‌کند و عبارت تنظیم  $\Phi(z) = \|z\|_2^2$ ، برای پایدارسازی جواب مورد استفاده قرار می‌گیرد. تعادل بین این دو عبارت با پارامتر تنظیم  $\alpha$  کنترل می‌شود که در ادامه در مورد نحوه محاسبه آن توضیح داده خواهد شد. از کمینه کردن رابطه (۶) جواب به دست می‌آید:

$$z(\alpha) = \arg \min \{P^\alpha(z)\} = (\tilde{G}^T \tilde{G} + \alpha^2 I_m)^{-1} \tilde{G}^T \tilde{r} \quad (7)$$

یک روش حل عددی برای رابطه (۷) استفاده از تجزیه

به جواب بهینه نیاز به فرایند منظم‌سازی دارد. در این تحقیق دو روش تنظیم تیخونف و TSVD مورد استفاده قرار گرفته است که در ادامه توضیح داده خواهد شد. برای آنکه رابطه (۱) برای به کارگیری در وارون گرانی سنجی مفید باشد لازم است تغییراتی در آن اعمال شود. با کم کردن عبارت  $G \mathbf{m}_{\text{prior}}$  از دو طرف معادله (۱) می‌توان نوشت:

$$G \mathbf{m} - G \mathbf{m}_{\text{prior}} = \mathbf{d}^{\text{obs}} - G \mathbf{m}_{\text{prior}} \quad (2)$$

که در این رابطه  $\mathbf{m}_{\text{prior}}$  بردار تباین چگالی برای مدل اولیه است و با توجه به اطلاعات اولیه مانند زمین شناسی و یا حفاری تعیین می‌شود و در صورت نبود چنین اطلاعاتی  $\mathbf{m}_{\text{prior}} = \mathbf{0}$  است. با در نظر گرفتن  $\mathbf{y} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}}$  و  $\mathbf{r} = \mathbf{d}^{\text{obs}} - G \mathbf{m}_{\text{prior}}$  رابطه (۲) به شکل رابطه (۳) بازنویسی می‌شود:

$$G y = r \quad (3)$$

در وارون گرانی سنجی، دامنه کرنل به سرعت با عمق کاهش می‌یابد بنابراین مدل بازسازی شده نزدیک به سطح متمرکز می‌شود، لذا نیاز است که از یک تابع وزندهی عمقی برای خنثی کردن کاهش حساسیت کرنل با عمق استفاده شود (لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۶ و پیلکینگتون، ۱۹۹۷). ماتریس وزندهی عمقی، ماتریسی قطری به شکل  $W_{\text{depth}} = (1/z_j)^\beta$  است که در آن  $z_j$  عمق متوسط برای سلول  $j$ ام و پارامتر  $\beta$  وزن مناسب برای این ماتریس را فراهم می‌کند. علاوه بر آن نیاز است که ماتریس وزندهی داده‌ها،  $W_d$ ، نیز در رابطه (۳) مورد استفاده قرار گیرد. با فرض مستقل بودن نوفه موجود در داده‌ها، این ماتریس به صورت ماتریس قطری  $W_d = \text{diag}(1/\eta_1, \dots, 1/\eta_m)$  نوشته می‌شود که  $\eta_i$  انحراف معیار نوفه موجود در داده‌ی  $i$ ام است. بیان شد که در این تحقیق، بازسازی ساختارهایی مورد نظر است که مرزهای گسسته‌ای با محیط پیرامون شان دارند. بنابراین نیاز است از قیدهایی که برای بازسازی چنین ساختارهایی معرفی شده‌اند استفاده کرد. بدون شک پرکاربردترین این قیدها، قید فشردگی است که لاست و کوییک (۱۹۸۳) آنها را معرفی کردند. فشردگی به معنای جست‌وجوی

$\chi^2$  با  $m$  درجه آزادی تبعیت می‌کند. بنابراین باید به دنبال  $\alpha$  ای بود که در این شرط صدق کند. با استفاده از تجزیه مقادیر تکین برای کمینه تابع هدف می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{\sigma_i^2 \alpha^{-2} + 1} \right) (\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{r}})^2 \approx m \quad (10)$$

اکنون می‌توان با استفاده از الگوریتم ریشه‌یابی نیوتن، پارامتر تنظیم را از رابطه (۱۰) محاسبه کرد و در رابطه (۹) به کار برد. مراحل وارون‌سازی با استفاده از روش تیخونف در جدول ۱ خلاصه شده است.

روش دیگر برای حل رابطه (۵) استفاده از تجزیه مقدار تکین قطع شده (TSVD) است. در ابتدا جواب کمترین مربعات برای رابطه (۵)،  $\|\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{r}}\|_2$ ، با استفاده از SVD به شکل رابطه (۱۱) نوشته می‌شود:

$$\mathbf{z}(\alpha) = (\tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{G}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{r}}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (11)$$

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، بردارهای تکین نوسانی متناظر با مقادیر تکین کوچک در واقع سبب ناپایداری جواب می‌شوند. در منظم‌سازی تیخونف با معرفی عامل فیلتر تاثیر این مولفه‌های نوسانی کاهش یافت. حال آنکه روش تجزیه مقادیر تکین قطع شده با کنار گذاشتن این بردارهای تکین به تنظیم جواب می‌پردازد. در واقع برای این روش عامل‌های فیلتر به شکل زیرند:

$$\Phi_{\text{TSVD}} = \begin{cases} 0 & \text{for } i > q \\ 1 & \text{for } i \leq q \end{cases} \quad (12)$$

که در آن، پارامتر  $q$  بر اندیس مربوط به آخرین مقدار تکین مورد استفاده دلالت دارد. بنابراین در این حالت جواب از ترکیب خطی  $q$  بردار تکین نخست،  $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q]$ ، از مجموعه کل فضای مدل،  $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ ، به صورت رابطه (۱۳) حاصل می‌شود:

$$\mathbf{z}(q) = \sum_{i=1}^q \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{r}}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (13)$$

توجه شود که در واقع برای این حالت مسئله منظم‌سازی به شکل رابطه (۱۴) است:

$$\text{minimize } \|\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{r}}\|_2^2 \quad \text{subject to } \mathbf{z} \in S_q = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q] \quad (14)$$

مقادیر تکین (SVD) ماتریس  $\tilde{\mathbf{G}}$  است. با استفاده از SVD ماتریس  $\tilde{\mathbf{G}}$  به صورت حاصل ضرب سه ماتریس به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \quad (8)$$

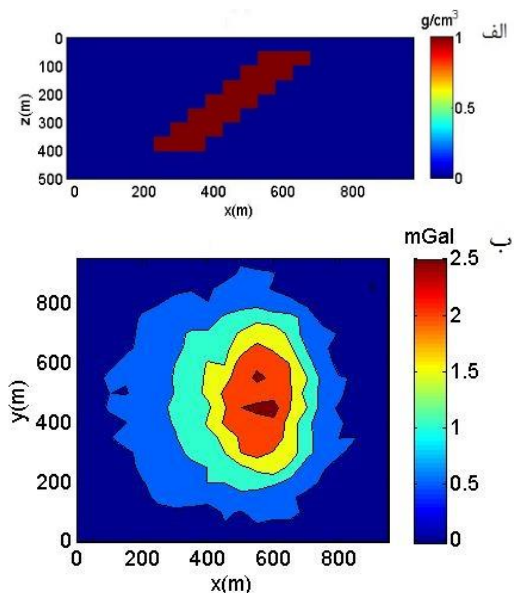
که در آن،  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ماتریس قطری شامل مقادیر تکین است که به ترتیب  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$  روی قطر اصلی قرار گرفته‌اند. دو ماتریس  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  و  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  به صورت سطری و ستونی متعامدند؛ به صورت  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{I}$ . با استفاده از این تعریف رابطه (۷) به صورت رابطه (۹) نوشته می‌شود (وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۵):

$$\mathbf{z}(\alpha) = \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{r}}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (9)$$

در این رابطه  $\mathbf{u}_i$  و  $\mathbf{v}_i$  ستون‌های ماتریس‌های  $\mathbf{U}$  و  $\mathbf{V}$  هستند. کمیت  $\Phi_{\text{Tikh}} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2}$  عامل فیلتر (Filter Factor) تیخونف نامیده می‌شود که مقدار آن در بازه  $[0, 1]$  قرار دارد. نشان داده شده است که بردارهای تکین  $\mathbf{u}_i$  و  $\mathbf{v}_i$  با افزایش اندیس  $i$ ، مربوط به مقادیر تکین کوچک، حالت نوسانی می‌یابند (هانسن، ۱۹۹۸).

بنابراین نقش عامل فیلتر تیخونف در این رابطه جلوگیری از غلبه ضریب‌های جواب،  $\frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{r}}}{\sigma_i}$ ، مربوط به مقادیر تکین کوچک در پاسخ نهایی است. برای مقادیر  $\sigma_i$  کوچک‌تر از  $\alpha$ ، عامل‌های فیلتر کوچک هستند و ضریب‌های جواب مربوط به آن‌ها فیلتر می‌شوند در حالی که برای مقادیر  $\sigma_i$  بزرگ‌تر از  $\alpha$ ، عامل‌های فیلتر به سمت یک می‌روند و بنابراین، ضریب‌های جواب مربوط به آنها کاملاً در  $\mathbf{z}(\alpha)$  حضور دارند. پس  $\mathbf{z}(\alpha)$  جوابی فیلتر شده است به طوری که میزان این فیلترشدگی به انتخاب پارامتر تنظیم بستگی دارد. برای تعیین پارامتر  $\alpha$  روش‌های گوناگونی معرفی شده است، که در این مقاله از روش  $\chi^2$  - principle استفاده می‌شود (وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۴). ایده روش  $\chi^2$  - principle بر این اصل استوار است که کمینه تابع تیخونف، رابطه (۶)، متغیری تصادفی است که از توزیع

جدول‌های ۱ و ۲ از داده تولید شده از یک مدل دایک شیب‌دار استفاده شده است. شکل ۱ سطح مقطعی از این دایک را نشان می‌دهد. تباین چگالی مدل با محیط دربرگیرنده‌اش برابر  $1 \text{ gr/cm}^3$  است. دایک از عمق ۵۰m شروع و تا ۴۰۰ m ادامه دارد. داده مصنوعی حاصل از این مدل،  $\mathbf{d}^{\text{exact}}$ ، در شبکه‌ای منظم شامل  $20 \times 20 = 400$  ایستگاه در سطح با فاصله ایستگاهی ۵۰m تولید می‌شود. برای افزودن نوفه، در ابتدا بردار تصادفی  $\Theta \in \mathbb{R}^m$  با توزیع نرمال، میانگین صفر و انحراف معیار یک، تولید شده است. سپس نوفه در سه سطح با انحراف معیار  $(\eta_1(\mathbf{d}^{\text{exact}})_i + \eta_2 \|\mathbf{d}^{\text{exact}}\|_2)$  به هر داده اضافه شده است یعنی  $\mathbf{d}^{\text{obs}} = \mathbf{d}^{\text{exact}} + (\eta_1(\mathbf{d}^{\text{exact}})_i + \eta_2 \|\mathbf{d}^{\text{exact}}\|_2)\Theta$ ، نوفه متفاوت، به ترتیب  $(\eta_1, \eta_2) = (0.01, 0.001)$ ،  $(\eta_1, \eta_2) = (0.02, 0.005)$  و  $(\eta_1, \eta_2) = (0.03, 0.01)$  انتخاب می‌شوند. شکل (ب) داده متعلق به سطح نوفه دوم  $(\eta_1, \eta_2) = (0.02, 0.005)$  را نشان می‌دهد.



شکل ۱. (الف) دایک شیب‌دار دارای تباین چگالی  $1 \text{ gr/cm}^3$  با محیط دربرگیرنده آن و (ب) داده تولید شده با دایک و آمیخته به نوفه سطح دوم

که در آن،  $S_q$  زیرفضایی است که جواب در آن مورد جست‌وجو است. نکته باقی‌مانده برای روش TSVD چگونگی تعیین اندیس قطع  $q$  است. در این مقاله برای تعیین این اندیس از ترسیم پیکارد (Picard Plot) کمک گرفته می‌شود. در متن‌های مربوط به مسئله‌های وارون، ترسیمی از ضریب‌های جواب  $(\frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{r}}}{\sigma_i})$  و ضریب‌های SVD  $(\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{r}})$  به همراه مقادیر تکین  $(\sigma_i)$  تحت عنوان ترسیم پیکارد شناخته می‌شود (هانسن، ۱۹۹۸). در این رسم، ضریب‌های SVD سریع‌تر از مقادیر تکین تنزل می‌کنند تا آنکه در ترازوی که با نوفه تعیین می‌شود، هم‌سطح می‌شوند. در واقع ضریب‌های جواب در ابتدا کاهش می‌یابند اما برای مقادیر بزرگ  $i$  شروع به افزایش می‌کنند. بنابراین با استفاده از این رسم می‌توان تعداد مولفه‌های موردنیاز برای بازسازی جواب منظم‌شده را یافت که همان مقدار اندیس  $q$  است. مراحل وارون‌سازی با استفاده از روش تجزیه مقدار تکین قطع شده در جدول ۲ خلاصه شده است.

استفاده از قید MS سبب می‌شود که الگوریتم منظم‌سازی نیازمند تکرار باشد، لذا باید معیاری برای توقف این تکرارها تعیین شود. معیار اول آن است که شرط برازش داده،  $\chi_{\text{computed}}^2 = \frac{\|\mathbf{d}_i^{\text{obs}} - (\mathbf{Gm}^{(k)})_i\|_2^2}{\eta_i} \leq m + \sqrt{2m}$  برآورده شود (بولانگر و چوتو، ۲۰۰۱). در این رابطه  $\mathbf{Gm}^{(k)}$  داده حاصل از مدل ساخته شده در تکرار  $k$ ام است. در صورتی که این شرط برآورده نشود، بیشینه تعداد تکرارها معیار توقف خواهد بود. نکته مهم دیگر که رعایت آن برای وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی ضروری است، استفاده از کران بالا و پایین برای چگالی،  $[m_{\min}, m_{\max}]$ ، است. رعایت این مورد نبود یکتایی مسئله را کاهش می‌دهد و جواب محاسبه شده را به جواب اصلی نزدیک خواهد کرد.

### ۳. مدل مصنوعی

برای بررسی الگوریتم‌های وارون‌سازی بیان شده در

جدول ۱. مراحل وارون‌سازی گرانی با استفاده از تنظیم تیخونف

ورودی‌ها: $\mathbf{m}_{\max}$ , $\mathbf{m}_{\min}$ , $\beta = 0.8$ , $\varepsilon > 0$ , $W_d$ , $\mathbf{m}_{\text{prior}}$ , $G$ , $\mathbf{d}^{\text{obs}}$
مرحله ۱. قرار دادن $\mathbf{m}^{(0)} = \mathbf{m}_{\text{prior}}$ , محاسبه $W_M^{(1)} = I$ , $W_{\text{depth}}^{(1)} = W_{\text{depth}}$ , $W^{(1)} = W_{\text{depth}}$
مرحله ۲. محاسبه $\tilde{G}^{(1)} = \tilde{G}(W^{(1)})^{(-1)}$ , $\tilde{\mathbf{r}}^{(1)} = W_d(\mathbf{d}^{\text{obs}} - G\mathbf{m}^{(0)})$
مرحله ۳. محاسبه تجزیه مقادیر تکین: $\tilde{G}^{(k)} = U \Sigma V^T$
مرحله ۴. محاسبه پارامتر تنظیم $\alpha^{(k)}$ با استفاده از رابطه (۱۰)
مرحله ۵. محاسبه $\mathbf{z}(\alpha)^{(k)} = \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + (\alpha^{(k)})^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{r}}^{(k)}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$
مرحله ۶. محاسبه $\mathbf{m}^{(k)} = \mathbf{m}^{(k-1)} + \mathbf{y}^{(k)}$ , $\mathbf{y}^{(k)} = (W^{(k)})^{-1} \mathbf{z}(\alpha)^{(k)}$
مرحله ۷. اعمال کران‌های چگالی طوری که $\mathbf{m}_{\min} \leq \mathbf{m}^{(k)} \leq \mathbf{m}_{\max}$
مرحله ۸. محاسبه $W_M^{(k+1)} = \text{diag}(\frac{1}{((\mathbf{m}^{(k)} - \mathbf{m}^{(k-1)})^2 + \varepsilon^2)^{1/2}})$ , $\tilde{\mathbf{r}}^{(k+1)} = W_d(\mathbf{d}^{\text{obs}} - G\mathbf{m}^{(k)})$ , $W^{(k+1)} = W_{\text{depth}} W_M^{(k+1)}$ , $\tilde{G}^{(k+1)} = \tilde{G}(W^{(k+1)})^{-1}$
مرحله ۹. قرار دادن $k = k + 1$
مرحله ۱۰. معیار توقف بررسی شود، در صورت برآورده شدن، فرایند متوقف شود و در غیر این صورت، برو به مرحله ۳
خروجی: $\mathbf{m}^{(k)}$

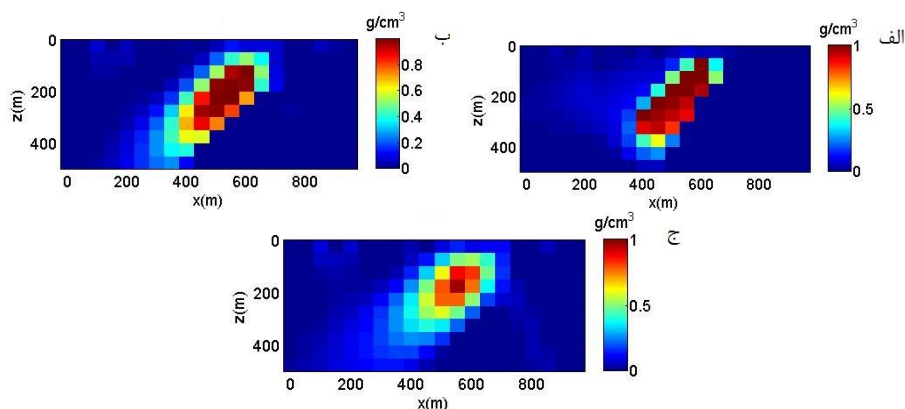
جدول ۲. مراحل وارون‌سازی گرانی با استفاده از تجزیه مقدار تکین قطع شده

ورودی‌ها: $\mathbf{m}_{\max}$ , $\mathbf{m}_{\min}$ , $\beta = 0.8$ , $\varepsilon > 0$ , $W_d$ , $\mathbf{m}_{\text{prior}}$ , $G$ , $\mathbf{d}^{\text{obs}}$
مرحله ۱. قرار دادن $\mathbf{m}^{(0)} = \mathbf{m}_{\text{prior}}$ , محاسبه $W_M^{(1)} = I$ , $W_{\text{depth}}^{(1)} = W_{\text{depth}}$ , $W^{(1)} = W_{\text{depth}}$
مرحله ۲. محاسبه $\tilde{G}^{(1)} = \tilde{G}(W^{(1)})^{(-1)}$ , $\tilde{\mathbf{r}}^{(1)} = W_d(\mathbf{d}^{\text{obs}} - G\mathbf{m}^{(0)})$
مرحله ۳. محاسبه تجزیه مقادیر تکین: $\tilde{G}^{(k)} = U \Sigma V^T$
مرحله ۴. محاسبه اندیس قطع $q$ با استفاده از رسم پیکارد
مرحله ۵. محاسبه $\mathbf{z}(q)^{(k)} = \sum_{i=1}^q \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{r}}^{(k)}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$
مرحله ۶. محاسبه $\mathbf{m}^{(k)} = \mathbf{m}^{(k-1)} + \mathbf{y}^{(k)}$ , $\mathbf{y}^{(k)} = (W^{(k)})^{-1} \mathbf{z}(q)^{(k)}$
مرحله ۷. اعمال کران‌های چگالی طوری که $\mathbf{m}_{\min} \leq \mathbf{m}^{(k)} \leq \mathbf{m}_{\max}$
مرحله ۸. محاسبه $W_M^{(k+1)} = \text{diag}(\frac{1}{((\mathbf{m}^{(k)} - \mathbf{m}^{(k-1)})^2 + \varepsilon^2)^{1/2}})$ , $\tilde{\mathbf{r}}^{(k+1)} = W_d(\mathbf{d}^{\text{obs}} - G\mathbf{m}^{(k)})$ , $W^{(k+1)} = W_{\text{depth}} W_M^{(k+1)}$ , $\tilde{G}^{(k+1)} = \tilde{G}(W^{(k+1)})^{-1}$
مرحله ۹. قرار دادن $k = k + 1$
مرحله ۱۰. معیار توقف بررسی شود، در صورت برآورده شدن، فرایند متوقف شود و در غیر این صورت، برو به مرحله ۳
خروجی: $\mathbf{m}^{(k)}$

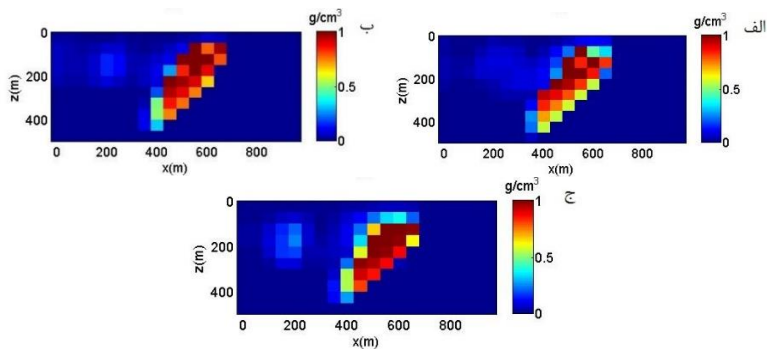
می‌گیرد. مدل‌های بازسازی شده در شکل‌های ۲ و ۳ نمایش داده شده‌اند. در حالت کلی هر دو الگوریتم جدول‌های ۱ و ۲ توانایی خوبی در بازسازی مدل اصلی دارند. شیب و ساختار کلی دایک به خوبی بازسازی شده است. در بازسازی به روش تیخونف تُنکی مدل حاصل به میزان نوبهٔ اعمال شده در داده وابسته است؛ با افزایش نوبهٔ تُنکی مدل کاهش می‌یابد. این حالت به ویژه در عمق به وضوح نمایان است. برای مدل بازسازی شده به روش TSVD تُنکی پاسخ وابستگی بسیار کمتری به سطح نوبه دارد.

شکل ۴، عبارت نبود انطباق داده، عبارت تنظیم و پارامتر  $\alpha$  را در تکرارهای متوالی برای روش تیخونف نشان می‌دهد. با افزایش نوبه، تعداد تکرارها کاهش یافته است. همچنین در شکل ۵ عبارت نبود انطباق داده برای روش TSVD نمایش داده شده است. در مقایسهٔ بین دو روش وارون‌سازی، مشخص است که تعداد تکرارها در روش TSVD برای هر سطح نوبه بیشتر از روش تیخونف است. این می‌تواند دلیل تُنکی بیشتر مدل به این شیوه باشد. شکل ۶ ترسیم پیکارد برای تکرار سوم ( $k=3$ ) و در هر سه سطح نوبه را نمایش می‌دهد. واضح است که با افزایش نوبه، اندیس قطع  $q$  کاهش می‌یابد. مزیت روش تیخونف گفته شده در جدول ۱ خودکار بودن آن در تعیین پارامتر تنظیم است؛ در نتیجه سرعت اجرای الگوریتم بیشتر از روش TSVD است.

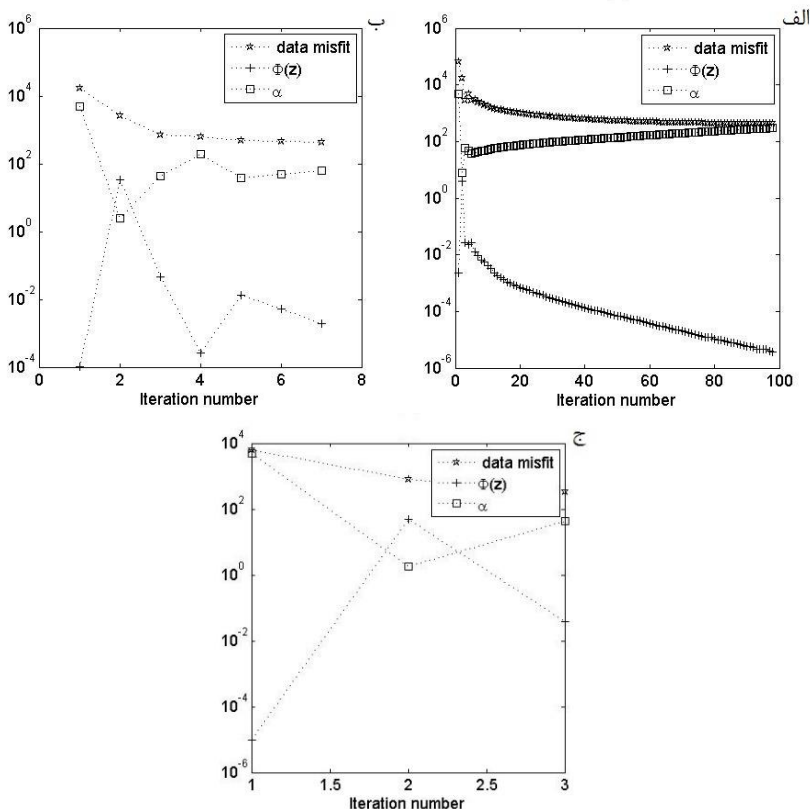
برای وارون‌سازی ناحیهٔ زیرین به  $4000 = 10 \times 20 \times 20$  مکعب با ابعاد  $50m$  تقسیم شده است. پارامترهای  $\varepsilon$  و  $\beta$  به ترتیب برابر با  $0.02$  و  $0.8$  انتخاب شده‌اند. کران بالا و پایین چگالی برابر  $[m_{\min} = 0 \text{ gr/cm}^3, m_{\max} = 1 \text{ gr/cm}^3]$  در نظر گرفته می‌شود. تکرارها با  $\mathbf{m}^{(0)} = \mathbf{0}$  شروع و هنگامی متوقف می‌شود که  $\chi^2_{\text{computed}} \leq 429$  حاصل شود و یا آنکه به بیشینهٔ تعداد تکرارها برابر  $100$  برسد. در وارون‌سازی داده‌های میدان پتانسیلی نشان داده شده است که برای تکرار اول بهتر آن است که وارون‌سازی با یک مقدار بزرگ برای پارامتر تنظیم شروع شود (فارکوهارسن و اولدنبرگ، ۲۰۰۴). این سبب خواهد شد که از ورود ساختارهای اضافه به مدل در تکرارهای ابتدایی، و در نتیجه نیاز به تکرار بیشتر برای حذف این اثرات، جلوگیری شود. در مقاله حاضر این نکته مورد استفاده نگارندگان قرار گرفته است. برای وارون‌سازی با استفاده از روش تیخونف، پارامتر تنظیم در تکرار اول برابر با  $\alpha^{(1)} = (n/m)^{1.5} (\max(\sigma_i) / \text{mean}(\sigma_i))$  انتخاب می‌شود (وطن خواه و همکاران، ۲۰۱۵). پارامتر تنظیم بزرگ در روش تیخونف معادل با انتخاب اندیس قطع کوچک در روش TSVD است بنابراین در این مقاله برای تکرار اول در روش TSVD اندیس قطع  $q=3$  انتخاب می‌شود. از تکرار دوم به بعد روش  $\chi^2$ -principle و ترسیم پیکارد برای تعیین  $\alpha$  و  $q$  به کار می‌رود. وارون‌سازی برای هر سه سطح نوبه و با استفاده از هر دو روش صورت



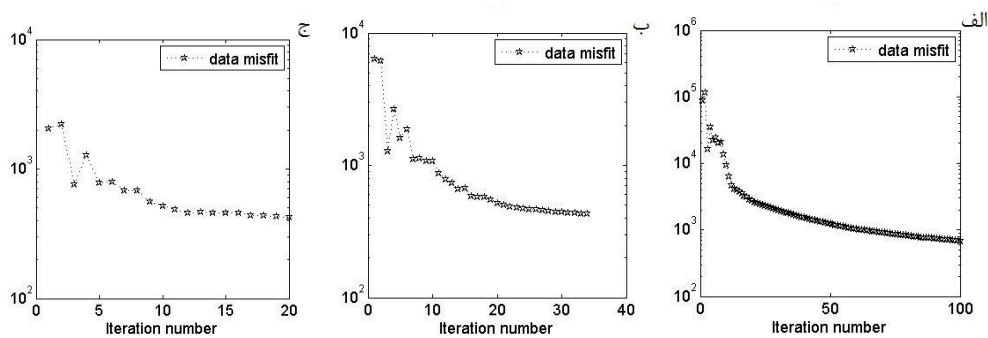
شکل ۲. نتایج وارون‌سازی با استفاده از روش تنظیم تیخونف اشاره شده در جدول ۱. (الف) سطح نوبهٔ اول، (ب) سطح نوبهٔ دوم و (ج) سطح نوبهٔ سوم



شکل ۳. نتایج وارون‌سازی با استفاده از روش TSVD اشاره شده در جدول ۲. (الف) سطح نوفه اول، (ب) سطح نوفه دوم و (ج) سطح نوفه سوم

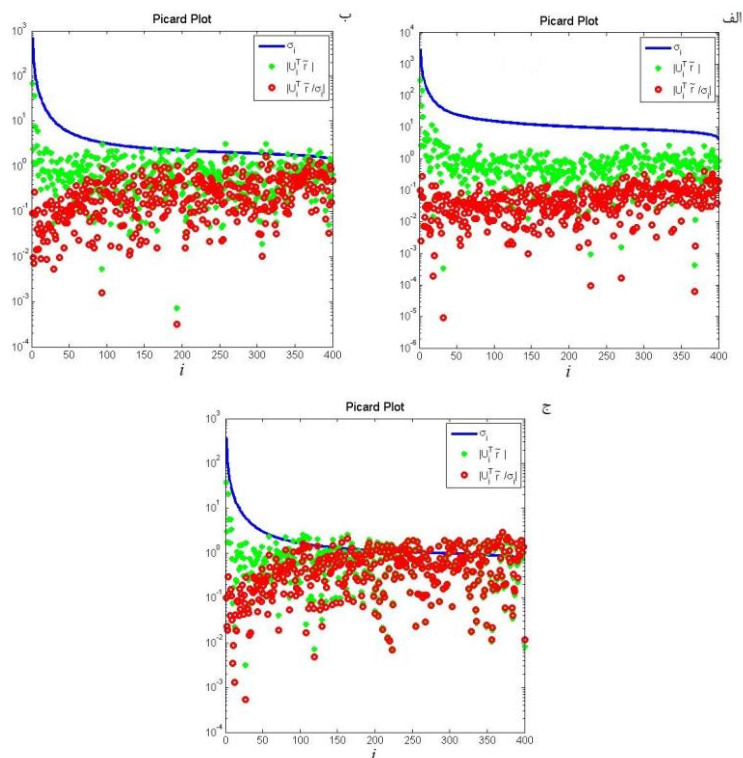


شکل ۴. پارامتر تنظیم، عبارت پایدارکننده و نبود انطباق داده در تکرارهای متوالی برای مدل بازسازی شده در شکل ۲. (الف) سطح نوفه اول، (ب) سطح نوفه دوم و (ج) سطح نوفه سوم



شکل ۵. عبارت نبود انطباق داده در تکرارهای متوالی برای مدل بازسازی شده در شکل ۳. (الف) سطح نوفه اول، (ب) سطح نوفه دوم و (ج) سطح نوفه سوم





شکل ۶. رسم پیکارد برای الگوریتم وارون جدول ۲ مربوط به تکرار سوم  $k = 3$ . (الف) سطح نوفه اول، (ب) سطح نوفه دوم و (ج) سطح نوفه سوم

#### ۴. داده‌های واقعی

در نهایت دو روش منظم‌سازی بیان شده در جدول‌های ۱ و ۲ روی داده‌های گرانی برداشت شده در ناحیه سد گتوند واقع در جنوب غربی ایران به کار رفت. این داده‌ها توسط بخش گرانی‌سنجی موسسه ژئوفیزیک برداشت شده است. جزئیات کاملی در مورد نحوه برداشت، زمین‌شناسی منطقه، پردازش و تفسیر داده‌ها توسط اردستانی (۲۰۱۳) بیان گردیده است. مختصری از این مطالب در این قسمت عرضه می‌شود، برای مطالعه بیشتر به مرجع پیش‌گفته مراجعه شود. این ناحیه از نظر زمین‌شناسی به‌طور کلی متشکل از رسوبات سازند گچساران است و عمدتاً از مارل (Marl)، ژیس (Gypsum)، انیدریت (Anhydrite) و هالیت (Halite) تشکیل شده است. در ناحیه مورد بررسی تعدادی فروچال (sinkhole) دیده می‌شود که بزرگ‌ترین آنها به نام بوستانی (Boostani) در جنوب شرقی ناحیه قرار دارد. هدف از گرانی‌سنجی در این ناحیه، بررسی وجود حفره‌های زیرسطحی ناشناخته و همچنین ارتباط احتمالی

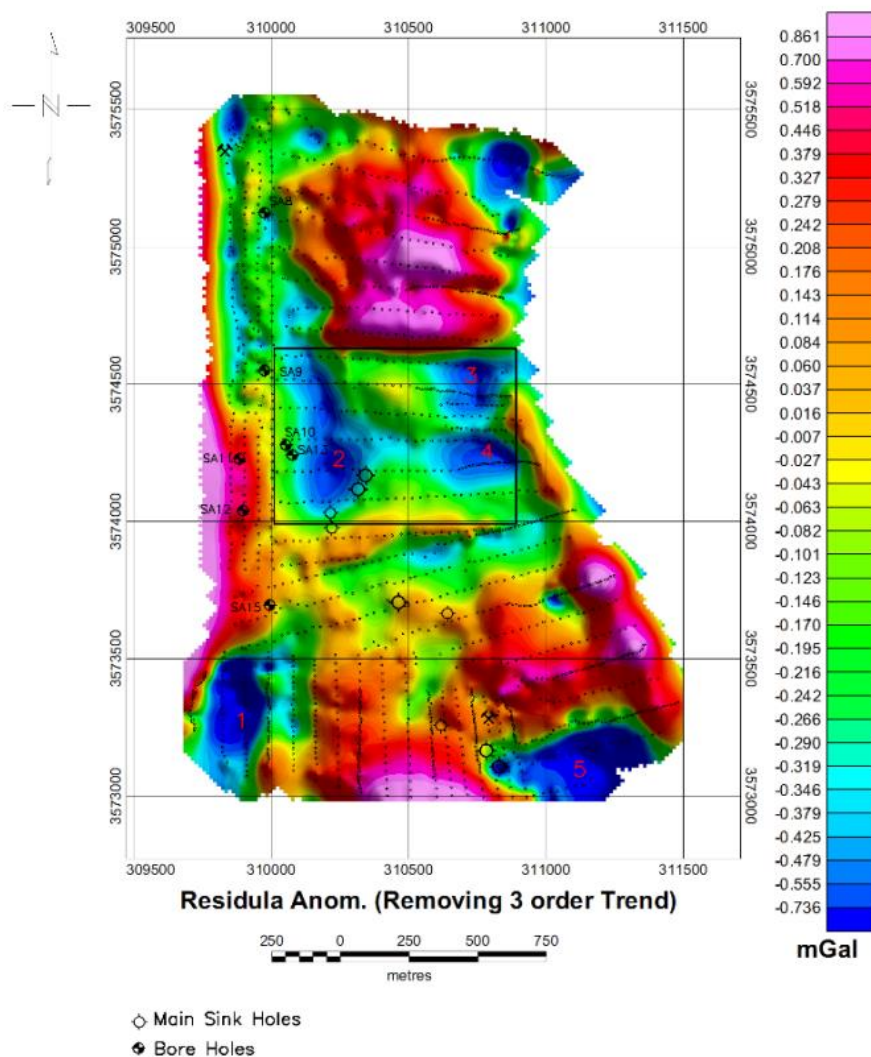
بین آنها و فروچال بوستانی است. وجود چنین ارتباطی باعث هدر رفتن و ذخیره نشدن آب کافی در پشت سد می‌شود.

تعداد ۱۶۰۰ داده گرانی‌سنجی در این ناحیه برداشت شده است. خطوط برداشت با فاصله ۳۰ تا ۵۰ متر از یکدیگر طراحی گردیده و بر روی این خطوط فواصل ایستگاه‌ها ۱۰ متر است. پس از اعمال تصحیحات موردنیاز و حذف اثرات منطقه‌ای بی‌هنجاری باقی‌مانده گرانی به دست آمده است (شکل ۷). چندین بی‌هنجاری منفی در شکل مشاهده می‌شود که بی‌هنجاری شماره ۵ مربوط به فروچال بوستانی است. هر دو الگوریتم عرضه شده، نیازمند محاسبه تجزیه مقادیر تکین ماتریس کرنل هستند، بنابراین برای ماتریس‌هایی با ابعاد بزرگ کاربرد ندارند. لذا ناحیه کوچکی شامل بی‌هنجاری‌های ۲، ۳ و ۴ برای وارون‌سازی انتخاب می‌شود. داده گرانی برای این ناحیه به شبکه‌ای منظم با فواصل ۳۰m، شامل  $20 \times 22 = 440$  داده، تبدیل شده است. سطح زیرین ناحیه منتخب با تعداد ۸۶۴۰ مکعب با ابعاد ۳۰ متر مدل

مجاورت بی‌هنجاری ۲ آمده است (محل گمانه‌ها در شکل ۷ مشخص است). مقایسه نتایج دلالت بر آن دارد که الگوریتم‌ها تا حد قابل قبولی موفق به بازسازی سطح زیرین بوده‌اند. در شکل ۹ داده واقعی (ناحیه منتخب برای وارون‌سازی در شکل ۷) و داده حاصل از مدل‌های (۸-الف) و (۸-ب) نشان داده شده است. شکل (۱۰-الف) عبارت نبود انطباق داده، عبارت تنظیم و پارامتر  $\alpha$  را در تکرارهای متوالی برای روش تیخونف نشان می‌دهد. همچنین عبارت نبود انطباق داده در تکرارهای متوالی برای روش TSVD در شکل (۱۰-ب) نمایش داده شده است. در روش TSVD الگوریتم با رسیدن به بیشینه، تعداد تکرارها متوقف شده است. شکل ۱۱ رسم پیکارد برای تکرارهای سوم و شصتم را نشان می‌دهد.

شده است. برای ساخت این مدل از تعدادی مکعب اضافی در هر سمت شبکه داده استفاده شده است تا انحراف لبه‌های مدل را به حداقل برساند. توزیع خطا برای هر داده گاوسی و با انحراف معیار  $(0.02(d^{obs})_i + 0.005\|d^{obs}\|_2)$  فرض می‌شود. چگالی زمینه برابر  $2/4 \text{ gr/cm}^3$  و کران‌های چگالی  $[m_{min} = 1.5 \text{ gr/cm}^3 \ m_{max} = 2.4 \text{ gr/cm}^3]$  انتخاب می‌شود.

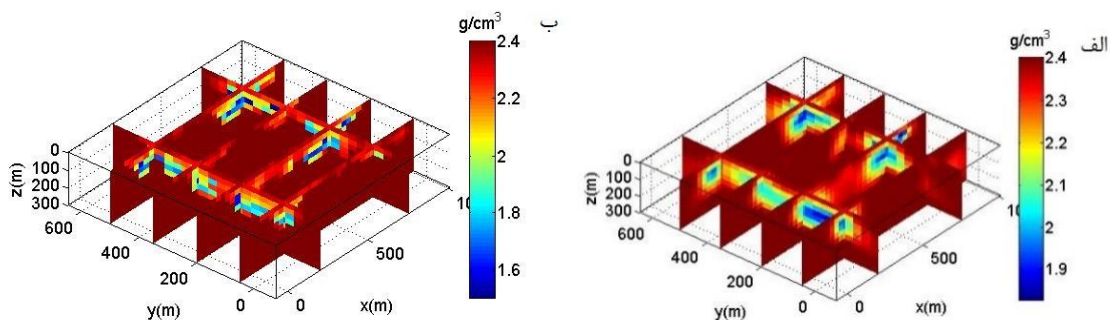
شکل ۸ نتایج حاصل از وارون‌سازی با استفاده از تنظیم تیخونف و TSVD را نمایش می‌دهد. عمق به دست آمده برای بی‌هنجاری‌های ۲، ۳ و ۴ در جدول ۳ آورده شده است. مشابه با مدل مصنوعی، روش TSVD پاسخ‌هایی فشرده‌تر تولید کرده است. همچنین در جدول ۳ عمق به دست آمده با استفاده از دو گمانه موجود در



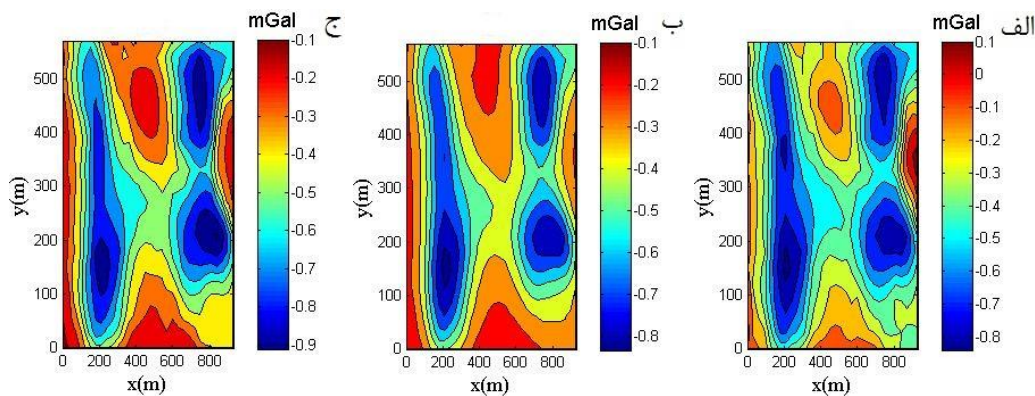
شکل ۷. نقشه بی‌هنجاری باقی‌مانده در ناحیه سد گتوند. ناحیه منتخب برای وارون‌سازی با مستطیل مشکی نشان داده شده است.

جدول ۳. عمق‌های به‌دست آمده با استفاده از مدل‌سازی و حفاری

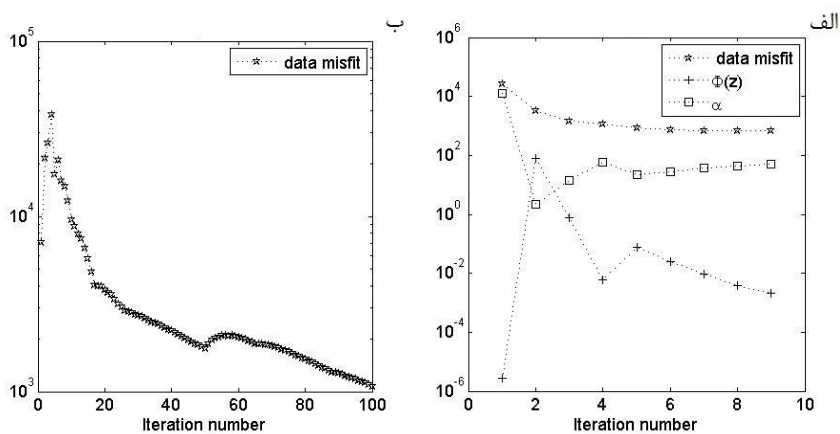
بی‌هنجاری	تنظیم تیخونف		TSVD		حفاری	
	کمینه	پیشینه	کمینه	پیشینه	کمینه	پیشینه
۲	۶۰-۳۰	۱۸۰-۱۵۰	۹۰-۶۰	۱۵۰	۱۵۰-۱۱۵	۱۶۰-۱۵۰
۳	۳۰	۱۸۰-۹۰	۳۰	۱۲۰-۹۰	-	-
۴	۳۰	۱۵۰	۳۰	۱۲۰-۹۰	-	-



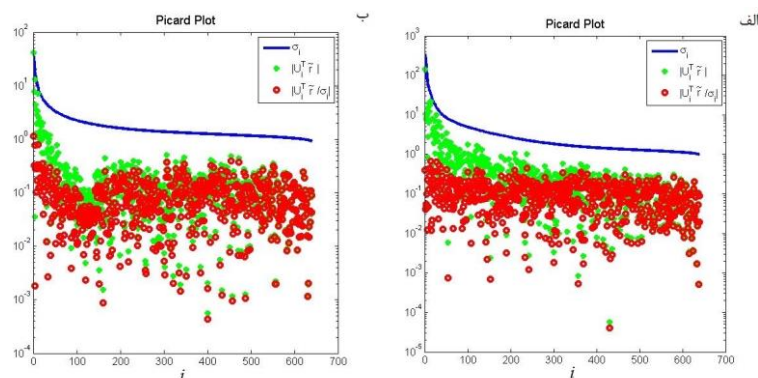
شکل ۸. نتایج وارون‌سازی با استفاده از (الف) روش تیخونف و (ب) روش TSVD



شکل ۹. (الف) داده واقعی، (ب) داده حاصل از مدل ۸-الف و (ج) داده حاصل از مدل ۸-ب



شکل ۱۰. (الف) پارامتر تنظیم، عبارت پایدارکننده و نبود انطباق داده در تکرارهای متوالی برای مدل بازسازی شده به روش تیخونف و (ب) عبارت نبود انطباق داده در تکرارهای متوالی برای مدل بازسازی شده به روش TSVD.



شکل ۱۱. رسم پیکارد برای روش TSVD. (الف) تکرار سوم و (ب) تکرار شصتم

## ۵. نتیجه گیری

است ۲. در روش TSVD تعیین اندیس قطع، نیاز به رسم پیکارد برای هر تکرار دارد، درحالی که روشی خودکار برای تعیین پارامتر در تنظیم تیخونف به کار رفت. هر دو الگوریتم بر مبنای تجزیه مقادیر تکین عرضه شدند، لذا برای کاربرد آنها نیاز است که از ماتریس‌هایی با ابعاد بزرگ اجتناب شود. الگوریتم‌های معرفی شده برای مدل‌سازی ناحیه‌های کم‌چگال در ناحیه سد گنوند به کار برده شدند. این ناحیه‌های کم‌چگال در اثر انحلال رسوبات نمکی به وجود آمده‌اند. گسترش و ابعاد چشمه‌های به دست آمده در مدل‌سازی، با نتایج حفاری‌های موجود انطباق مناسبی داشت. نتایج کارست‌شدگی شدیدی را در این ناحیه نشان داد که در احداث سد الزاماً می‌باید مورد توجه قرار گیرد.

## مراجع

- Ardestani, V. E., 2013, Detecting, delineating and modeling the connected solution cavities in a dam site via microgravity data, *Acta Geodaetica and Geophysica*, 48, 123-138.
- Blakely, R. J., 1996, *Potential theory in gravity and magnetic applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Boulanger, O. and Chouteau M., 2001, Constraint in 3D gravity inversion, *Geophysical Prospecting*, 49, 265-280.
- Farquharson, C. G. and Oldenburg, D. W., 2004, A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non-linear inverse problems, *Geophys. J. Int.*, 156, 411-425.
- Hansen, P. C., 1998, Rank-deficient and discrete Ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion, *Monographs on Mathematical Modeling and Computation*, 4, SIAM.
- Last, B. J. and Kubik, K., 1983, Compact gravity

وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی با استفاده از دو روش تنظیم تیخونف و تجزیه مقدار تکین قطع شده به نتایج قابل‌قبولی منجر شد. هر دو الگوریتم توانایی خوبی برای بازسازی مدل زیرسطحی نشان دادند. استفاده از قید MS سبب شد که مدل‌هایی با مرزهای شاخص قابل بازسازی باشد. همچنین تابع وزن‌دهی عمقی، مدل اولیه و حدود چگالی در فرایند وارون‌سازی مورد استفاده قرار گرفت. نتایج روشن ساخت که برای سطح نوفه بالا، روش تیخونف مدل هموارتری به دست می‌دهد، درحالی که برای سطح‌های نوفه‌ای پایین‌تر، پاسخ‌ها تُنک هستند. در تنظیم تیخونف سرعت اجرای الگوریتم بسیار بیشتر از روش TSVD است که دو علت برای آن می‌توان ذکر کرد: ۱. تعداد تکرارهای موردنیاز برای دستیابی به جواب در روش تیخونف کمتر

- inversion, *Geophysics*, 48, 713-721.
- Li, Y. and Oldenburg, D. W., 1996, 3D inversion of magnetic data, *Geophysics*, 61, 394-408.
- Pilkington, M., 1997, 3D magnetic imaging using conjugate gradients, *Geophysics*, 62, 1132-1142.
- Portniaguine, O. and Zhdanov, M. S. 1999, Focusing geophysical inversion images, *Geophysics*, 64, 874-887.
- Vatankhah, S., Renaut, R. A. and Ardestani, V. E., 2014, Regularization parameter estimation for underdetermined problems by the  $\chi^2$  principle with application to 2D focusing gravity inversion, *Inverse Problems*, 30, 085002
- Vatankhah, S., Ardestani, V. E., and Renaut R. A., 2015, Application of the  $\chi^2$  principle and unbiased predictive risk estimator for determining the regularization parameter in 3-D focusing gravity inversion, *Geophys. J. Int.*, 200, 265-277

## Comparison between Tikhonov regularization and truncated SVD in gravity data inversion

Ardestani, E. V.<sup>1</sup>, Vatankhah, S.<sup>2\*</sup> and Soltanabadi, R.<sup>3</sup>

*1. Professor, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran*

*2. Ph.D. in Geophysics, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran*

*3. M.Sc. Graduated, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran*

*(Received: 06 Jul 2015, Accepted: 31 Jan 2016)*

### Summary

In this paper the 3D inversion of gravity data using two different regularization methods, namely Tikhonov regularization and truncated singular value decomposition (TSVD), is considered. The earth under the survey area is modeled using a large number of rectangular prisms, in which the size of the prisms are kept fixed during the inversion and the values of densities of the prisms are the model parameters to be determined. A depth weighting matrix is used to counteract the natural decay of the kernel, so the inversion obtains reliable information about the source distribution with respect to depth. To generate a sharp and focused model, the minimum support (MS) constraint is used, which minimizes the total area with non zero departure of the model parameters from a given a priori model. Then, the application of iteratively reweighted least square algorithm is required to deal with non-linearity introduced by MS constraint. At each iteration of the inversion, a priori variable weighting matrix is updated using model parameters obtained at the previous iteration. We use the singular value decomposition (SVD) for computing Tikhonov solution, which also helps us to compare the results with the solution obtained by TSVD. Thus, the algorithms presented here are suitable for small to moderate size problems, where it is feasible to compute the SVD. In Tikhonov regularization method, the optimal regularization parameter at each iteration is obtained by application of the  $\chi^2$  - principle parameter-choice method. The method is based on the statistical distribution of the minimum of the Tikhonov function. For weighting of the data fidelity by a known Gaussian noise distribution on the measured data and, when the regularization term is considered to be weighted by unknown inverse covariance information on the model parameters, the minimum of the Tikhonov functional becomes a random variable that follows a  $\chi^2$  distribution. Then, a Newton root-finding algorithm can be used to find the regularization parameter. For truncated SVD regularization, the Picard plot is used to find a suitable value of truncation index. In math literature, a plot of singular values together with SVD and solution coefficients is often referred to as Picard plot. To test the algorithms, a density model which consists of a dipping dike embedded in a uniform half-space is used. The surface gravity anomaly produced by this model is contaminated with three different noise levels, and are used as input for introduced inversion algorithms. The results indicate that the algorithms are able to recover the geometry and density distribution of the original model. In general, the reconstructed model is more sparse using TSVD method as compare with Tikhonov solution. This especially happens for high noise level, where there is an important difference between two solutions. In this case, while TSVD produces a sparse model, the solution of Tikhonov regularization is not sparse. Furthermore, the number of iterations, which is required to terminate the algorithms, is more for TSVD as compare with Tikhonov method. This feature, along with automatic determination of regularization parameter, makes the implementation of the Tikhonov regularization method faster than TSVD. The inversion methods are used on real gravity data acquired over the Gotvand dam site in the south-west of Iran. Tertiary deposits of the Gachsaran formation are the dominant geological structure in this area, and it is mainly comprised of marl, gypsum, anhydrite and halite. There are several solution cavities in the area so that relative negative anomalies are distinguishable in the residual map. A window of residual map consists of 640 gridded data, which includes three negative anomalies, that is selected for modeling. The reconstructed models are shown and compare with results obtained by bore holes.

**Keywords:** Gravimetry, Inversion, Tikhonov Regularization, TSVD, Regularization Parameter, Gotvand.