

ارائه مدل کنترل موجودی اقلام فاسدشدنی با انجام دادن نمونه‌گیری به منظور پذیرش تحت خطای بازرسی

جواد حسن پور رودبارکی^{۱*}، ابراهیم شریفی^۲

۱. مربی رشته مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه مهندسی فناوری نوین قوچان
۲. کارشناس رشته مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه مهندسی فناوری نوین قوچان

(تاریخ دریافت ۹۴/۰۷/۲۲ - تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۹۵/۰۲/۲۵ - تاریخ تصویب ۹۵/۰۳/۰۲)

چکیده

امروزه مدیریت و کنترل موجودی‌های فسادپذیر در بسیاری از واحدها و بنگاه‌های صنعتی اهمیت و جایگاه ویژه‌ای دارد. از اساس، مدیریت و کنترل موجودی‌های فسادپذیر پیچیده‌تر و چالش‌برانگیزتر از موجودی‌های دارای طول عمر نامحدود است. از این‌رو، تعیین سیاست‌های موجودی بهینه برای این نوع کالاها اهمیت زیادی دارد. در این پژوهش، سیاست بهینه موجودی اقلام فاسدشدنی با در نظر گرفتن تست مخرب به منظور پذیرش اقلام بسط داده شده است. پس از مدل‌سازی مسئله و به دست آوردن تابع هدف، ابتدا روش حل دقیق و الگوریتم ساده و کارآمدی به منظور یافتن مقادیر بهینه ارائه می‌شود. سپس با کمک یک مثال عددی اعتبارسنجی و آنالیز حساسیت در مورد آن صورت می‌پذیرد.

واژه‌های کلیدی: بازرسی، تست مخرب، کالای فساد پذیر، مقدار سفارش اقتصادی، نمونه‌گیری به منظور پذیرش.

مقدمه

مدافعاتگی و فسادپذیری تقسیم‌بندی کردند. محصولات هنگامی از مد می‌افتند که با گذر زمان به دلایل مختلف (مانند تغییر در فناوری معرفی محصول جدید از سوی رقبا و...) ارزش خود را از دست دهند. فساد نیز شامل خرابی و خسارت به محصولات می‌شود. نامیس [۶] مدل‌هایی را بررسی کرد که در آن موجودی به صورت ثابت فاسد می‌شد. بعد از او رأفت [۷] در مورد مدل‌هایی تحقیق کرد که در آن موجودی به صورت پیوسته فاسد می‌شد. پال و همکاران [۸]، اکرم و همکاران [۹] و کاریزمن و همکاران [۱۰] بر مشکل فاسدشدن در تولید و توزیع به‌ویژه در زنجیره تأمین مواد غذایی تمرکز کردند. لی و همکاران [۱۱] نیز صد پژوهش اخیر را در مورد مدیریت کالاهای فاسدشدنی بررسی کردند که ۲۵ مورد آن‌ها از مقالات منتشر شده در ژورنال مدیریت چین انتخاب شده بود. از جمله تحقیقات جامع در زمینه فسادپذیری محصولات می‌توان به پژوهش باکر و همکاران [۱۲] اشاره کرد. از دیگر پژوهش‌ها در مورد

در مدل‌سازی ریاضی، مسائل کنترل موجودی که با مسئله کلاسیک میزان سفارش اقتصادی^۱ هریس [۱] شروع شد، این فرض در نظر گرفته می‌شد که محصولات عمر نامتناهی دارند. ویتین [۲] برای اولین بار در نظر گرفتن فسادپذیری کالا را به صورت از مدافعاتگی کالا پس از مدت زمان مشخص مطرح کرد. گاری و شریدر [۳] برای نخستین بار موجودی فاسدشدنی^۲ را به صورت تابع نمایی منفی مدل‌بندی کردند. بعد از آن الیون و مالایا [۴] مدل یادشده را گسترش دادند و تقاضای وابسته به قیمت محصول را مطرح کردند. تا پنجاه سال بعد پژوهش‌های زیادی با در نظر گرفتن فرضیات مختلف نه تنها در عمر محصولات، بلکه عوامل دیگری مثل نوع تقاضا، وجود تخفیف، مجازبودن کمبود و عوامل دیگر به وجود آمدند. حدود یک دهه قبل گویال و گیری [۵] مدل‌های کنترل موجودی را بر مبنای فسادپذیری دسته‌بندی کردند. آن‌ها با بررسی ۱۳۰ منبع، مدل‌های کنترل موجودی را براساس وجود یا نبود از

در نظر گرفتن فرضیه فسادپذیری محصولات می‌توان به پژوهش‌های جولای و همکاران [۱۳] در سال ۱۳۸۴ و میرزازاده و همکاران [۱۴] اشاره کرد. افراد بسیاری کنترل کیفیت در مدل سفارش اقتصادی را هنگامی که محموله دریافتی شامل محصولات سالم و معیوب می‌شود، بررسی کرده‌اند، اما در بیشتر آن‌ها بازرسی به صورت صددرصدی است. سلامه و جابر [۱۵] در سال ۲۰۰۲ برای اولین بار در پژوهش خود کالای معیوب را در مدل سفارش اقتصادی در نظر گرفتند که هدف آن‌ها بیشینه کردن سود بود. گویال و کاردنبارون [۱۶] روش ساده‌ای را برای تعیین مقدار بهینه سفارش اقتصادی در صورت معیوب بودن کالا ارائه کردند. پاپاکریستوس و کانتنستورس [۱۷] مقدار کالای معیوب در محموله را احتمالی در نظر گرفتند و نشان دادند بیشینه کردن سود در این مدل با کمینه کردن هزینه فرقی ندارد و هر دو جواب یکسانی می‌دهد. سو [۱۸] در مدل سفارش اقتصادی، کالای معیوب و هزینه معیوب بودن آن را در نظر گرفت که در آن کیفیت کالا تابعی از توزیع نمایی نرمال بود. سو و یو [۱۹] مدلی را ارائه دادند که در آن محصولات فقط شامل یک تخفیف می‌شدند و محصولات معیوب با یک بازرسی صددرصدی از رده خارج می‌شدند و بقیه محموله به فروش می‌رسید. مداح و جابر [۲۰] تأثیر سرعت بازرسی و تنوع در فرایند تأمین بر مقدار سفارش را در صورت وجود داشتن محصول معیوب در سفارش بررسی کردند. جابر و همکاران [۲۱] مفهوم هزینه آنتروپی را برای توسعه مدل کلاسیک سفارش اقتصادی با فرض سالم و معیوب بودن کالا به کار بردند. وانگ و همکاران [۲۲] مدل سفارش اقتصادی را هنگامی که کالا معیوب است و با این فرض که میزان خرابی محصولات متغیر تصادفی و هزینه‌های نگهداری سفارش‌دهی و بازرسی متغیرهای فازی هستند بررسی کردند. بعضی از پژوهش‌ها کالای معیوب را نوعی کمبود در نظر گرفتند که باید در سفارش‌های آتی برطرف شود. رضایی [۲۳] و وی و همکاران [۲۴] فرض کردند کالاهای معیوب می‌توانند به صورت پس افت در نظر گرفته شوند و بعد تابع درآمد کل را در هر دوره زمانی محاسبه کردند. ایروغلو و اوزمیر [۲۵] نوعی مدل سفارش اقتصادی را مدل‌بندی کردند که در آن محموله شامل کالای معیوب و کمبود از نوع پس افت است. بازرسی

صددرصدی برای شناسایی محصولات معیوب از فرضیات آن‌ها بود. آن‌ها تأثیر درصد خرابی را بر راه‌حل بهینه بررسی کردند. درنهایت، خان و همکاران [۲۶] حالتی را بررسی کردند که در آن فرایند بازرسی دچار اشتباه می‌شود و کالای سالم را معیوب در نظر می‌گیرد. تمام مدل‌های بالا بازرسی را صددرصدی در نظر گرفتند، اما السلامه [۲۷] در پژوهش خود بیان می‌کند در دنیای واقعی معمولاً خریداران منابع لازم را برای اجرای بازرسی صددرصدی ندارند یا با توجه به ماهیت و نوع بعضی از محصولات برای تضمین کیفیت و سالم بودن محصول باید روی آن تست مخربی انجام گیرد. به همین دلیل، خریداران باید با استفاده از نمونه‌گیری^۳ از کل محموله در مورد رد یا پذیرش آن تصمیم بگیرند.

تاکنون برای تعیین مقدار بهینه سفارش، مفروضات فاسدپذیر بودن محصول و وجود محصولات معیوب و سالم در محموله هنگامی که تست مخرب برای پذیرش یا رد محموله در دستور کار قرار می‌گیرد، به‌طور هم‌زمان پژوهشی صورت نگرفته است. در این پژوهش، مدل سفارش اقتصادی اقلام فاسدشدنی بسط داده می‌شود که بازرسی صددرصدی در آن در نظر گرفته نمی‌شود، بلکه خریدار بر نمونه‌ای از محموله دریافتی تستی مخرب به‌منظور پذیرش یا رد محموله انجام می‌دهد. در صورت رد محموله از سوی خریدار، او این محموله را با قیمتی کمتر به فروش می‌رساند و سفارش دیگری انجام می‌دهد. در ادامه، مسئله تعریف می‌شود. سپس معرفی پارامترها و متغیرهای تصمیم و همچنین فرضیات مسئله صورت می‌گیرد. پس از معرفی همه هزینه‌های مسئله، مدل‌سازی و به‌دست آوردن تابع هدف مدل که برابر با مجموع هزینه‌های کنترل موجودی است، انجام می‌پذیرد. همچنین، بعد از اثبات تحدب تابع هدف مدل، روش حل دقیق و الگوریتم کارآمدی برای به‌دست آوردن مقادیر بهینه، متغیرهای تصمیم مسئله ارائه می‌شود. به‌علاوه، مثال عددی و تحلیل حساسیت برای مسئله ارائه می‌شود و درنهایت جمع‌بندی و نتیجه‌گیری صورت می‌گیرد.

تعریف مسئله

در این قسمت، مدل کنترل موجودی سفارش اقتصادی

C : هزینه خرید هر واحد کالا
 $I(t)$: سطح موجودی انبار در زمان t
 T : طول هر دوره سفارش‌دهی (متغیر تصمیم)
 Q : میزان سفارش در هر بار سفارش‌دهی (متغیر تصمیم)
 θ : ضریب فساد موجودی در دست در واحد زمان
 $(0 < \theta < 1)$
 C_d : هزینه فساد هر واحد کالا
 n : اندازه نمونه برای انجام دادن بازرسی و تست مخرب
 $g(n)$: هزینه بازرسی و تست مخرب وابسته به n
 k : قیمت هر واحد کالای رده شده برای فروش در بازار ثانویه
 c : عدد پذیرش
 p_1 : سطح خدمت (حداقل احتمال قابل قبول که بازرسی و تست مخرب می‌تواند از آثار اشتباه در بازرسی چشم‌پوشی کند)
 p : احتمال خرابی کالا
 m : احتمال سالم در نظر گرفتن یک کالای معیوب با تابع توزیع $f(m)$ و تابع توزیع تجمعی $F(m)$
 p_a : احتمال قبولی سفارش
 x : تعداد کالای معیوب در نمونه‌ای به اندازه n
 TC_0 : مجموع هزینه سفارش‌دهی در واحد زمان
 $TC_g(n)$: مجموع هزینه تست مخرب در واحد زمان
 TC_h : مجموع هزینه نگهداری در واحد زمان
 TC_d : مجموع هزینه فساد در واحد زمان
 TC_p : مجموع هزینه خرید در واحد زمان
 TR_k : مجموع درآمد حاصل از فروش کالا در بازار ثانویه در واحد زمان
 TC : مجموع هزینه‌های کنترل موجودی‌ها در واحد زمان

تشریح و بیان مسئله

در اینجا هدف ارائه مدل سفارش اقتصادی در صورتی است که محموله از سوئی فاسدشدنی است و با نرخ مشخص و ثابت θ فاسد می‌شود و از سوی دیگر حاوی کالاهای معیوب و سالم است که خریدار ابتدا با انجام دادن بازرسی تصمیم به پذیرش یا رد آن می‌گیرد، به صورتی که بر

ساده برای حالتی توسعه داده می‌شود که محصولات با گذشت زمان با نرخ ثابت فاسد می‌شوند. همچنین، آثار زوال‌پذیر بودن و کیفیت محموله دریافتی بر مقدار بهینه سفارش و اندازه نمونه بررسی می‌شود. تابع هدف این مسئله از کل هزینه منهای کل درآمد تشکیل شده است و در اینجا هدف کمینه کردن آن است. هزینه‌ها شامل هزینه سفارش‌دهی، هزینه فساد، هزینه نگهداری، هزینه تست مخرب و درآمد نیز شامل سود حاصل از فروش محموله رده شده از سوی خریدار در بازار ثانویه است. سایر مفروضات مسئله به صورت زیر است:

۱. مقدار تقاضا ثابت و مشخص است.
 ۲. محموله تک‌مصولی است.
 ۳. تحویلی کالا به صورت آنی و افق برنامه‌ریزی نامحدود است.
 ۴. کمبود مجاز نیست.
 ۵. در صورت رد محموله از سوی خریدار او سفارش دیگری انجام می‌دهد.
 ۶. کالای موجود در انبار در طول زمان با نرخ ثابت فاسد می‌شود و نرخ فساد برابر با کسری ثابت از موجودی در دست در هر لحظه است.
- برای فرایند بازرسی نیز فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

۱. زمان بازرسی^۴ قابل چشم‌پوشی است.
۲. در فرایند بازرسی احتمال وقوع خطا وجود دارد.
۳. نمونه از بین رفته توسط تست مخرب، جایگزین نمی‌شود.
۴. تعداد محصولات معیوب از تابع توزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند.

مدل‌سازی

نمادها و متغیرهای تصمیم

نمادهای استفاده شده در مدل‌سازی مسئله به شرح زیر هستند:

- A : هزینه هر بار سفارش کالا
 h : هزینه نگهداری هر واحد کالا
 D : تقاضای کالا در واحد زمان

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\theta I(t) - D, \quad 0 < t < T \quad (1)$$

اثبات می‌شود که حل معادله دیفرانسیل خطی
 $y' = -p(x)y + q(x)$ به صورت زیر است:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \times \left[\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right]$$

که در آن y تابعی از x است و y' برابر است با $\frac{dy}{dx}$ و همچنین $p(x)$ و $q(x)$ نیز توابعی دلخواه از x هستند. با توجه به روابط ذکر شده برای به دست آوردن $I(t)$ داریم:

$$I(t) = e^{-\int \theta dx} \times \left[\int -D e^{\int \theta dx} dx \right], \quad 0 < t < T \quad (2)$$

و در نهایت معادله میزان موجودی در دست در زمان t به صورت زیر است:

$$I(t) = \frac{D}{\theta} \left[e^{\theta(T-t)} - 1 \right], \quad 0 < t < T \quad (3)$$

با قراردادن مقدار $t = 0$ در معادله ۳ مقدار موجودی در دست در زمان صفر به دست می‌آید:

$$I(0) = \frac{D}{\theta} \left[e^{\theta T} - 1 \right] \quad (4)$$

همان‌طور که در شکل واضح است، موجودی در زمان صفر برابر است با:

$$I(0) = Q - n \quad (5)$$

با توجه به معادله ۴ و ۵ میزان سفارش از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$Q = \frac{D}{\theta} \left[e^{\theta T} - 1 \right] + n \quad (6)$$

با توجه به کوچک بودن مقدار θ می‌توان از بسط تیلور به صورت $e^{\theta k} = 1 + \theta k + \frac{1}{2}(\theta k)^2$ استفاده کرد؛ بنابراین، داریم:

$$(7)$$

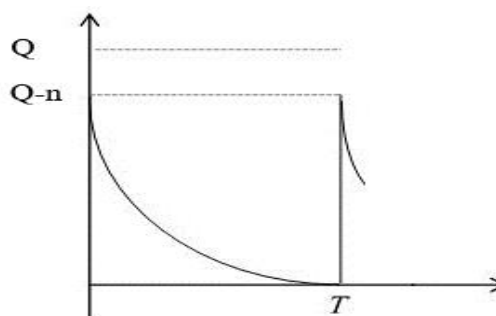
$$Q = \frac{D}{\theta} \left[1 + \theta T + \frac{1}{2}(\theta T)^2 - 1 \right] + n \\ = D \left(T + \frac{1}{2}\theta T^2 \right) + n$$

در ادامه، هزینه‌ها محاسبه می‌شود.

نمونه‌ای به اندازه n از محموله سفارش داده شده تست مخربی^۵ انجام می‌دهد. همچنین، باید توجه شود در بازرسی این نمونه نیز امکان اشتباه و سالم در نظر گرفتن کالای معیوب وجود دارد. خریداری را در نظر بگیرید که محموله‌ای به اندازه Q را از فروشنده‌ای با هزینه ثابت سفارش‌دهی A و هزینه خرید C هنگامی که با تقاضای ثابت D روبه‌رو می‌شود، خریداری می‌کند. هزینه نگهداری هر واحد کالا h واحد پولی و محموله با نرخ ثابت θ فاسد می‌شود. خریدار پس از دریافت محموله، تست مخربی را بر نمونه‌ای از آن برای پذیرش یا رد کل محموله انجام می‌دهد. نمونه به اندازه n از محموله برداشته و تست می‌شود (احتمال اینکه کالایی خراب باشد p است). خریدار وقتی محموله را قبول می‌کند که تعداد کالاهای معیوب در نمونه کوچک‌تر یا مساوی با عدد پذیرش c باشد. اگر پس از انجام دادن تست مشخص شود که محموله باید رد شود، خریدار می‌تواند باقی محموله را با قیمت k بفروشد و سفارش دیگری انجام دهد.

مدل سازی

با توجه به اینکه $I(t)$ نشان‌دهنده سطح موجودی در دست در زمان t است، تغییرات موجودی تحت تأثیر دو عامل اساسی تقاضا و فساد است. در بازه زمانی $[0, t]$ کاهش موجودی ناشی از دو عامل تقاضا و فساد است. این مسئله در نمودار کنترل موجودی شکل ۱ نیز به وضوح قابل مشاهده است.



شکل ۱. نمودار کنترل موجودی برای کالای فسادپذیر

برای محاسبه هزینه‌های کنترل موجودی، ابتدا تابع موجودی در دست بر حسب زمان محاسبه می‌شود:

هزینه خرید کالا

با توجه به میزان سفارش در دوره Q محاسبه شده در رابطه ۷ مقدار کل هزینه خرید در واحد زمان به صورت رابطه ۸ محاسبه می‌شود:

$$TC_p = \frac{QC}{T} = \frac{cD}{T} \left[\frac{1}{\theta} (e^{\theta T} - 1) \right] + \frac{n}{T} \quad (8)$$

$$TC_p = \frac{CD}{T} \left[\frac{1}{\theta} \left(1 + \theta T + \frac{1}{2} (\theta T)^2 - 1 \right) \right]$$

$$+ \frac{n}{T} = CD \left(\frac{\theta T}{2} + 1 \right) + \frac{n}{T}$$

هزینه ثابت سفارش دهی

با توجه به اینکه در هر دوره فقط یک بار سفارش انجام می‌گیرد و هزینه ثابتی دارد، A مجموع هزینه سفارش دهی در واحد زمان از رابطه ۹ محاسبه می‌شود:

$$TC_o = \frac{A}{T} \quad (9)$$

هزینه نگهداری

برای محاسبه هزینه نگهداری ابتدا باید میزان متوسط موجودی در سیکل محاسبه شود. میزان متوسط موجودی به این ترتیب محاسبه می‌شود:

(10)

$$\bar{I} = \int_0^T \frac{D}{\theta} [e^{\theta(T-t)} - 1] dt = \frac{D}{\theta^2} (e^{\theta T} - \theta T - 1)$$

با توجه به مقدار متوسط موجودی حساب شده هزینه نگهداری کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$TC_h = \frac{h\bar{I}}{T} = \frac{hD}{T\theta^2} (e^{\theta T} - \theta T - 1) \quad (11)$$

با توجه به کوچک بودن مقدار θ می‌توان از بسط تیلور به صورت $e^{\theta k} = 1 + \theta k + \frac{1}{2}(\theta k)^2$ استفاده کرد؛ بنابراین، داریم:

(12)

$$TC_h = \frac{hD}{T\theta^2} \left(1 + \theta T + \frac{1}{2} \theta^2 T^2 - \theta T - 1 \right) = \frac{hDT}{2}$$

هزینه فساد کالا

برای محاسبه هزینه فساد در هر دوره ابتدا باید میزان محصول فاسد شده در هر دوره به طور متوسط محاسبه شود. از آنجا که در هر لحظه مشخص زمانی مانند t میزان مشخصی از موجودی در دست فاسد می‌شود، در هر لحظه از دوره، میزان فساد برابر با $\theta I(t)$ است و مقدار کالای فاسد شده در کل دوره به شکل رابطه ۱۳ محاسبه می‌شود:

(13)

$$deteriorated\ goods\ per\ cycle = \int_0^T \theta I(t) dt$$

$$TC_d = \int_0^T \theta \frac{D}{\theta} [e^{\theta(T-t)} - 1] dt =$$

$$D \int_0^T [e^{\theta(T-t)} - 1] dt$$

$$= D \left[-\frac{1}{\theta} e^{\theta(T-t)} - t \right]_0^T =$$

$$D \left[-\frac{1}{\theta} - T + \frac{1}{\theta} e^{\theta T} \right]$$

$$= \frac{D}{\theta} e^{\theta T} - DT - \frac{D}{\theta}$$

$$TC_d = \frac{D}{\theta} \left[1 + \theta T + \frac{1}{2} \theta^2 T^2 - \theta T - 1 \right] c_d =$$

$$\frac{D\theta c_d T}{2}$$

هزینه تست مخرب

با توجه به اینکه در هر دوره فقط یک بار تست مخرب انجام می‌گیرد و هزینه ثابتی دارد $g(n)$ مجموع هزینه سفارش تست مخرب در واحد زمان از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$TC_{g(n)} = \frac{g(n)}{T} \quad (14)$$

محاسبه درآمد حاصل از فروش محموله رده شده

با توجه به اینکه خریدار در ابتدای دوره Q مقدار سفارش می‌دهد و برای بازرسی آن بر n نمونه از آن تست مخرب انجام می‌دهد، پس موجودی ابتدای دوره آن $Q - n$ است. حال اگر محموله پس از انجام دادن تست رد شود، خریدار

$$\begin{aligned}
 & -iKD \left(1 + \frac{1}{\gamma} \theta T \right) + \frac{D\theta c_d T}{\gamma} + \frac{hDT}{\gamma} \Big] (1-p_a)^i \\
 & = \left(\frac{A}{T} + CD \left(\frac{\theta T}{\gamma} + 1 \right) + \frac{n}{T} + \frac{g(n)}{T} \right) \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) (1-p_a)^i \\
 & -KD \left(1 + \frac{1}{\gamma} \theta T \right) \sum_{i=0}^{\infty} i (1-p_a)^i + \\
 & \left(\frac{D\theta c_d T}{\gamma} + \frac{hDT}{\gamma} \right) \sum_{i=0}^{\infty} (1-p_a)^i
 \end{aligned}$$

سه سری بی‌نهایت حاصل همگرا هستند:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ (i+1) (1-p_a)^i \right\} &= \frac{1}{p_a^{\gamma}} \\
 \sum_{i=0}^{\infty} i (1-p_a)^i &= \frac{1-p_a}{p_a^{\gamma}} \\
 \sum_{i=0}^{\infty} (1-p_a)^i &= \frac{1}{p_a}
 \end{aligned}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{A}{T} + CD \left(\frac{\theta T}{\gamma} + 1 \right) + \frac{n}{T} + \frac{g(n)}{T} \right) \frac{1}{p_a^{\gamma}} \quad (18) \\
 & + \left(\frac{D\theta c_d T}{\gamma} + \frac{hDT}{\gamma} \right) \frac{1}{p_a} - \\
 & KD \left(1 + \frac{1}{\gamma} \theta T \right) \frac{1-p_a}{p_a^{\gamma}}
 \end{aligned}$$

با جای‌گذاری سری‌های همگرا در معادله ۱۸، تابع هزینه کل به صورت رابطه ۱۹ است:

$$\begin{aligned}
 E [TC(T, n)] &= \\
 & \left(\frac{A}{T} + CD \left(\frac{\theta T}{\gamma} + 1 \right) + \frac{n}{T} + \frac{g(n)}{T} \right) \frac{1}{p_a} \\
 & - KD \left(1 + \frac{\theta T}{\gamma} \right) \frac{1-p_a}{p_a} + \frac{D\theta c_d T}{\gamma} + \frac{hDT}{\gamma}
 \end{aligned} \quad (19)$$

هنگامی که عدد پذیرش c صفر در نظر گرفته شود، احتمال قبولی محموله $p_a = (1-p)^n$ می‌شود و تابع هزینه کل به مقدار زیر (رابطه ۲۰) کاهش می‌یابد:

آن را با قیمت K به فروش می‌رساند که درآمد حاصل از رابطه ۱۵ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 TR_K &= \frac{K(Q-n)}{T} = \frac{K}{T} \left[\frac{D}{\theta} (e^{\theta T} - 1) \right] \\
 &= \frac{K}{T} \frac{D}{\theta} \left(1 + \theta T + \frac{1}{\gamma} \theta^{\gamma} T^{\gamma} - 1 \right) \quad (15) \\
 &= KD \left(1 + \frac{1}{\gamma} \theta T \right)
 \end{aligned}$$

محاسبه تابع هزینه و درآمد کل

احتمال اینکه محموله پذیرفته شود برابر است با احتمال اینکه تعداد c (عدد پذیرش) یا کمتر کالای معیوب در نمونه n تایی وجود داشته باشد:

$$p_a = P \{ x \leq c \} = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (16)$$

هنگامی که تعداد کالاهای معیوب در نمونه از عدد پذیرش c فراتر رود، محموله دریافتی رد می‌شود.

$$TC(T, n) = \begin{cases} \frac{A}{T} + CD \left(\frac{\theta T}{\gamma} + 1 \right) + \frac{n}{T} + \frac{g(n)}{T} + \frac{D\theta c_d T}{\gamma} + \frac{hDT}{\gamma}, & p_a \\ 2 \left(\frac{A}{T} + CD \left(\frac{\theta T}{\gamma} + 1 \right) + \frac{n}{T} + \frac{g(n)}{T} \right) + \frac{D\theta c_d T}{\gamma} + \frac{hDT}{\gamma} - KD \left(1 + \frac{1}{\gamma} \theta T \right), & (1-p_a)p_a \\ 3 \left(\frac{A}{T} + CD \left(\frac{\theta T}{\gamma} + 1 \right) + \frac{n}{T} + \frac{g(n)}{T} \right) + \frac{D\theta c_d T}{\gamma} + \frac{hDT}{\gamma} - 2KD \left(1 + \frac{1}{\gamma} \theta T \right), & (1-p_a)^2 p_a \end{cases}$$

تابع هزینه کل را می‌توان به صورت رابطه ۱۷ نوشت:

$$\begin{aligned}
 E [TC(T, n)] &= p_a + \frac{n}{T} + \\
 & \frac{g(n)}{T} - iKD \left(1 + \frac{1}{\gamma} \theta T \right) \\
 & + \frac{D\theta c_d T}{\gamma} + \frac{hDT}{\gamma} \Big] (1-p_a)^i
 \end{aligned} \quad (17)$$

در معادله ۱۷، عبارت p_a تابعی از اندازه نمونه n و عدد پذیرش c است. همچنین، می‌توان اثبات کرد سری بی‌نهایت معادله ۱۷ همگراست.

اثبات همگرایی

با بسط‌دادن سری داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(i+1) \left(\frac{A}{T} + CD \left(\frac{\theta T}{\gamma} + 1 \right) + \frac{n}{T} + \frac{g(n)}{T} \right)$$

روش حل

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تابع هدف (معادله ۲۰) از دو متغیر تشکیل شده است که یکی گسسته n و دیگری پیوسته T است؛ بنابراین، نمی‌توان با استفاده از روش‌های معمول یعنی گرفتن مشتق جزئی نسبت به دو متغیر و حل دستگاه دو معادله دوجمله‌ای جواب بهینه را به‌دست آورد. به‌این‌منظور، از یک روش بهینه‌سازی دومرحله‌ای استفاده می‌شود. در این روش، ابتدا برای یک مقدار مشخص n مقدار بهینه T به‌گونه‌ای به‌دست می‌آید که تابع $TC(T, n)$ کمینه شود. مقدار به‌دست‌آمده برای T باید شرط زیر را رعایت کند:

$$\frac{\partial TC(T, n)}{\partial T} = 0$$

با گرفتن مشتق جزئی، نسبت به متغیر تصمیم T از معادله ۲۰، T^* به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T^* = \sqrt{\frac{\gamma(A + g(n) + n)}{D(1-p)^n(K\theta + \theta c_d + h) + D\theta(C - K)}} \quad (27)$$

علاوه‌بر برآورده‌شدن شرایط بالا، باید تحذب تابع هدف را نسبت به متغیر T اثبات کرد. شرط لازم برای اثبات تحذب تابع هدف نسبت به متغیر T :

$$\frac{\partial^2 TC(T, n)}{\partial T^2} > 0$$

اثبات تحذب تابع هدف نسبت به متغیر T :
(۲۸)

$$\frac{\partial^2 TC(T, n)}{\partial T^2} = \frac{\gamma(A + g(n) + n)}{T^3} \left(\frac{1}{(1-p)^n} \right) > 0$$

با توجه به اینکه تمام پارامترهای مدل بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، بدیهی است معادله ۲۸ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و تابع هدف نسبت به متغیر T محدب است. تا اینجا روش مورد نظر مقدار بهینه T^* را

(۲۰)

$$E[TC(T, n)] = \left(\frac{A}{T} + CD \left(\frac{\theta T}{\gamma} + 1 \right) + \frac{n}{T} + \frac{g(n)}{T} \right) - KD \left(1 + \frac{1}{\gamma} \theta T \right) \left(\frac{1}{(1-p)^n} - 1 \right) + \frac{D\theta c_d T}{\gamma} + \frac{hDT}{\gamma}$$

اگر بازرسی کاملاً دقیق انجام پذیرد، تعداد کالاهای معیوب در نمونه برابر با pn است. از آنجاکه در بازرسی، امکان اشتباه وجود دارد، تعداد کالاهای معیوب $pn(1-m)$ است. درنتیجه، می‌توان عملکرد بازرسی را $pn(1-m) \geq c+1$ در نظر گرفت؛ بنابراین، اندازه نمونه یعنی n باید به‌صورت رابطه ۲۱ انتخاب شود:
(۲۱)

$$P \{ pn(1-m) \geq c+1 \} \geq p_1$$

احتمال سالم در نظر گرفتن یک کالای معیوب m تنها متغیر در محدودیت عملکرد بازرسی است؛ بنابراین، می‌توان نوشت:

$$P \left\{ 1-m \geq \frac{c+1}{pn} \right\} \geq p_1 \quad (22)$$

$$P \left\{ m \leq 1 - \frac{c+1}{pn} \right\} \geq p_1 \quad (23)$$

$$\int_{1 - \frac{c+1}{pn}}^1 f(m) dm \geq p_1 \quad (24)$$

از آنجاکه ممکن است عبارت $1 - \frac{c+1}{pn}$ در معادله ۲۳ از دامنه قابل قبول m که به‌صورت $[m_{min}, m_{max}]$ است فراتر برود، بهتر است معادله ۲۴ به‌صورت معادله ۲۵ نوشته شود:

$$\int_{\min\left(1 - \frac{c+1}{pn}, m_{max}\right)}^{m_{min}} f(m) dm \geq p_1 \quad (25)$$

$$F \left(\min \left(1 - \frac{c+1}{pn}, m_{max} \right) \right) \geq p_1 \quad (26)$$

کوچک‌ترین مقدار تابع $TC(T, n)$ است، جواب بهینه است و با قراردادن آن در رابطه ۷ مقدار بهینه سفارش اقتصادی محاسبه می‌شود.

مثال عددی

در این بخش با بیان یک مثال عددی، نتایج مدل پیشنهادی با نتایج مدل سلامه و همکاران [۲۷] در حالت مدل قطعی ساده مقایسه می‌شود و سپس تحلیل حساسیت مدل صورت می‌گیرد. نتایج در جدول ۲ مشاهده می‌شود. سلامه و همکاران در پژوهش خود مسئله‌ای را طرح و آن را حل کردند. در این قسمت، از اطلاعات مسئله آن‌ها استفاده می‌شود و سایر پارامترها مقادیر $\theta = 0/1$ و $p = 0/01$ و $c_d = 4$ را دارند.

مدل با استفاده از برنامه‌نویسی با نرم‌افزار متلب حل شده است و مقادیر بهینه و مقایسه آن با مدل سلامه در جدول ۱ به دست آمده است:

جدول ۱. مقایسه مقادیر متغیر تصمیم در مدل فعلی با مدل السلامه [۲۷]

	θ	n^*	T^*	Q^*	$TC(T^*, n^*)$
مدل پیشنهادی	۰/۱	۴۴	۰/۹۲۱	۹۷۰	۳۹۸۴/۸۰۸
مدل سلامه و همکاران	۰	۴۴	۱/۱۱۲	۱۱۱۳	۳۱۱۱/۰۳۸

مدیریتی دارند، برای تحلیل حساسیت انتخاب شدند. همان‌طور که در جدول ۲ و شکل‌های ۲، ۳ و ۴ مشخص است، با افزایش بیشتر نرخ فاسدپذیری مقدار اقتصادی سفارش کاهش و تعداد دفعات سفارش‌دهی و هزینه‌ها افزایش می‌یابد؛ بنابراین، بهتر است با به‌کارگیری روش‌های مناسب نگهداری محصول و کاهش نرخ فساد تا حد امکان، هزینه‌های موجودی کاهش یابد. همچنین، با افزایش تقاضا، هزینه‌ها و مقدار سفارش افزایش و در مقابل مدت زمان بین دفعات سفارش کاهش می‌یابد و در نهایت با افزایش نرخ خرابی نیز تمام متغیرها از جمله اندازه نمونه کاهش پیدا می‌کند، زیرا با افزایش احتمال خرابی نمونه کمتری برای کشف اقلام معیوب نیاز است.

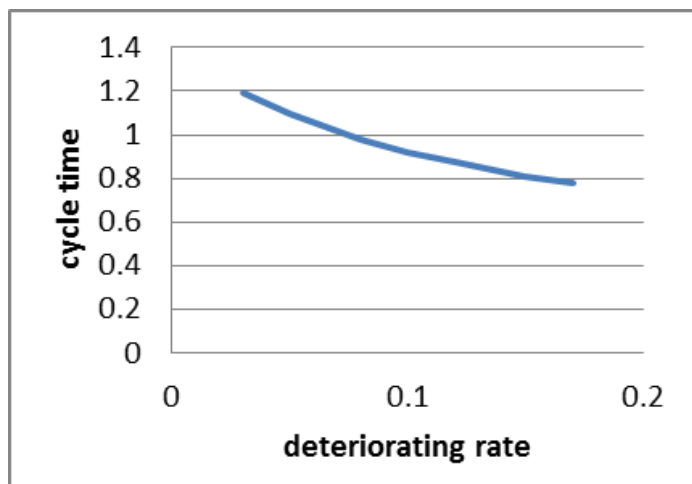
برای $TC(T, n)$ هنگامی که n ثابت است، شناسایی می‌کند. از آنجاکه n یک متغیر گسسته است، الگوریتم زیر برای تعیین مقدار بهینه n و T^* در مدل مورد نظر به‌کار می‌رود.

الگوریتم حل مسئله

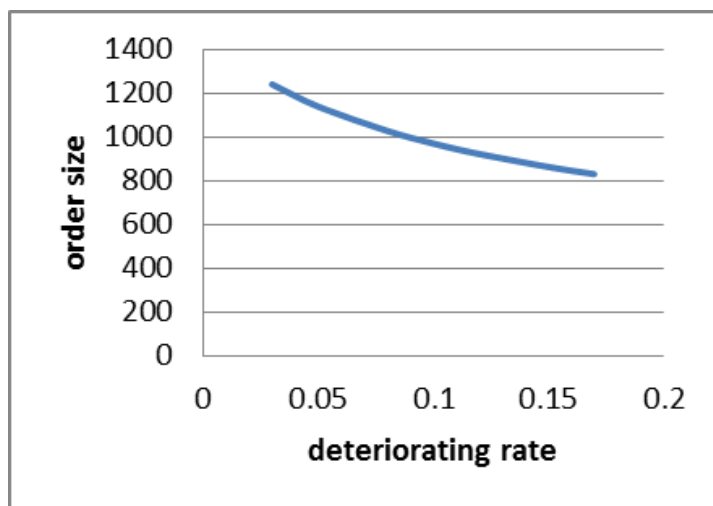
۱. با به‌دست‌آوردن حداقل مقدار n از رابطه ۲۶ و مساوی قراردادن n با آن شروع می‌کنیم.
۲. برای n و $n + 1$ معادله ۲۷ را حل کنید تا مقادیر بهینه (T^*_n) و (T^*_{n+1}) را به‌دست آورید. آنگاه مقادیر $TC(T^*_n, n)$ و $TC(T^*_{n+1}, n)$ را محاسبه کنید.
۳. مقادیر $TC(T^*_n, n)$ و $TC(T^*_{n+1}, n)$ را با هم مقایسه کنید.
۴. اگر $TC(T^*_n, n) > TC(T^*_{n+1}, n)$ آنگاه n را به اندازه یک واحد افزایش دهید و به مرحله ۲ بروید.
۵. اگر $TC(T^*_n, n) \leq TC(T^*_{n+1}, n)$ آنگاه توقف کنید. مقدار به‌دست‌آمده برای n و T^* که نزدیک به

تحلیل حساسیت

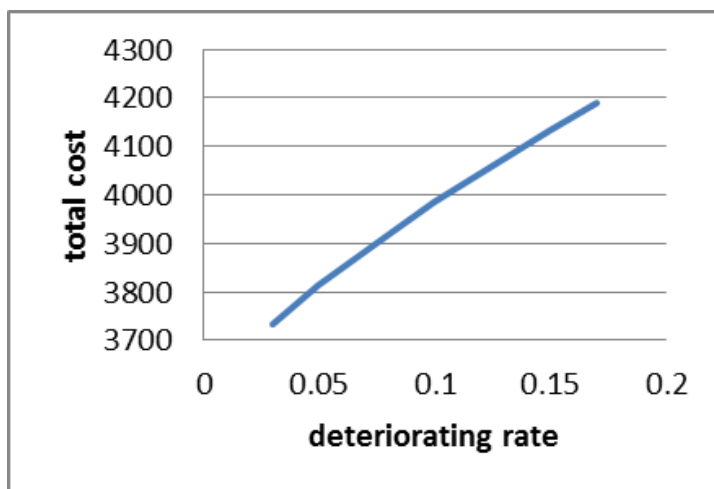
تغییر در مقادیر پارامترهای مسئله به نبود قطعیت در تصمیم‌گیری منجر می‌شود. برای بررسی این تغییرات و تأثیر آن‌ها در تصمیم‌گیری، آنالیز حساسیت، ابزار بسیار مفیدی است. در این قسمت، چندین آزمایش عددی برای بررسی حساسیت جواب‌های بهینه به تغییرات مقادیر برخی پارامترها انجام گرفت. نتایج به‌طور کامل در جدول ۱ بیان می‌شود. همچنین، علاوه‌بر جدول تحلیل حساسیت، نمودارهای مرتبط با هر یک نیز برای نشان‌دادن تغییرات پارامترها به تفصیل ارائه می‌شود. در این بخش تحلیل حساسیت روی پارامترهای θ ، D ، p و h انجام گرفته است. این پارامترها به‌دلیل آنکه نقشی مهم‌تر و تعیین‌کننده بر رفتار تابع هدف و در نتیجه تصمیم‌گیری‌ها و راهکارهای



شکل ۲. روند تغییرات نرخ زوال (خرابی) نسبت به زمان



شکل ۳. روند تغییرات نرخ زوال (خرابی) نسبت به مقدار سفارش اقتصادی



شکل ۴. روند تغییرات نرخ زوال (خرابی) نسبت به میزان هزینه کل

جدول ۲. تأثیر تغییر در پارامترها بر مقادیر بهینه

	در صد تغییر در مقدار پارامترها	n^*	T^*	Q^*	$TC(T^*, n^*)$
θ	-۰/۷	۴۴	۱/۱۹۵	۱۲۴۰	۳۷۳۴/۰۱
	-۰/۵	۴۴	۱/۰۹۳	۱۱۳۹	۳۸۱۲/۶۵
	-۰/۲	۴۴	۰/۹۸	۱۰۲۸	۳۹۱۹/۴۱
	+۰/۲	۴۴	۰/۸۷۲	۹۲۲	۴۰۶۶/۵۲
	+۰/۵	۴۴	۰/۸۱۱	۸۶۳	۴۱۳۳/۳۶
	+۰/۷	۴۴	۰/۷۷۷	۸۳۰	۴۱۸۸/۰۳
D	-۰/۷	۴۴	۱/۶۸۳	۵۵۳	۱۴۶۶/۷
	-۰/۵	۴۴	۱/۳۰۳	۷۰۰	۲۲۱۹/۱۸
	-۰/۲	۴۴	۱/۰۳	۸۷۳	۳۲۹۱/۲۵
	+۰/۲	۴۴	۰/۸۴۱	۱۰۵۸	۴۶۶۷/۲۹
	+۰/۵	۴۴	۰/۷۵۲	۱۱۷۷	۶۵۷۵/۸۲
	+۰/۷	۴۴	۰/۷۰۷	۱۲۵۱	۶۳۴۰/۱۶
p	-۰/۷	۴۴	۱/۵۷	۱۷۳۰	۴۵۷۴/۸۹
	-۰/۵	۴۴	۱/۲۴۱	۱۳۳۷	۴۳۶۱/۱۸
	-۰/۲	۴۴	۱/۰۷۱	۱۱۴۰	۴۱۶۴/۰۵
	+۰/۲	۴۴	۰/۸۶۱	۹۰۲	۳۹۲۵/۳۰
	+۰/۵	۴۴	۰/۷۹۷	۸۳۱	۳۸۶۶/۶۸
	+۰/۷	۴۴	۰/۷۵۳	۷۸۲	۳۷۹۴/۷۷
h	-۰/۷	۴۴	۱/۰۹۷	۱۱۴۸	۳۸۰۹/۶۴
	-۰/۵	۴۴	۱/۰۳۷	۱۰۸۷	۳۸۶۲/۹۱
	-۰/۲	۴۴	۰/۹۶۳	۱۰۱۲	۳۹۳۷/۷۶
	+۰/۲	۴۴	۰/۸۸۵	۹۳۳	۴۰۲۹/۹۳
	+۰/۵	۴۴	۰/۸۳۸	۸۸۶	۴۰۹۴/۴۴
	+۰/۷	۴۴	۰/۸۱	۸۵۸	۴۱۳/۵۹

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش، مدل کنترل موجودی درمورد اقلام فاسدشدنی هنگامی که محموله سفارش داده شده حاوی کالاهای معیوب و سالم است بررسی شده است. خریدار هنگام دریافت سفارش ابتدا با استفاده از بازرسی و انجام دادن تست مخرب روی نمونه‌های بررسی شده، درمورد پذیرش یا رد این محموله تصمیم می‌گیرد. از آنجاکه در حین بازرسی، امکان اشتباه و سالم در نظر گرفتن کالای معیوب وجود دارد، اگر پس از انجام دادن بازرسی مشخص شود محموله باید رد شود، خریدار می‌تواند باقیمانده

محموله را با قیمت کمتر بفروشد و برای سفارش دیگری اقدام کند. در نتیجه، پس از به دست آوردن عوامل هزینه‌های اساسی تأثیرگذار بر کنترل موجودی‌ها و محاسبه تابع هزینه کل و با استفاده از تکنیک‌های مشتق‌گیری و ارائه الگوریتمی کارآمد، مقدار بهینه سفارش اقتصادی مسئله به‌طور دقیق محاسبه شده است. همچنین، برای نشان دادن کاربردی بودن مدل و روش حل ارائه شده مثال عددی بیان شد و تحلیل حساسیت انجام گرفت. در توسعه مدل نیز می‌توان فرض کمبود، انواع مختلف تقاضا و حالت چندمحصولی را نیز در نظر گرفت.

مراجع

1. Harris, F. W. (1913). "How many parts to make at once, Factory", *The Magazine of Management*, Vol. 38, No. 6, 10 (2), PP. 135– 136.
2. Whitin, T. M. (1953). *The theory of inventory management*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.
3. Ghare, P. N. and Schrader, G. F. (1963). "A model for exponentially decaying inventories", *The Journal of Industrial Engineering*, Vol. 1, No. 14, PP. 238- 243.
4. Elionand, S. and Mallaya, R. V. (1996). "Issuing and pricing policy of semi-perishables", *Proceedings of the 4th Internationam Conference on Operational Research*, Wiley Inter science, New York.
5. Goyal, S. K. and Giri, B. C. (2001). "Recent trends in modeling of deteriorating inventory", *European Journal of Operational Research*, Vol. 1, No. 134, PP. 1- 16.
6. Nahmias, S. (1982). "Perishable inventory theory: A review", *Operations Research*, Vol. 30, No. 4, PP. 680- 708.
7. Raafat, F. (1991). "Survey of literature on continuously deteriorating inventory models", *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 42, No. 1, PP. 27- 37.
8. Pahl, J., Voss, S. and Woodruff, D. L. (2007). "Production planning with deterioration constraints: A survey", In: *19th International Conference on Production Research*, P. 6.
9. Akkerman, R., Farahani, P. and Grunow. M. (2010). "Quality, safety and sustainability in food distribution: A review of quantitative operations management approaches and challenges", *OR Spectrum*, Vol. 32, No. 4, PP. 863- 904.
10. Kempf, K. G., Keskinocak, P. and Uzsoy, R. (2011). "Planning production and inventories in the extended enterprise", *A State of the Art Handbook*, Vol. 1, No. 151, PP. 393- 436.
11. Li, R., Lan, H. and Mawhinney, J. R. (2010). "A review on deteriorating inventory study", *Journal of Service Science and Management*, Vol. 3, No. 1, PP. 117- 129.
12. Bakker, M., Riezebos, J. and Teunter, R. H. (2012). "Review of inventory systems with deterioration since 2001", *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, No. 221, PP. 275– 284.
13. Jolai, F., Rabbani, M. and Honarvar, M. (2006). "Continuous review inventory model for deteriorating items with no shortage, stochastic demand, and expedited ordering", *Journal of University College of Engineering*, University of Tehran, Vol. 40, No. 40, PP. 487- 494.
14. Mirzazadeh, A., Seyed Esfehiani, M. and Fatemi, M. (2006). "Determining economic order policy for deteriorating items with time-dependent inflation", *Journal of University College Of Engineering*, Vol. 40, No. 40, PP. 585- 595.
15. Salameh, M. K. and Jaber, M. Y. (2000). "Economic production quantity model for items with imperfect quality", *International Journal of Production Economics*, Vol. 64, No. 1-3, PP. 59- 64.
16. Goyal, S. K. and Cardenas-Barron, L. E. (2002). "Note on: Economic production quantity model for items with imperfect quality – A practical approach", *International Journal of Production Economics*, Vol. 77, No. 1, PP. 85- 87.

17. Papachristos, S. and Konstantaras, I. (2006). "Economic ordering quantity models for items with imperfect quality", *International Journal of Production Economics*, Vol. 100, No. 1, PP. 148- 154.
18. Tsou, J. (2007). "Economic order quantity model and Taguchi's cost of poor quality", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 31, No. 2, PP. 283- 291.
19. Hsu, W. K. and Yu, H. (2009). "EOQ model for imperfective items under a one-time-only discount", *Omega*, Vol. 37, No. 5, PP. 1018- 1026.
20. Maddah, B. and Jaber, M. Y. (2008). "Economic order quantity for items with imperfect quality: Revisited", *International Journal of Production Economics*, Vol. 112, No. 2, PP. 808- 815.
21. Jaber, M. Y., Bonney M. and Moualek, I. (2009). "An economic order quantity model for an imperfect production process with entropy cost", *International Journal of Production Economics*, Vol. 118, No. 1, PP. 26- 33.
22. Wang, X., Tang, W. and Zhao, R. (2007). "Random fuzzy EOQ model with imperfect quality items", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol. 6, No. 2, PP. 139- 153.
23. Rezaei, J. (2005). "Economic order quantity model with backorder for imperfect quality items", *Proceedings of the IEEE International Engineering Management Conference*, 2005, PP. 466- 470.
24. Wee, H. M., Yu, J. and Chen, M. C. (2007). "Optimal inventory model for items with imperfect quality and shortage backordering", *Omega*, Vol. 35, No. 1, PP. 7- 11.
25. Eroglu A. and Ozdemir, G. (2007). "An economic order quantity model with defective items and shortages", *International Journal of Production Economics*, Vol. 106, No. 2, PP. 544- 549.
26. Khan, M., Jaber, M. Y. and Wahab, M. I. M. (2010). "Economic order quantity model for items with imperfect quality with learning in inspection", *International Journal Of Production Economics*, Vol. 124, No. 1, PP. 87- 96.
27. Salamah, M. (2011). "Economic order quantity with imperfect quality items, destructive testing acceptance sampling and Inspection errors", *Advances in management & applied Economics*, Vol1.1, No. 2, PP. 59- 75.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1. Economic Order Quantity
2. Perishable Inventory
3. Acceptance Sampling
4. Inspection
5. Destructive Test