

## سنجش ریسک شاخص گروه بانکی با استفاده از تخمین نوسانات بازده با مدل نوسانات تصادفی: رویکرد نیمه پارامتری بیزی

سید رسول سجادی<sup>۱</sup>، سیده زهرا ابطحی<sup>۲</sup>

**چکیده:** با توجه به کاربرد توزیع بازدهی در محاسبه معیارهای ریسک و وابستگی دقت تخمین این معیارها به صحت توزیع بازده، برآورد صحیح آن همواره در کانون توجه پژوهشگران بوده است. با وجودی که استفاده از مدل پارامتری نوسانات تصادفی به منظور تخمین نوسانات بازده در مطالعات پیشین متداول است، فرض مذکور اغلب به نتایجی با دقت کافی منجر نمی‌شود، بنابراین در این تحقیق برخلاف فرض معمول پارامتری بودن توزیع جملات اخلاص در مدل نوسانات تصادفی، با بهره‌گیری از رویکرد نیمه پارامتری بیزی، به تخمین جملات اخلاص پرداخته شده است. در پژوهش حاضر توزیع لگاریتم مربع بازده شاخص گروه بانکی با به کارگیری آمیخته‌ای از توزیع‌های خانواده نرمال و با استفاده از زنجیره مارکف مونت کارلو مدل‌سازی شد و در نهایت نتایج آن با مدل نوسانات تصادفی نرمال، مقایسه گردید. نتایج این بررسی نشان می‌دهد، در مواقعی که توزیع بازده دارای چولگی باشد، مدل نیمه پارامتری نوسانات را دقیق‌تر تخمین می‌زند، ضمن آن که در شرایطی که توزیع بازده به توزیع نرمال نزدیک باشد، نتایج مدل حاضر، مشابه نتایج مدل نیمه پارامتری با فرض توزیع نرمال خواهد بود.

**واژه‌های کلیدی:** ارزش در معرض خطر، الگوریتم زنجیره مارکف مونت کارلو، بازده دارایی، فرایند دیریکله، مدل نوسانات تصادفی.

۱. استادیار مهندسی مالی، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه علم و فرهنگ، تهران، ایران

۲. کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۲/۲۵

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۵/۱۲/۱۸

نویسنده مسئول مقاله: سیده زهرا ابطحی

E-mail: sz.abtahi1@gmail.com

**مقدمه**

خانواده مدل‌های گارچ و نوسانات تصادفی، از متداول‌ترین مدل‌ها در مدل‌سازی نوسانات بازده هستند که توزیع جملات اخلاص آنها معمولاً نرمال فرض می‌شود. یکی از اشکالات وارد بر این مدل‌ها، همان فرض پارامتری بودن توزیع جملات اخلاص، یعنی فرض ثبات توزیع جملات اخلاص است و همان‌طور که اشاره شد، این توزیع ثابت معمولاً نرمال فرض می‌شود. اشکال اساسی این فرض، در نظر نگرفتن ویژگی‌های بازده دارایی‌های مالی نظیر چولگی، عدم تقارن، کشیدگی، نوسانات خوشه‌ای و اثر اهرمی است. البته در پژوهش‌های پیشین به‌منظور در نظر گرفتن چولگی در تخمین جملات اخلاص، از توزیع‌هایی نظیر کای دو و سایر توزیع‌های دارای چولگی استفاده شده است؛ اما این مدل‌ها تنها قادرند چولگی را تقریب بزنند و از معرفی سایر ویژگی‌های بازده بازمی‌مانند، به همین دلیل از دقت کافی برخوردار نیستند.

بررسی‌های بیشتر در پیشینه پژوهش نشان می‌دهد استفاده از مدل‌های نیمه‌پارامتری و ناپارامتری که توزیع بازده را ثابت فرض نمی‌کنند، ضمن آن که ویژگی‌های بازده دارایی‌های مالی را به خوبی نشان می‌دهند، به نتایج دقیق‌تری می‌انجامند. از طرفی مقایسه نتایج به‌دست آمده از مدل‌های ناپارامتری خانواده گارچ و نوسانات تصادفی نشان می‌دهد در بیشتر موارد، مدل نوسانات تصادفی توانسته است نوسانات بازده را با دقت مشابه یا حتی بیشتر از مدل‌های خانواده گارچ برآورد کند. بنابراین به نظر می‌رسد مدل‌های ناپارامتری و نیمه‌پارامتری نوسانات تصادفی برای تقریب نوسانات بازده مناسب باشند.

با این حال، با توجه به اهمیت دقت تخمین نوسانات بازده دارایی‌های مالی، لازم است پژوهش بیشتری در حوزه افزایش دقت تخمین نوسانات بازده صورت گیرد؛ زیرا تقریب نوسانات بازده با دقت ناکافی، می‌تواند به نابودی سرمایه افراد فعال در بازارهای مالی منجر شود. همچنین از آنجا که نوسان، سنجش‌ای برای اندازه‌گیری ریسک به‌شمار می‌رود، مدل‌سازی نوسانات در مدیریت ریسک موضوعی بااهمیت تلقی می‌شود و در ادبیات موضوع، بسیار در کانون توجه قرار گرفته است. برای مثال، بانک‌ها و سایر مؤسسه‌های مالی به‌منظور ارزیابی ریسک، از مدل‌های ارزش در معرض خطر که بر اساس تخمین نوسانات محاسبه می‌شوند، استفاده می‌کنند. به سخن دیگر، مدل‌سازی و پیش‌بینی ساختار نوسانات بازده دارایی در مدیریت ریسک و حوزه‌های مشابه، امری بسیار مهم است. ضمن اینکه تاکنون بحران‌های مالی بسیاری در کشورهای مختلف به وقوع پیوسته است که تمام این بحران‌ها ویژگی مشترکی داشته‌اند و آن افزایش شایان توجه نوسانات بازده بازار بحران‌زده بوده است. بنابراین چه بسا توجه به نوسانات بازده بتواند در پیش‌بینی این بحران‌ها و جلوگیری از آنها مؤثر واقع شود. از این رو، در پژوهش حاضر به‌منظور

افزایش دقت تقریب نوسانات بازده از مدل پیشنهاد شده دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) استفاده شده است. در این مدل، توزیع مربع لگاریتم بازده با به کارگیری آمیخته نامنتاهی از توزیع های خانواده نرمال و با استفاده از زنجیره مارکف مونت کارلو مدل سازی شده است. در نتیجه، توزیعی برای بازده به دست می آید که توزیع پسین نامیده می شود و چولگی را با دقت خوبی تقریب می زند. هدف از اجرای این پژوهش، بررسی عملکرد و کارایی مدل نیمه پارامتری ارائه شده دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) نسبت به مدل نوسانات تصادفی با فرض توزیع نرمال، برای شاخص گروه بانکی است.

مقاله با بیان مختصر پیشینه پژوهش ادامه می یابد. در بخش روش شناسی پژوهش، ابتدا فرایند دیریکله و کاربرد آن در مدل سازی آمیخته ارائه شده و پس از آن، مدل نیمه پارامتری نوسانات تصادفی و الگوریتم زنجیره مارکف مونت کارلو دلاتولا و گریفین و نحوه محاسبه ارزش در معرض خطر توضیح داده می شود. در بخش یافته های پژوهش، نتایج به دست آمده از اجرای مدل برای شاخص گروه بانکی با نتایج مدل پارامتری مقایسه شده و آزمون های پسرو برای آنها انجام می شود. در نهایت در بخش نتیجه گیری، نتایج پژوهش تحلیل شده و پیشنهادهایی ارائه خواهد شد.

### پیشینه پژوهش

بازده دارایی های مالی دارای ویژگی هایی است که از آن جمله می توان به تغییرپذیری انحراف معیار بازده لگاریتمی با زمان اشاره کرد که در نظر گرفتن این ویژگی بازده یکی از اصلی ترین ویژگی های مدل نوسانات تصادفی است. انتشار نخستین مدلی که نشان دهنده نوسانات متغیر با زمان باشد، به تیلور (۱۹۸۲) بازمی گردد که به وسیله فرایند خودهمبسته مرتبه اول، به مدل سازی لگاریتم نوسانات پرداخته است. استفاده از فرایند خودهمبسته را می توان به عنوان نمایش جریانی تصادفی و ناهموار از اطلاعات جدید تفسیر کرد. مدل تیلور عبارت است از:

$$y_t = \beta e^{\frac{h_t}{2}} \varepsilon_t \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \sigma_\eta \eta_t$$

که در آن نشان دهنده بازده های لگاریتمی دارایی؛  $h_t$  معرف نوسانات لگاریتمی در زمان  $t$  و  $\varepsilon_t$  و  $\eta_t$  متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر و واریانس ۱ هستند.  $\phi$  نیز پارامتر مقاومت است و برای اینکه فرایند مانا باشد، باید مقداری بین ۱ و -۱ اتخاذ کند که در این صورت توزیع مانای  $h_t$  دارای میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma_\eta^2 / (1 - \phi^2)$  خواهد بود.

معمولاً توزیع  $\varepsilon_t$  و  $\eta_t$  نرمال فرض می‌شود؛ اگرچه در ادبیات موضوع به فرض نرمال بودن  $\varepsilon_t$  انتقاد شده و توزیع‌های دنباله بلندتری به‌عنوان جایگزین پیشنهاد شده‌اند. برای مثال، ناکاجیما و امری (۲۰۰۹) و جکوایر، پولسن و راسی (۲۰۰۳)، توزیع جملات اختلال را تی. استیودنت فرض کردند؛ بارندرف (۱۹۹۷) از توزیع معکوس نرمال گوسی استفاده کرد؛ ماهیو و اسکاتمن (۱۹۹۸) آمیخته نرمال را جایگزین کردند و آبانتو، بندیوپادهیای، لاجس و انریکز (۲۰۱۰) آمیخته مقیاس نرمال با پارامترهای آمیزش متفاوت را به‌کار بردند.

استفاده از تابع درستنمایی در مدل نوسانات تصادفی معرفی شده در رابطه ۱ بسیار دشوار است؛ به‌طوری که در تعبیر بیزی به‌عنوان مشکلی معروف، مطرح است. در ادبیات این موضوع رویکردهای محاسباتی بسیاری برای رفع این مشکل به چشم می‌خورد و پژوهشگران بسیاری به‌کمک زنجیره مارکف مونت کارلو به حل این مسئله اقدام کرده‌اند.<sup>۱</sup> جکوایر، پولسن و راسی (۱۹۹۴) الگوریتم تک‌مرحله‌ای و دوره‌ای متروپولیس - هستینگ را برای رفع این مشکل معرفی کردند؛ اما شفرد و کیم (۱۹۹۴) نشان دادند، زمانی که پارامتر مقاومت مقادیری نزدیک به ۱ و واریانس مقادیری بسیار کوچک اتخاذ می‌کنند، لگاریتم نوسانات دارای همبستگی است و الگوریتم معرفی شده خروجی‌های همبسته تولید می‌کند. کیم، شفرد و چیب (۱۹۹۸) برای نمونه‌گیری طرحی پیشنهاد دادند که با خطی‌سازی مدل، نوسانات لگاریتمی را به‌صورت همزمان به‌روز می‌کرد.

در این رویکرد، کیم و همکارانش با لگاریتم‌گیری از مربع مشاهدات، مدل اصلی نوسانات تصادفی را در قالب مدلی با فضایی در حالت خطی ارائه دادند.

$$y_t^* = \log y_t^2 \quad \text{رابطه ۲}$$

$$y_t^* = h_t + z_t \quad n, \dots, 1 = t \text{ برای}$$

که در آن،  $z_t = \log \varepsilon_t^2$ . اگر دارای توزیع نرمال باشد، توزیع  $z_t$  به شکل  $\log \chi_1^2$  خواهد بود. بنابراین روش‌های فیلترسازی کالمن را نمی‌توان به‌طور مستقیم استفاده کرد. کیم و همکارانش (۱۹۹۸) و امری، چیب، شفرد و ناکاجیما (۲۰۰۷) به‌منظور تقریب این توزیع، به‌کارگیری آمیخته‌ای از توزیع نرمال را پیشنهاد می‌دهند. چنین رویکردی امکان تعریف یک الگوریتم چندحالتی را فراهم می‌کند که تمام نوسانات لگاریتمی را با به‌کارگیری الگوریتم فیلترسازی پیشرو و نمونه‌گیری بازگشتی<sup>۲</sup> به‌صورت هم‌زمان به‌روز می‌کند. مشکلی که با این

۱. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به بروتو و رویز (۲۰۰۴) مراجعه کنید.

تغییر پارامتر ایجاد می‌شود این است که بازده‌ها می‌توانند مقادیری نزدیک به صفر یا حتی در مواردی برابر با صفر اختیار کنند؛ چنین اتفاقی موجب می‌شود که مقادیر تبدیل شده، بسیار منفی شوند یا تعریف نشده باقی بمانند. فولر (۱۹۹۶) این مشکل را با تعریف پارامتر  $c$  به صورت زیر مرتفع کرد:

$$y_t^* = \log(y_t^2 + c) \quad \text{رابطه ۳}$$

دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) به منظور تخمین چگالی  $\log \varepsilon_t^2$  با استفاده از رویکرد ناپارامتری بیزی، از به کارگیری فرضیه‌های ناپارامتریک برای توزیع بازده اجتناب کردند. در این مدل توزیع  $\log \chi_1^2$  به وسیله مدل آمیخته فرایند دیریکله<sup>۱</sup> تقریب زده شده است؛ از این رو، دیگر نیازی به فرض کردن این توزیع به صورت آمیخته نرمال متناهی نیست. به همین دلیل امکان استفاده از الگوریتم فیلترسازی پیشرو و نمونه‌گیری بازگشتی در این مدل فراهم می‌شود. این مدل در واقع یک مدل نیمه پارامتری آمیخته تعادلی است که جملات خطای تساوی مشاهدات به صورت ناپارامتری با مدل آمیخته فرایند دیریکله مدل سازی شده‌اند و نوسانات لگاریتمی دارای فرایند خودهمبسته مرتبه یک هستند.

### روش‌شناسی پژوهش

در این پژوهش از توزیع پیشین معرفی شده توسط گریفین (۲۰۱۰) استفاده شده است. می‌توان مدل را برای مشاهدات  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  به صورت زیر نوشت:

$$z_t | \mu'_t \sim N(\mu'_t, \alpha \sigma_z^2), \quad t = 1, 2, \dots, n \quad \text{رابطه ۴}$$

$$\mu'_t \sim G, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad \text{رابطه ۵}$$

$$G \sim DP(M, H) \quad \text{رابطه ۶}$$

$$H \equiv N(\mu_0, (1 - \alpha) \sigma_z^2) \quad \text{رابطه ۷}$$

در اینجا  $\mu_0$  معرف پارامتر مکان،  $\sigma_z^2$  پارامتر مقیاس و از  $\alpha$  پارامتر هموارکننده تعبیر می‌شود. داده‌ها ( $Z_t$ ) از توزیع نرمال شرطی و تنها میانگین‌ها ( $\mu'_j$ ) از فرایند دیریکله با پارامتر چگالی  $M$  پیروی می‌کنند. در این مدل واریانس اجزای ادغام شونده ثابت فرض می‌شود؛ به طوری که  $\sigma_z^2$

1. Dirichlet Process Mixture Model (DPM)

واریانس پیشین  $Z_t$  است. توزیع انتظاری پیشین  $Z_t$  نرمال با میانگین  $\mu_0$  و واریانس  $\sigma_z^2$  است که مرکز پیشین چگالی خواهد بود.

حال به توضیح مدل نوسانات تصادفی نیمه پارامتری دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) پرداخته شده است که برای توزیع بازده شرطی از تعبیر ناپارامتری استفاده کرده‌اند، درحالی‌که فرض پارامتری بودن فرایند نوسانات همچنان حفظ شده است (رابطه ۸).

$$y_t^* = h_t + z_t \quad \text{رابطه ۸}$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \sigma_\eta \eta_t$$

در اینجا  $y_t^* = \log(y_t^2 + c)$ ،  $z_t = \log \varepsilon_t^2 \sim F$  و  $\eta_t \sim N(0, 1)$  با مدل سازی  $y_t^*$  به جای مدل سازی  $y_t$ ، اطلاعات در مورد علامت بازده  $y_t$  از بین می‌رود. بنابراین توزیع  $y_t$  یا  $\varepsilon_t$  را تنها با مفروضاتی در مورد توزیع علامت بازده می‌توان احیا کرد. از این رو فرض می‌شود که توزیع  $\varepsilon_t$  و بنابراین توزیع  $y_t$  متقارن است.

هنگام برآزش مدل برای مشاهدات، برخورد به بازدهایی با مقادیر صفر بسیار معمول است. در این پژوهش بازده‌های صفر به وسیله توزیع نرمال حول  $\log c$  مدل شده‌اند (بنابراین اگر  $y_t = 0$  آن گاه  $y_t^* = \log c$ ). همچنین، بازده‌های با مقادیر غیرصفر توسط فرایند دیریکله آمیخته نرمال مدل شده‌اند. چنین اقدامی به ایجاد مدل زیر برای  $Z_t$  منجر خواهد شد:

$$p(z_t) = WN(\log c, \sigma_0^2) + (1 - W) \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j N(\mu_j', \alpha \sigma_z^2) \quad \text{رابطه ۹}$$

که  $W$  احتمال صفر بودن یک بازده و  $\sigma_0^2$  در تمام مقاله برابر ۱ فرض شده است.

اگر برای توزیع پارامتری تصور شود، میانگین  $Z_t$  ثابت بوده و مقدار  $\mu$  مشخص می‌شود؛ اگر توزیع پیشین  $Z_t$  ناپارامتری فرض شود، مقدار  $\mu$  به سادگی و بدون در نظر گرفتن مفروضاتی خاص مشخص نمی‌شود. بنابراین ساده‌تر است که در نمونه‌گیری زنجیره مارکف مونت مارلو،  $Z_t$  از  $\mu$  استقرا شود که چنین اقدامی به تغییر پارامتر زیر منجر خواهد شد:

$$y_t^* = h_t^* + z_t^* \quad \text{رابطه ۱۰}$$

$$h_{t+1}^* = \phi h_t^* + \sigma_\eta \eta_t \quad \text{رابطه ۱۱}$$

که در آن  $h_t^* = h_t - \mu$ ،  $z_t^* = z_t + \mu$  و  $h_1^* \sim N(0, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2})$ . پس از اعمال این محدودیت‌ها، میانگین صفر خواهد شد و می‌توان تعبیر نیمه پارامتری را برای مدل انجام داد. اما همچنان داشتن تقریبی از  $\mu$  به منظور مقایسه مدل نیمه پارامتری با مدل ارائه شده در رابطه ۱ که

در آن  $\varepsilon_t$  دارای توزیع نرمال است، می‌تواند مفید باشد. با توجه به اینکه  $E[z_t^*] = \mu + E[z_t]$  اگر فرض شود که  $E[z_t] = -1/2704$  است، آن‌گاه  $\mu = E[z_t^*] + 1/2704$ .

در این مدل توزیع پسین  $Z_t^*$  استخراج می‌شود، اما از آنجا که توزیع پسین  $\varepsilon_t$  از اهمیت بیشتری برخوردار است، با فرض اینکه توزیع  $\varepsilon_t$  متقارن است، می‌توان از توزیع  $Z_t^*$  توزیع  $\varepsilon_t$  را استخراج کرد. واریانس و چولگی  $\varepsilon_t$  نیز از ویژگی‌های مهم توزیع هستند. لگاریتم واریانس  $\varepsilon_t$  با استفاده از امید ریاضی  $Z_t^*$  و چولگی  $\varepsilon_t$  با استفاده از واریانس  $Z_t^*$  به دست می‌آید، به این نحو که بسط سری تیلور از مرتبه دوم، حول  $E[\varepsilon_t^2]$  محاسبه شده و گشتاور مرتبه اول  $Z_t^*$  با عبارت زیر تقریب زده می‌شود.

$$E(z_t^*) = \mu + E(z_t) \approx \mu + \log E(\varepsilon_t^2) - \frac{1}{2} \frac{V[\varepsilon_t^2]}{(E[\varepsilon_t^2])^2} \quad \text{رابطه ۱۲}$$

و

$$V(z_t^*) = V(z_t) \approx \frac{V(\varepsilon_t^2)}{(V(\varepsilon_t))^2} = K(\varepsilon_t) + 1 \quad \text{رابطه ۱۳}$$

که  $K(\varepsilon_t)$  چولگی  $\varepsilon_t$  است. بنابراین:

$$K(\varepsilon_t) \approx V(z_t^*) - 1 \quad \text{رابطه ۱۴}$$

$$\exp\{\mu\}V(\varepsilon_t) \approx \exp\{E(z_t^*) + V(z_t^*)/2\} \quad \text{رابطه ۱۵}$$

رابطه‌های محاسباتی  $\mu$ ،  $V(\varepsilon_t)$  و  $K(\varepsilon_t)$  دارای عبارت‌های  $V(z_t^*)$  و  $E(z_t)$  هستند و از آنجا که این عبارت‌ها شامل جمع‌های نامتناهی می‌شوند، محاسبه آنها به وسیله الگوریتم نمونه‌گیری زنجیره مارکف مونت کارلو کار آسانی نیست. به همین دلیل از تقریب زیر استفاده شده است:

$$E[z_t^*|\psi] \approx W \log c + (1 - W) \left( \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n + M} \mu'_j + \frac{M}{M + n} \mu_0 \right) \quad \text{رابطه ۱۶}$$

و

$$V(z_t^*|\psi) = W((\log c)^2 + 1) + (1 - W) \frac{\sum_{j=1}^k \left( n_j (\alpha \sigma_z^2 + \mu'_j) \right) + M(\mu_0^2 + \sigma_z^2)}{n'_2 + M} - (\mu - 2704/1)^2 \quad \text{رابطه ۱۷}$$

که در آن  $\Phi = (W, c, k, n_1, \dots, n_k, \mu'_1, \dots, \mu'_k, \mu_0, a, \sigma_z^2, M)$  و  $n_j$  تعداد مشاهدات تخصیص داده شده به ژامین خوشه غیرصفر است و  $k$  تعداد خوشه‌های غیرصفر مجزاست. امید پسین  $(E[z_t^*|y])$  با استفاده از برآوردگر  $E[z_t^*|\psi^{(j)}]$  محاسبه می‌شود که  $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(N)}$  نمونه‌ای از زنجیره مارکف مونت کارلو است و از توزیع پسین به دست می‌آید.  $V(z_t^*|y)$  را نیز با استفاده از  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V[z_t^*|\psi^{(j)}] + \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (E[z_t^*|\psi^{(i)}] - \hat{E}[z_t^*|y])^2$  می‌توان تخمین زد.

پیشین‌های زیر به عنوان پارامترهای مدل نیمه پارامتری فرض شده‌اند:

$$\sim \Phi N(0,10) \times I_{[-1,1]}, \sigma_\eta^2 \sim IG(2.5, 0.025) \quad \text{رابطه ۱۸}$$

که در آن  $IG(a, b)$  توزیع معکوس گاما با میانگین  $\frac{b}{a-1}$  (اگر  $a > 1$ ) و واریانس  $\frac{b^2}{(a-1)(a-2)}$  (اگر  $a > 2$ ) است و  $N(\mu, \sigma^2) \times I_{[a,b]}$  توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  را نشان می‌دهد که به بازه  $(a, b)$  محدود شده است، بنابراین مانایی فرایند نوسانات لگاریتمی را تضمین می‌کند. پیشین  $(W)$  نیز، توزیع بتا است  $W \sim Be(0.1, 0.9)$ . پارامتر جرم فرایند دیریکله  $(M)$  نیز، دارای پیشین زیر است:

$$P(M) = \theta^\lambda \frac{\Gamma(2\lambda)}{(\Gamma(2\lambda))^2} \frac{M^{\lambda-1}}{(M + \theta)^{2\lambda}} \quad \text{رابطه ۱۹}$$

که در اینجا  $\theta$  اندازه نمونه پیشین را مشخص می‌کند، و  $\lambda$  پارامتر واریانس است. در این پژوهش  $\alpha$  مقدار ثابت  $0.1$  فرض شده است.

در این قسمت، گام‌های الگوریتم زنجیره مارکف مونت کارلو به منظور برآزش مدل نیمه پارامتری به صورت مختصر شرح داده شده است.<sup>۱</sup>

متغیرهای شاخص  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  برای تخصیص مشاهدات به مقادیر متمایز فرایند دیریکله معرفی شده‌اند. گام‌های زیر نیز به منظور به روز کردن پارامترها طی می‌شوند.

- مقداردهی اولیه  $\Phi, \sigma_\eta^2, \sigma_z^2, \mu', \mu_0, M$  و  $S$  و  $W$ .
- نمونه‌گیری  $S, W, \mu', \mu_0, \sigma_z^2, \sigma_\eta^2, \Phi, h|y^*$ .
- نمونه‌گیری  $h, M, W, \mu', \mu_0, \sigma_z^2, \sigma_\eta^2, \Phi, s|y^*$ .

۱. برای آگاهی از جزئیات آن به مقاله دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) رجوع شود.



- نمونه‌گیری  $\sigma_z^2, \mu_0, \mu', M, W | y^*, \phi, \sigma_\eta^2, s, h$
- نمونه‌گیری  $\phi, \sigma_\eta^2 | y^*, \sigma_z^2, \mu_0, \mu', M, W, s, h$

**به‌روزرسانی نوسانات لگاریتمی:** نمایش مدل نوسانات تصادفی به‌صورت نشان‌داده شده در رابطه ۸ و استفاده از آمیخته نرمال برای  $z_t$ ، تعبیر را آسان کرده است. به شرط  $s$ ، مدل  $y^*$  مدل خطی پویای گوسی است، بنابراین نوسانات لگاریتمی را می‌توان با استفاده از الگوریتم فیلترسازی پیشرو و نمونه‌گیری بازگشتی، به‌صورت همزمان به‌روز کرد.

**به‌روزرسانی اجزای آمیخته:** متغیرهای تخصیص  $s$  و پارامترهای مدل آمیخته را می‌توان با روش توضیح داده شده توسط گریفین (۲۰۱۰) که همان استفاده از روش‌های استاندارد برای مدل‌های آمیخته فرایند دیریکله است، به‌روز کرد.

**به‌روزرسانی پارامترهای نوسانات تصادفی:** هنگام به‌روزرسانی پارامترهای مدل نوسانات تصادفی، لازم است تغییر پارامترهایی اعمال شود؛ چرا که نوسانات لگاریتمی  $h$  و پارامترهای  $(\phi, \sigma_\eta^2, \mu)$  اغلب دارای همبستگی هستند. در ادبیات به این منظور دو رویکرد متفاوت ارائه شده است؛ ۱. تغییر پارامترهای مدل به نحوی که وابستگی میان پارامترها و نوسانات لگاریتمی حداقل شود و ۲. پارامترها و نوسانات لگاریتمی به‌صورت همزمان به‌روز شوند. در این پژوهش، از رویکرد نخست بهره برده شده است.

**محاسبه ارزش در معرض خطر:** به‌طور کلی ارزش در معرض خطر نشان‌دهنده زیان احتمالی یک دارایی در یک دوره زمانی مشخص و در سطح اطمینان مشخص است که با تغییر نامطلوب در قیمت‌های بازار ارتباط دارد. از لحاظ آماری، به شرط وجود سطح اطمینانی خاص مانند  $\pi$ ، ارزش در معرض خطر دوره  $t$  در سطح اطمینان  $\pi$  برای یک سری بازده، به‌عنوان مقداری تعریف می‌شود که احتمال بیشتر شدن زیان‌ها از این مقدار در زمان  $t$  برابر با  $\pi$  است. به بیان دیگر، ارزش در معرض خطر دوره  $t$  در سطح اطمینان  $\pi$  برای یک سری بازده به‌صورت چندک  $\pi$  توزیع شرطی بازده در زمان  $t$  تعریف می‌شود:

$$\pi = \Pr(r_t \leq VaR_{\pi,t} | F_{t-1}) \quad \text{رابطه ۲۰}$$

بنابراین با داشتن سری مشاهدات  $r$ ، ارزش در معرض خطر دوره بعد در سطح اطمینان  $\pi$  را که با  $VaR_{\pi,T+1}$  نمایش داده می‌شود، می‌توان با استفاده از چندک  $\pi$  توزیع شرطی بازده یک دوره بعد  $f(r_{T+1} | r)$  محاسبه کرد. شایان توجه است که محاسبه ارزش در معرض خطر

به شدت به توزیع فرض شده برای جملات اخلاص وابسته است. با داشتن خروجی‌های MCMC، می‌توان چگالی بازده یک دوره بعد را به صورت زیر پیش‌بینی کرد:

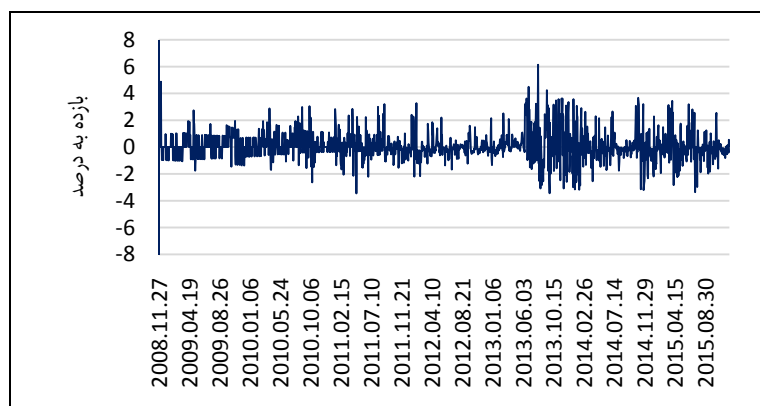
$$f(r_{T+1}|r) \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K f(r_{T+1}|r) \quad \text{رابطه ۲۱}$$

بنابراین برای محاسبه ارزش در معرض خطر کافی است از چندک‌های مربوطه این چگالی پیش‌گویانه استفاده کرد.

**آزمون پسرو:** در این پژوهش از انواع آزمون‌های پسرویی که بر مبنای تکرار استثنائات هستند استفاده شده است. در این نوع آزمون‌ها، بر اساس مقایسه میان تعداد روزهایی که زیان از ارزش در معرض خطر بیشتر شده و سطح اطمینان ارزش در معرض خطر برآورد شده، به آزمون دقت مدل‌های ارزش در معرض خطر پرداخته می‌شود. بر این اساس در پژوهش حاضر، از آزمون‌های پوشش غیرشرطی، آزمون پوشش شرطی و آزمون مستقل توضیح داده شده توسط اندرو رستی و آندریا سیرونی (۲۰۰۷) استفاده شده است.

### یافته‌های پژوهش

در این بخش مدل‌های نوسانات تصادفی پارامتری و ناپارامتری برای شاخص گروه بانکی از تاریخ ۵ آذر ۱۳۸۷ تا ۲۲ آذر ۱۳۹۴ (هشت سال) اجرا شده است (در مجموع ۱۶۹۳ داده). داده‌های ورودی، همان بازده لگاریتمی شاخص به درصد است که در شکل ۱ مشاهده می‌شود. در ادامه یافته‌های پژوهش ارائه شده‌اند.



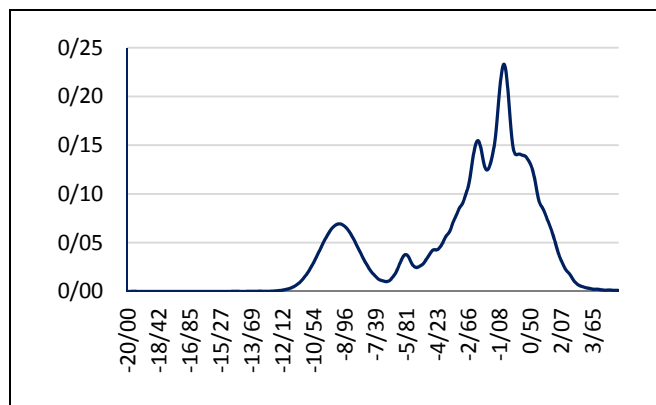
شکل ۱. نمودار بازده شاخص گروه بانکی

نتایج اجرای مدل در جدول ۱ خلاصه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، میانۀ پسین پارامتر پایداری ( $\phi$ ) در مدل نیمه‌پارامتری نسبت به مدل پارامتری، مقدار بیشتری را اتخاذ کرده است، در حالیکه واریانس تساوی نوسانات ( $\sigma_{\eta}^2$ ) کمتر برآورد شده است. چنین به نظر می‌رسد که مدل پارامتری تمایل به بزرگنمایی در تخمین نوسانات داشته و نسبت به قدرمطلق مقادیر بزرگ بازده، واکنش زیادی نشان می‌دهد. گرچه میانۀ پسین پارامتر پایداری در مدل نیمه‌پارامتری بسیار به ۱ نزدیک است، مانایی مدل نقض نشده است. در مدل نیمه‌پارامتری، پارامتر  $\mu$  کوچک‌تر تخمین زده شده که نشان‌دهنده کوچک‌تر بودن واریانس جمله اختلال در مدل نیمه‌پارامتری است. همچنین واریانس بسیار بزرگ‌تر از ۴ برآورد شده که نشان‌دهنده چولگی توزیع جمله اختلال است. بنابراین به نظر می‌رسد که در مدل پارامتری، واریانس بیشتر تخمین زده شده است تا در نظر نگرفتن چولگی برای توزیع بازده را جبران کند. در نهایت، میانۀ پسین تعداد خوشه‌ها ( $k$ ) نسبتاً بزرگ است، در حالیکه میانۀ پسین ( $W$ ) وجود بازده‌های منفی را نشان می‌دهد. این یافته‌ها مشابه یافته‌های دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) است.

جدول ۱. میانه‌های پسین پارامترهای مدل پارامتری و نیمه‌پارامتری

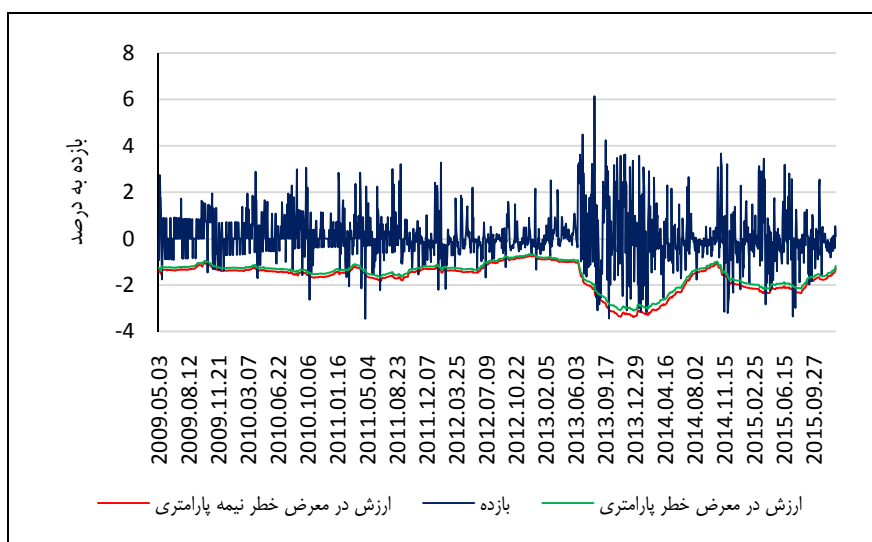
پارامترها	مدل پارامتری	مدل نیمه‌پارامتری ( $\alpha=0/01$ )
$\phi$	۰/۹۸	۰/۹۹
$\mu$	-۱/۵۵	-۱/۴۰
$\sigma_{\eta}^2$	۰/۱۰	۰/۰۸
$\sigma_z^2$		۱۱/۹۰
$M$		۷/۶۳
$k$		۴۱
$W$		۰/۱۷

در شکل ۲ توزیع پسین بازده مشاهده می‌شود. این توزیع دارای چند مد است و مد اصلی که تجمع بیشتر داده‌ها را در اطراف خود دارد، در حوالی صفر اتفاق افتاده است. در ادامه با استفاده از صدکی از توزیع چگالی به‌دست آمده در هر یک از دو مدل، ارزش در معرض خطر برای شاخص گروه بانکی از تاریخ ۱۳ اردیبهشت ۱۳۸۸ تا ۲۲ آذر ماه ۱۳۹۴ اجرا شده است (در مجموع ۱۵۹۳ داده). ارزش در معرض خطر در واقع معیاری برای سنجش ریسک بازار است که امروزه با توجه به کاربرد آن، اهمیت زیادی دارد. شایان ذکر است که ارزش در معرض خطر در هر روز با استفاده از بازده لگاریتمی ۱۰۰ روز قبل و با سطح اطمینان ۰/۹۵ محاسبه شده است.



شکل ۲. نمودار توزیع پسین بازده

نمودار مربوط به بازده و ارزش در معرض خطر محاسبه شده با استفاده از دو مدل پارامتری و نیمه پارامتری نوسانات تصادفی در شکل ۳ ارائه شده است. همان طور که مشاهده می شود، مقادیر ارزش در معرض خطر محاسبه شده در سطح اطمینان ۰/۹۵ با استفاده از مدل نوسانات تصادفی نیمه پارامتری، کمتر از مقدار آن در مدل نوسانات تصادفی با فرض نرمال بودن توزیع جملات اخلاص شده است. بدیهی است در این حالت (مدل نیمه پارامتری) احتمال اینکه بازده کسب شده در هر روز از ارزش در معرض خطر در همان روز کمتر شود، کمتر از مدل پارامتری خواهد بود.



شکل ۳. نمودار بازده و ارزش در معرض خطر محاسبه شده با دو روش پارامتری و نیمه پارامتری

در اینجا بازده کسب شده در هر روز با ارزش در معرض خطر به دست آمده در آن روز مقایسه شده است. چنانچه بازده به دست آمده کمتر از ارزش در معرض خطر محاسبه شده باشد، یک استثنا ثبت می شود. همان طور که در جدول ۲ مشاهده می شود، طی ۱۵۹۳ روز اجرای آزمایش، تعداد استثنای ثبت شده در روش نیمه پارامتری ۴۰ روز و تعداد استثنای ثبت شده در روش پارامتری ۵۸ روز است.

جدول ۲. مقایسه فراوانی استنهاها در دو روش پارامتری و نیمه پارامتری

عنوان	مدل نیمه پارامتری نوسانات تصادفی	مدل پارامتری نوسانات تصادفی
تعداد روزهای اجرای آزمون	۱۵۹۳	۱۵۹۳
تعداد استنهاها	۴۰	۵۸
درصد استنهاها	۲/۵۱٪	۳/۶۴٪

سپس آزمون های پسروی توضیح داده شده در بخش قبل، برای ارزش در معرض خطر محاسبه شده با دو روش نیمه پارامتری و پارامتری انجام می شود. فرض صفر آزمون های پوشش شرطی، مستقل و غیر شرطی به قرار زیر است:

- آزمون غیر شرطی: فراوانی استنهاهای تجربی، مقدار معتبری دارد.
  - آزمون مستقل: مشاهده استثنا از اینکه در روز قبل استثنا داشته باشیم مستقل است.
  - آزمون شرطی: دو فرض فوق را همزمان آزمون می کند.
- گفتنی است، اگر زیان در هر روز از ارزش در معرض خطر در همان روز بیشتر شود، یک استثنا ثبت خواهد شد. نتایج اجرای این سه آزمون در جدول ۳ به صورت خلاصه درج شده است.

جدول ۳. مقایسه نتایج به دست آمده از آزمون های پسرو

آزمون	مدل نیمه پارامتری نوسانات تصادفی	مدل پارامتری نوسانات تصادفی
$P_{uc}$	۰/۰۰۰۰۰۰۵۰۹۱	۰/۰۰۰۹۰۴۸۷۹۰۴
$P_{ind}$	۰/۰۰۰۰۳۳۵۹۰۸	۰/۰۰۰۳۸۳۹۰۰۱
$P_{cc}$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۸۳۹

مقدار احتمال برای هر سه آزمون فرض در سطح اطمینان ۸۰ درصد، برای دو مدل پارامتری و نیمه پارامتری از ۰/۲ بسیار کمتر است و این یعنی فرض صفر را در هیچ یک از این سه آزمون برای هیچ یک از این دو مدل نمی توان رد کرد. بنابراین بر اساس نتایج آزمون اول، بار دیگر

یافته‌های شکل ۳ مبنی بر کمتر بودن ارزش در معرض خطر در مدل نیمه‌پارامتری نسبت به مدل پارامتری به تأیید می‌رسد. بر اساس نتایج آزمون دوم، احتمال وقوع استثنا در هر روز به وقوع استثنا در روز قبل وابسته نیست و این کاملاً با تصادفی بودن نوسانات در مدل نوسانات تصادفی همخوانی دارد. بر اساس نتایج آزمون سوم، می‌توان نتیجه گرفت که هر دو مدل پارامتری و نیمه‌پارامتری در سطح اطمینان خوبی از صحت کافی برخوردار هستند. با توجه به ناچیز بودن هر دو آماره می‌توان گفت به نظر می‌رسد مدل نیمه‌پارامتری، توزیع بازده را با دقت بهتری تخمین می‌زند، اما نتوانسته است در محاسبه ارزش در معرض خطر بهبودی ایجاد کند. از این حیث مدل نیمه‌پارامتری در محاسبه ارزش در معرض خطر بر مدل پارامتری برتری چندانی ندارد.

### نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در پژوهش حاضر، روش پیشنهاد شده دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) برای شاخص گروه بانکی به اجرا درآمد و با روش پیشنهادی تیلور (۱۹۸۲) مقایسه شد. در این روش که تعبیر نیمه‌پارامتری بیزی از مدل نوسانات تصادفی است، توزیع بازده به صورت ناپارامتری مدل‌سازی شد، در حالیکه پارامتری بودن تساوی نوسانات محفوظ ماند. به منظور بهره‌گیری از روش‌های کارآمد کامپیوتری مانند الگوریتم فیلترسازی پیشرو و نمونه‌گیری بازگشتی، لگاریتم مربع جملات اخلاص به جای جملات اخلاص مدل شدند. در نهایت ارزش در معرض خطر با به‌کارگیری توزیع به‌دست آمده محاسبه شد و مقادیر حاصل با ارزش در معرض خطر به‌دست آمده از روش نوسانات تصادفی با توزیع نرمال مقایسه شدند.

نتایج اجرای مدل نشان می‌دهد در مواقعی که توزیع بازده دارای چولگی است، مدل نیمه‌پارامتری نوسانات را نسبت به مدل پارامتری با توزیع نرمال، با دقت بیشتری برآورد می‌کند. در این حالت، مدل پارامتری نوسانات را بیشتر از حد واقعی تخمین می‌زند. شایان ذکر است که نتایج فوق مشابه نتایج به‌دست آمده در پژوهش‌های دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) و جنسن و ماهیو (۲۰۱۰) و ویربیکایت، لویز، آسین و گالتانو (۲۰۱۴) است. ضمن آن که دلاتولا و گریفین نشان دادند در شرایطی که توزیع بازده به توزیع نرمال نزدیک باشد، نتایج مدل نیمه‌پارامتری مشابه نتایج مدل پارامتری با فرض توزیع نرمال خواهد بود.

از آنجاکه در محاسبه معیارهای ریسک نظیر ارزش در معرض خطر که کمیت بال بر لزوم استفاده از آن تأکید بسیار دارد، افزایش دقت تخمین نوسانات بازده می‌تواند دقت تخمین این معیارها را افزایش دهد، در این پژوهش ارزش در معرض خطر برآورد شده با استفاده از توزیع

به‌دست آمده از روش نیمه‌پارامتری با ارزش در معرض خطر به‌دست آمده از روش پارامتری نوسانات تصادفی، مقایسه شد. همان‌طور که نتایج اجرای آزمون‌های پسرو نشان می‌دهد، هر دو مدل در سطح اطمینان خوبی از صحت کافی برخوردار هستند. با توجه به ناچیز بودن هر دو آماره می‌توان گفت به نظر می‌رسد مدل نیمه‌پارامتری توزیع بازده را با دقت بهتری تخمین می‌زند، اما نتوانسته است در محاسبه ارزش در معرض خطر بهبود کاربردی ایجاد کند. از این حیث مدل نیمه‌پارامتری در محاسبه ارزش در معرض خطر بر مدل پارامتری برتری چندانی ندارد.

### فهرست منابع

- Abanto-Valle, C., Bandyopadhyay, D., Lachos, V. & Enriquez, I. (2010). Robust Bayesian Analysis of Heavy-tailed Stochastic Volatility Models using Scale Mixtures of Normal Distributions. *Computational Statistics and Data analysis*, 54(12), 2883-2898.
- Barndorff-Nielsen, E. (1997). Normal Inverse Gaussian Distribution and Stochastic Volatility Modelling. *Scandinavian Journal of Statistics*, 24 (1), 1-13.
- Broto, C. & Ruiz, E. (2004). Estimation Methods for Stochastic Volatility Models: A Survey. *Journal of Economic Survey*, 18(5), 613-649.
- Delatola, E.I. & Griffin, J. (2011). Bayesian Nonparametric Modeling of the Return Distribution with Stochastic Volatility. *Bayesian Analysis*, 6 (4), 901-926.
- Fuller, W. (1996). *Introduction to Statistical Time Series* (Second), JOHN WILEY, New York.
- Griffin, J. (2010). Default Priors for Density Estimation with Mixture Models. *Bayesian Analysis*, 1 (5), 45-64.
- Jacquier, E., Polson, N. & Rossi, P. (1994). Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 12 (4), 317-389.
- Jacquier, E., Polson, N. & Rossi, P. (2003). Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors. *Journal of Econometrics*, 20.1 (2002): 69-87.
- Jensen, M., & Maheu, J. (2010). Bayesian Semiparametric Stochastic Volatility Modeling. *Journal of Econometrics*, 157.2 (2010), 306-316.
- Kim, S., Shephard, N. & Chib, S. (1998). Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models. *The Review of Economic Studies*, 65 (3), 361-393.

- Mahieu, R., & Schotman, P. (1998). An empirical application of stochastic volatility models. *Journal of Applied Econometrics*, 13 (4), 333-360.
- Nakajima, J. & Omori, Y. (2009). Leverage, heavy-tails and correlated jumps in stochastic volatility models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53 (6), 2335-2353.
- Omori, Y., Chib, S., Shephard, N. & Nakajima, J. (2007). Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference. *Journal of Econometrics*, 140 (2), 425-449.
- Shephard, N. & Kim, S. (1994). Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models: Comment. *Journal of Business and Economic Statistics*, 12.4 (1994): 406-410.
- Sironi, A. & Resti, A. (2007). *Risk management and shareholders' value in banking: from risk measurement models to capital allocation policies*, Vol. 417. John Wiley & Sons, England.
- Taylor, S. (1982). *Financial returns modeled by the product of two stochastic processes-a study of daily sugar prices*. North Holland, Amsterdam.
- Virbickaite, A., Lopez, H., Ausin, M. & Galeano, P. (2014). Particle Learning for Bayesian Non-Parametric Markov Switching Stochastic Volatility Model. *UC3M Working papers*. 14-19.