

# استفاده از روش غنی شده بدون شبکه گلرکین در تعیین پارامترهای شکست صفحات FGM

فرزاد ابراهیمی محمد حسن نائی\*

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی مکانیک - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

<sup>۲</sup> استادیار دانشکده مهندسی مکانیک - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

( / / / / / / )

## چکیده

تحقیق حاضر، روش بدون شبکه را برای تخمین پارامترهای شکست یک ترک ایستا در صفحات FGM با هندسه دلخواه بکار خواهدبرد. از روش بدون شبکه گلرکین<sup>۱</sup> که ویژگیهای اساسی بسیار مشترکی با بسیاری از روشهای بدون شبکه دارد استفاده شده است. در اینجا خواص مواد به صورت توابع همواری از مختصات فضایی در نظر گرفته شده و با استفاده از دو روش جدید گسترش یافته انتگرال تقابل<sup>۲</sup> آنالیز شکست مد I مورد تحلیل قرار گرفته است. پس از معرفی روش بدون شبکه گلرکین چند مساله دو بعدی شکست مد I در صفحات FGM تحت بارگذاریهای مختلف برای محاسبه ضرایب شدت تنش با استفاده از روش انتگرال تقابل حل شده است. مقایسه بین نتایج حاصل و نتایج ارائه شده در تحقیقات مشابه با حل تحلیلی یا روش اجزاء محدود با استفاده از انتگرالها و تحلیلهای مختلف، دقت خوب و همگرایی قابل قبولی را نشان می‌دهد.

**واژه های کلیدی:** روش بدون شبکه گلرکین - پارامترهای شکست - صفحه FGM - ضرایب شدت تنش

تحمل مواد FGM در مقابل شکست و واماندگی هنوز ناشناخته است، بسیاری از تحقیقات به سمت محاسبه عددی پارامترهای شکست و شبیه سازی رشد ترک در این مواد سوق یافته است و در این راستا، به علت پیچیدگی زیاد، مسائل الاستیسیته صفحه ای شامل ترکها در مواد FGM با فرض یک فرم تابعی از تغییرات خواص ماده حل شده اند. این تغییرات اغلب به صورت توابع خطی یا نمایی فرض شده اند. اتکینسون [۸] دالیوال و سینگ [۹] و دلاله و اردوگان [۱۰] با فرض تغییرات فضایی مدول الاستیسیته به صورت نمایی، مسائل ترک را برای مواد غیر همگن تحت بارهای مکانیکی حل کرده اند.

اشن [۱۱] شرایط مد مرکب را در مواد غیر همگن با استفاده از روش المان محدود مورد مطالعه قرارداد. او همچنین ثابت کرد که ترم پیشرو در بسط مجانبی تنش، تکین ریشه دوم است. این نتیجه همچنین توسط جین و نودا [۱۲] برای مواد با تغییرات خواص قطعه ای دیفرانسیل پذیر ثابت گردید. با فرض تغییرات خواص گرمایی مواد به صورت تابع نمایی، جین و نودا [۱۳] و اردوگان و وو [۱۴] ضرایب شدت تنش گرمایی را برای جامدات غیر همگن محاسبه

مواد FGM اولین بار در سال ۱۹۸۴ در پی تلاش دانشمندان علم مواد برای دست یافتن به موادی با مقاومت حرارتی بسیار بالا توسط کویزومی [۱] در ژاپن معرفی گردید. این مواد از ترکیب دو ماده مختلف که معمولاً یکی فلز و دیگری سرامیک است ساخته می شوند به طوری که خواص ترکیب حاصل به صورت یکنواخت تغییر کند. در نتیجه در این مواد جزء حجمی مواد تشکیل دهنده به صورت تابعی یکنواخت تغییر کرده و باعث ایجاد یک میکرواستراکچر غیریکنواخت و یک ماکرواستراکچر با تغییرات پیوسته می گردد.

کارهای تحلیلی بر روی موادی شبیه مواد FGM به دهه ۱۹۶۰ هنگامی که گیبسون [۲] خاک را به عنوان یک ماده غیر همگن مدل کرد، بر می گردد. پس از آن تحقیقات گسترده ای بر روی مواد FGM در زمینه های مختلف انجام گرفته است که از آن جمله میتوان به جدیدترین فعالیتها در زمینه بررسی ارتعاشات صفحات ساخته شده از این مواد توسط اللهوردی زاده و همکاران [۳-۴] و بررسی ارتعاشات صفحات FGM کوپل با صفحات پیزوالکتریک توسط ابراهیمی و راستگو [۵-۷] اشاره نمود. اما از آن جا که حد

کرده اند. گو و آسارو [۱۵] نیز ترکی نیمه نامحدود را در یک نوار از جنس FGM تحت بار لبه ای در نظر گرفته و ضرایب شدت تنش را برای بسیاری از نمونه های متداول در مکانیک شکست بدست آورده اند. اردوگان [۱۶] مفاهیم اولیه مکانیک شکست مواد FGM را بازنگاری کرده و تعدادی از مسائل شکست در این مواد را مطرح کرده است. گو و همکاران [۱۷] یک روش ساده شده را برای محاسبه میدان نوک ترک در مواد FGM با استفاده از تکنیک انتگرال ناحیه ای معادل<sup>۲</sup> ارائه داده اند. اخیراً کیم و پائولینو [۱۸] پارامترهای شکست مد مرکب را در مواد FGM با استفاده از تحلیل المان محدود با سه روش مختلف بدست آورده اند: روش انتگرال  $J_k^*$  مستقل از مسیر، روش اصلاح شده انتگرال بسته شدن ترک و روش اصلاح تغییر مکان. زو و همکاران [۱۹] نیز یک روش المان محدود ایزوپارامتریک چند گانه را برای تخمین ضرایب شدت تنش ترک ها در مواد FGM پیشنهاد کرده اند.

روش انتگرال تقابل یکی از روشهای بسیار موثر در تحلیل مکانیک شکست مواد می باشد. این روش اولین بار برای تخمین ضرایب شدت تنش در مواد همگن ایزوتروپیک توسط یائو و همکاران [۲۰] پیشنهاد شده است. در این روش از یک انتگرال پایستار برای دو حالت قابل قبول یک جامد الاستیک تحت عنوان حالات واقعی و اضافی استفاده می شود. ونگ و همکاران [۲۱] این روش را برای جامدات اورتوتروپیک همگن گسترش دادند. یائو [۲۲] نیز از این روش در حل مسائل سطح مشترک دو ماده استفاده نمود. اخیراً این روش به عنوان یک روش قوی و دقیق برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مواد FGM مطرح شده است. دالبو [۲۳] با در نظر گرفتن یک مساله صفحه ای ترک با جهت دلخواه و استفاده از روش (X-FEM) و کیم و پائولینو [۲۴] با استفاده از روش المان محدود، به بررسی FGM با ترک چندگانه و با خواص مواد تعریف شده به وسیله توابع پیوسته ومدلهای میکرومکانیک پرداخته اند.

بنابراین با مرور تحقیقات انجام شده در حوزه مکانیک شکست مواد FGM دیده می شود که بیشتر مطالعات تحلیلی بر روی این مواد با استفاده از روش المان محدود به عنوان ابزار محاسبه عددی صورت گرفته است. اما می دانیم که روش اجزاء محدود دارای محدودیت هایی بالاخص در حل مسائل مکانیک جامداتی است که در آنها ناحیه شکل مساله دارای تغییر پیوسته در هندسه می باشد.

به طور کلی استفاده از روشهایی مانند اجزاء محدود که

وابسته به شبکه هستند در هنگام برخورد با ترک هایی که بر شبکه بندی در هندسه اولیه منطبق نیستند کاملاً وقت گیر و دردسرساز است زیرا تنها راه حل مناسب در این گونه مسائل شبکه بندی مجدد ناحیه مساله در حین تغییرات هندسه مدل ناشی از رشد ترک است تا خطوط شبکه همچنان منطبق بر وجوه ترک قرار گیرند. برای غلبه بر این محدودیتها و مشکلات، به تازگی روشهای بدون شبکه گسترش پیدا کرده اند که برای گسسته سازی مسئله نیازی به شبکه بندی ندارند. در این روشها، حل تقریبی بر مبنای عبارات تعدادی از گره ها ایجاد می شود و برای ایجاد حل گسسته هیچ نیازی به المانها یا برقراری روابط داخلی بین گره های این المانها نیست.

از آنجا که تولید شبکه در سازه های با ترکهای پیچیده می تواند بسیار وقت گیر و هزینه برتر از حل یک سری از معادلات خطی باشد، روش بدون شبکه می تواند جایگزین بسیار خوبی برای روش المان محدود باشد. در سالهای اخیر، روشهای مختلف بدون شبکه برای حل مسائل مکانیک شکست بدون استفاده از یک شبکه ساختاری گسترش یافته اند [۲۵-۳۱]؛ این روشها با استفاده از تقریب مجموع کمترین مربعات، توابع شکل بدون شبکه را بر پایه عبارات مربوط به گره های کاملاً اختیاری پخش شده، ایجاد می کنند. البته تا به امروز بیشتر پیشرفت ها در روش های بدون شبکه بر روی شکست مواد همگن تمرکز نموده است. تحلیل شکست ترک در مواد FGM با استفاده از مزیت های روش های بدون شبکه هنوز گسترش زیادی نیافته است. به همین دلیل، علاقه فراوانی در گسترش این روش ها برای تخمین پارامترهای شکست در مواد FGM وجود دارد.

تحقیق حاضر، روش بدون شبکه را برای تخمین پارامترهای شکست یک ترک ایستا در صفحات ساخته شده از مواد FGM با هندسه دلخواه به کار خواهد برد. از روش بدون شبکه گلرکین که ویژگیهای اساسی بسیار مشترکی با بسیاری از روشهای بدون شبکه دارد استفاده خواهد شد. پس از معرفی روش بدون شبکه گلرکین، چند مساله دو بعدی با ترک لبه ای مد I در صفحات FGM تحت بارگذاریهای مختلف همچون کرنش ثابت، تنش ثابت و تنش خطی برای محاسبه ضرایب شدت تنش با استفاده از روش انتگرال تقابل حل شده است. مقایسه بین نتایج حاصله و نتایج ارائه شده در تحقیقات مشابه دقت خوب و همگرایی قابل قبولی را نشان می دهد.

## میدان نوک ترک در صفحه FGM

اشن [۱۱] و پس از او جین و نودا [۱۲] نشان دادند که برای تغییرات خواص مواد قطعه ای دیفرانسیل پذیر، تنش الاستیک و میدان تغییر مکان در مواد FGM را می توان با استفاده از تابع تنش در فرم متغیر جدانشدنی همانند آنچه در مورد مواد همگن وجود دارد به دست آورد. بنابراین میدان تنش تکین خطی الاستیک و میدان تغییر مکان مربوطه در نزدیکی نوک ترک را می توان به فرم زیر بدست آورد: [۱۱]

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [k_I f_{11}^I(\theta) + k_{II} f_{11}^{II}(\theta)] \quad (5)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [k_I f_{22}^I(\theta) + k_{II} f_{22}^{II}(\theta)] \quad (6)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [k_I f_{12}^I(\theta) + k_{II} f_{12}^{II}(\theta)] \quad (7)$$

$$u_1 = \frac{1}{\mu_{tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [k_I g_1^I(\theta) + k_{II} g_1^{II}(\theta)] \quad (8)$$

$$u_2 = \frac{1}{\mu_{tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [k_I g_2^I(\theta) + k_{II} g_2^{II}(\theta)] \quad (9)$$

که در آن  $k_I$ ،  $k_{II}$ ، ضرایب شدت تنش مد I، II و  $f_{ij}^I(\theta)$ ،  $f_{ij}^{II}(\theta)$  و  $g_i^I(\theta)$ ،  $g_i^{II}(\theta)$  (i=1,2) توابع زاویه ای استاندارد برای یک ترک در یک ماده الاستیک همگن می باشند و همچنین  $\mu_{tip} = E_{tip} / 2(1 + \nu_{tip}^2)$  مدول برشی است که در نوک ترک محاسبه شده است.

اگرچه گرادیان مواد تأثیری بر تکین ریشه دوم یا توزیع تنش تکین ندارد ولی گرادیان مواد بر روی ضریب شدت تنش مؤثر می باشد. بنابراین پارامترهای شکست توابعی از گرادیان مواد، بارگذاری خارجی و هندسی جسم می باشند.

### روش انتگرال تقابل در مواد همگن

انتگرال J برای ماده ترک دار همگن به صورت زیر تعریف می گردد [۳۲]:

$$J = \int_{\Gamma} (W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) n_j d\Gamma \quad (10)$$

که در آن W چگالی انرژی کرنشی و  $n_j$  مولفه زام بردار واحد عمود به سمت بیرون بر هر کانتور اختیاری  $\Gamma$  است که نوک ترک را دربرمی گیرد. با اعمال تئوری دیورژانس، انتگرال کانتور در معادله (۱۰) را می توان به فرم معادله زیر درآورد. [۳۳]

یک سازه دو بعدی با یک ترک مستطیلی به طول 2a را که مطابق شکل (۱) تحت بارهای خارجی  $s_1, s_2, \dots, s_m$  قرار گرفته است در نظر بگیرید. فرض می شود که خواص ماده همچون مدول الاستیسیته E و نسبت پواسون  $\nu$  به فرم زیر تغییر می کنند:

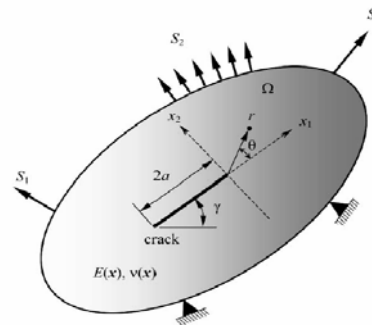
$$E = E(x_1, x_2) = E(x) \quad ( )$$

$$\nu = \nu(x_1, x_2) = \nu(x) \quad ( )$$

که در آن  $x = \{x_1, x_2\}$  و  $-1 \leq \nu(x) \leq 1$  می باشد. در عالم واقع، مواد FGM موادی چند فازی با خواص محلی ناپیوسته می باشند. در معادله های بالا  $E(x)$ ،  $\nu(x)$  را باید به عنوان توابع یکنواخت در نظر گرفت. در چنین حالتی مواد FGM را می توان به صورت مواد غیرهمگن که معادله اساسی الاستیک برای آنها به صورت زیر است مدل کرد:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu^*(x)}{E^*(x)} \sigma_{ij} + \frac{\nu^*(x)}{E^*(x)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3)$$

در این معادله  $E^*(x)$  و  $\nu^*(x)$  در حالت تنش صفحه ای به ترتیب برابر  $E(x)$  و  $\nu(x)$  و در حالت کرنش صفحه ای معادل  $E(x) / [1 - \nu(x)^2]$  و  $\nu(x) / [1 - \nu(x)]$  خواهند بود.



شکل ۱: هندسه ترک در یک صفحه از جنس FGM.

برای مواد غیرهمگن تحت شرایط تغییر شکل الاستیک خطی تنش یا کرنش صفحه ای و در غیاب نیروهای حجمی، تابع تنش ایری  $F(x_1, x_2)$  معادله زیر را ارضا می کند. [۱۱]

$$\nabla^2 \left( \frac{\nabla^2 F}{E^*(x)} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{1 + \nu^*(x)}{E^*(x)} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{1 + \nu^*(x)}{E^*(x)} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{2\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{1 + \nu^*(x)}{E^*(x)} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad ( )$$

$$M^{(1,2)} = \int_A \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (19)$$

در واقع انتگرال تقابل می‌باشد. از معادلات (۱۵) تا (۱۹) داریم:

$$W^{(1)} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)}, \quad W^{(2)} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad (20)$$

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}) \quad (21)$$

که چگالی انرژی کرنشی های مختلف هستند که رابطه زیر را ارضا می کنند:

$$W^{(S)} = W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(1+2)} \quad (22)$$

انتگرال J برای جامدات الاستیک خطی تحت شرایط بارگذاری مد مرکب، مساوی با نرخ آزادسازی انرژی نیز می‌باشد و بنابراین داریم:

$$J = \frac{1}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (23)$$

با اعمال رابطه (۲۳) به حالت‌های ۱ و ۲ و همچنین حالت S داریم:

$$J^{(1)} = \frac{1}{E^*} (K_I^{(1)2} + K_{II}^{(2)2}) \quad (24)$$

$$J^{(2)} = \frac{1}{E^*} (K_I^{(2)2} + K_{II}^{(2)2}) \quad (25)$$

$$J^{(S)} = \frac{1}{E^*} [(K_I^{(1)} + K_{II}^{(2)})^2 + (K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)})^2] \\ = \frac{1}{E^*} [(K_I^{(1)2} + K_{II}^{(1)2}) + (K_I^{(2)2} + K_{II}^{(2)2}) + 2(K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)})] \quad (26)$$

$$J^{(S)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)}) \quad (27)$$

با مقایسه معادلات (۱۶) و (۲۷) درمی یابیم:

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)}) \quad (28)$$

ضرایب شدت تنش برای حالت واقعی را می‌توان با انتخاب مناسب حالت اضافی بدست آورد. به طور مثال اگر حالت ۲ را به عنوان حالت I یعنی تغییر مکان نزدیک نوک ترک مد I و میدان تنش را به عنوان حالت اضافی انتخاب کنیم داریم:

$$K_I^{(2)} = 1, \quad K_{II}^{(2)} = 0 \quad (29)$$

در این صورت معادله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M^{(1,I)} = \frac{2K_I^{(1)}}{E^*} \quad (30)$$

که از آن ضریب شدت تنش به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$J = \int_A (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (11)$$

$$+ \int_A \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{1j}) q dA$$

که در آن A مساحت داخل کانتور و q تابع وزنی است که مقدار واحد در نوک ترک، مقدار صفر در طول مرز ناحیه  $\Omega$  و مقدار دلخواه در جاهای دیگر دارد. با بسط انتگرال دوم، معادله (۱۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$J = \int_A (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA + \int_A (\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_1} - \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial x_1} \varepsilon_{kl}) q dA \quad (12)$$

با استفاده از شرایط تعادل و سازگاری و یادآوری این نکته که در مواد همگن  $\partial D_{ijkl} / \partial x_1 = 0$ ، انتگرال دوم در معادله (۱۲) حذف شده و معادله به صورت زیر درمی آید:

$$J = \int_A (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (13)$$

که فرم کلاسیک انتگرال J در مواد همگن می‌باشد.

حال دو حالت تعادلی مستقل ماده ترک دار را در نظر می‌گیریم. فرضاً حالت ۱ مربوط به حالت واقعی<sup>۵</sup> برای شرایط مرزی داده شده بوده و حالت ۲ مربوط به یک حالت اضافی<sup>۶</sup> است که می‌تواند میدان تنش و تغییر مکان نزدیک نوک ترک هرکدام از شرایط بارگذاری مد I یا مد II باشد. با استفاده از اصل برهم نهی این دو حالت منجر به یک حالت دیگر (حالت تعادل S) می‌گردد که برای این حالت انتگرال J به صورت زیر می‌باشد:

$$J^{(S)} = \int_A \left[ (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} - W^{(S)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (14)$$

$$W^{(S)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \quad (15)$$

با بسط معادله (۱۴) داریم:

$$J^{(S)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \quad (16)$$

که در آن

$$J^{(1)} = \int_A \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (17)$$

$$J^{(2)} = \int_A \left[ \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - W^{(2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (18)$$

انتگرال J برای حالت‌های ۱ و ۲ بوده و

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{(s)} = & \int_A (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (u_i^{(1)} + u_i^{(2)}) - W^{(s)} \delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA + \\ & \int_A \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} - W^{(s)} \delta_{1j} \right) q dA \end{aligned} \quad (34)$$

به وضوح دیده می‌شود که تخمین  $\tilde{J}^{(s)}$  و انتگرال تقابل حاصل، بستگی به چگونگی تعریف میدان اضافی دارد. گزینه‌های مختلفی برای انتخاب میدان اضافی وجود دارد. یکی از آنها در زیر شرح داده می‌شود.

### میدان اضافی همگن

این روش شامل انتخاب میدانهای تنش و تغییر مکان اضافی مطابق معادلات (5) - (9) و محاسبه میدان کرنش اضافی از گرادیان متقارن میدان تغییر مکان اضافی می‌باشد. در این روش، میدانهای اضافی کرنش و تنش با یک تانسور اساسی ثابت که در نوک ترک تخمین زده می‌شود به هم مربوط می‌شوند. بنابراین در حالت اضافی هم شرایط تعادل و هم شرایط سازگاری ارضا می‌شوند. اگرچه در این حالت رابطه اساسی غیرهمگن در مواد FGM به طور کامل ارضا نمی‌شود و گرادیانهای میدانهای تنش را به عنوان ترم‌های اضافی در انتگرال تقابل وارد می‌کند. با استفاده از معادله (22) و وارد کردن شرایط تعادل و سازگاری معادله (34) را می‌توان به فرم زیر ساده تر کرد:

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{(s)} = & \int_A (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} - \\ & (W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(1,2)}) \delta_{1,j} \frac{\partial q}{\partial x_j} dA + \\ & \int_A \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & -\varepsilon_{ij}^{(1)} \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial x_1} \varepsilon_{kl}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(2)}}{\partial x_1} - \\ & \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_1} \varepsilon_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(1)}}{\partial x_1} - \frac{\sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(2)}}{\partial x_1} \end{aligned} \right] q dA \end{aligned} \quad (35)$$

با بسط معادله (35) داریم:

$$\tilde{J}^{(s)} = \tilde{J}^{(1)} + \tilde{J}^{(2)} + \tilde{M}^{(1,2)} \quad (36)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{(1,2)} = & \int_A \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1,i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \\ & \int_A \frac{1}{2} \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_1} \varepsilon_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(1)}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_1} \varepsilon_{ij}^{(2)} \right] q dA \end{aligned} \quad (37)$$

$$K_I^{(1)} = \frac{M^{(1,2)} E^*}{2} \quad (31)$$

به طور مشابه اگر حالت شماره 2 به عنوان حالت II یعنی تغییر مکان در نزدیکی نوک ترک مد II و میدان تنش به عنوان حالت اضافی در نظر گرفته شود در این صورت  $K_{II}^{(2)} = 1$  ،  $K_I^{(2)} = 0$  بوده و داریم:

$$K_{II}^{(1)} = \frac{M^{(1,II)} E^*}{2} \quad (32)$$

انتگرال تقابل  $M(1,II)$  و  $M(1,I)$  از معادله (17) بدست می‌آید و با استفاده از معادلات (31) و (32) می‌توان ضرایب شدت تنش را تحت شرایط بارگذاری مختلف به دست آورد.

### روش انتگرال تقابل در مواد FGM

در مواد غیرهمگن، اگرچه شرایط تعادل و سازگاری ارضا می‌شوند ولی جمله مربوط به گرادیان مواد در انتگرال دوم معادله (12) صفر نمی‌شود. بنابراین معادله (12) به یک انتگرال با فرم عمومی تر که به انتگرال  $\tilde{J}$  مشهور است تبدیل می‌شود [34].

$$\tilde{J} = \int_A (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA - \int_A \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial x_1} \varepsilon_{kl} q dA \quad (33)$$

با مقایسه معادله (33) و انتگرال J کلاسیک (معادله (13)) دیده می‌شود که وجود غیرهمگنی در مواد باعث اضافه شدن انتگرال دوم می‌گردد. اگرچه این انتگرال برای مسیرهای بسیار نزدیک به نوک ترک قابل نظر کردن است ولی بایستی برای نواحی انتگرالی بزرگتر مدنظر قرار گیرد به نحوی که انتگرال  $\tilde{J}$  به طور دقیقی محاسبه گردد. انتگرال  $\tilde{J}$  همچنین نشان دهنده نرخ آزادسازی انرژی در یک جسم الاستیک می‌باشد زیرا این انتگرال در واقع اولین مولفه بردار انتگرال  $J^* = \{J_1^*, J_2^*\}$  است که توسط اشن [11] پیشنهاد شده است. می‌توان نشان داد که برای هر کانتور بسته ای در یک ماده همگن یا غیرهمگن بدون ترک، انتگرال  $\tilde{J}$  صفر می‌شود و بنابراین وقتی همراه با ترک در مواد FGM مورد استفاده قرار می‌گیرد، مستقل از مسیر باقی می‌ماند [27].

جهت بدست آوردن انتگرال تقابل در مواد FGM، باز هم یک حالت تعادل واقعی و اضافی و حالت تعادل S را در نظر می‌گیریم. برای حالت واقعی، معادله (33) می‌تواند به طور مستقیم برای نشان دادن انتگرال  $\tilde{J}$  مورد استفاده قرار گیرد. برای حالت s انتگرال  $\tilde{J}$  را می‌توان به فرم زیر نوشت:

که در واقع انتگرال تقابل برای مواد غیرهمگن می‌باشد.

### محاسبه ضرایب شدت تنش در صفحات FGM

برای جامدات الاستیک خطی، انتگرال  $\tilde{J}$  همچنین نمایش دهنده نرخ آزاد سازی انرژی می‌باشد بنابراین:

$$\tilde{J} = \frac{1}{E_{tip}^*} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (38)$$

صرفنظر از نحوه تعریف میدان اضافی، با اعمال رابطه (38) برای حالات 1 و 2 و S حاصل می‌شود:

$$\tilde{J}^{(1)} = \frac{1}{E_{tip}^*} (K_I^{(1)2} + K_{II}^{(1)2}) \quad (39)$$

$$\tilde{J}^{(2)} = \frac{1}{E_{tip}^*} (K_I^{(2)2} + K_{II}^{(2)2}) \quad (40)$$

$$\tilde{J}^{(S)} = \tilde{J}^{(1)} + \tilde{J}^{(2)} + \frac{2}{E_{tip}^*} (k_I^{(1)} k_I^{(2)} + k_{II}^{(1)} k_{II}^{(2)}) \quad (41)$$

با مقایسه معادلات (36) و (41) بدست می‌آید:

$$\tilde{M}^{(1,2)} = \frac{2}{E_{tip}^*} (k_I^{(1)} k_{II}^{(2)} + k_{II}^{(1)} k_I^{(2)}) \quad (42)$$

با دنبال کردن فرآیندی مشابه قبل، ضرایب شدت تنش برای مواد غیرهمگن را می‌توان به فرم زیر بدست آورد:

$$K_I^{(1)} = \frac{\tilde{M}^{(1,I)} E_{tip}^*}{2}$$

$$K_{II}^{(1)} = \frac{\tilde{M}^{(1,II)} E_{tip}^*}{2} \quad (43)$$

که در آن  $\tilde{M}^{(1,I)}$ ،  $\tilde{M}^{(1,II)}$  دو انتگرال تقابل اصلاح شده برای شرایط بارگذاری مد I، II هستند و می‌توانند با استفاده از معادله (37) تخمین زده شوند.

برخلاف روشهای موجود مانند روش انتگرال  $J_k^*$  [5]

دیگر برای محاسبه  $J_2^*$  نیازی به انتگرال گیری در طول وجه ترک نمی‌باشد، بنابراین روش ارائه شده حاضر بسیار ساده تر از روش انتگرال  $J_k^*$  می‌باشد. توجه شود هنگامی که هر دو مدول الاستیسیته و ضریب پواسون تغییرات مکانی نداشته باشند،  $M^{(1,2)} = \tilde{M}^{(1,2)}$  خواهد شد و ضرایب شدت تنش با حالت قبل یکسان خواهد شد.

### روش بدون المان گلرکین

فرض کنید که  $\Omega_k$  دامنه درونیابی تابع  $u(x)$  بوده

و  $S_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) مجموعه‌ای متشکل از  $n$  نقطه با مختصات  $x_j \in \Omega_k$  باشد. مقدار تابع مجهول  $u$  با استفاده از  $m$  تابع پایه  $p(x)$  بصورت زیر قابل تقریب می‌باشد:

$$u(x) \cong \hat{u}(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \alpha_i(x) = P^T(x) a(x) \quad (44)$$

که در آن،  $\hat{u}(x)$  مقدار تقریبی تابع در  $x$ ،  $a = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T$  بردار ضرایب مجهول و بردار  $P(x)$  شامل توابع پایه می‌باشد. توابع پایه خطی و درجه دو به ترتیب عبارتند از:

$$m = 3: P^T = [1, x, y], 2D \quad (45)$$

$$m = 6: P^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2], 2D \quad (46)$$

در حل مسائل مکانیک شکست، یک راه حل معمول برای غلبه بر تکنیکی تنش، استفاده از پایه‌ای به فرم زیر است: [30 و 25]

$$P^T(x) = \{1, x, y, \sqrt{r} \cos(\theta/2), \sqrt{r} \sin(\theta/2), \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta)\} \quad (47)$$

که در آن  $r, \theta$  مختصات قطبی با مرکز نوک ترک هستند. در معادله (42) ضرایب بردار  $a(x)$  را با کمینه سازی نرم وزنی آن به فرم زیر بدست می‌آوریم:

$$J(x) = \sum_{I=1}^n w_I(x) [P^T(x_I) a(x) - d_I]^2 = \quad (48)$$

$$[Pa(x) - d]^T W [Pa(x) - d]$$

که در آن  $d^T = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  پارامتر گره‌ای مربوط به گره I بوده و  $W = \text{diag}[w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)]$  و  $w_1(x)$  تابع وزنی مربوط به گره I به گونه‌ای است که برای تمام  $x$  های داخل ناحیه تاثیر تابع وزنی مثبت و در جاهای دیگر برابر صفر است. در این تحقیق از تابع وزنی پیشنهاد شده توسط رائو و رحمان [25] استفاده شده است:

$$w_I(x) = \begin{cases} \frac{(1 + \beta^2 \frac{Z_I^2}{Z_{ml}^2})^{-(1+\beta)/2} - (1 + \beta^2)^{-(1+\beta)/2}}{Z_{ml}^2} & Z_I \leq Z_{ml} \\ 0 & Z_I > Z_{ml} \end{cases} \quad (49)$$

که در آن  $\beta$  پارامتری است که شکل تابع وزنی را کنترل می‌کند و  $Z_I = \|x - x_I\|$  فاصله هر نقطه  $x$  تا گره  $x_I$  و  $Z_{ml}$  فاصله تأثیر گره I می‌باشد. با مشتق گیری از  $J(x)$  نسبت به  $a(x)$  داریم:

$$A(x) a(x) = C(x) d \quad (50)$$

$$\int_{\Omega} \sigma^T \delta_s d\Omega - \int_{\Omega} b^T \delta u d\Omega - \int_{\Omega} \bar{t}^T \delta u d\Gamma + \sum_{x_k \in \Gamma_u} f^T(x_k) \delta u(x_k) \quad \text{که در آن:}$$

$$+ \sum_{x_k \in \Gamma_u} \delta f^T(x_k) [u(x_k) - \bar{u}(x_k)] = 0 \quad (57)$$

که در آن  $f^T(x_k)$  بردار نیروهای عکس العمل در گره  $k$  روی  $\Gamma_u$  بوده و  $\delta$  اپراتور واریاسیون می باشد. تقریب کمترین مربعات متحرک مربوط به صورت زیر است:

$$u^h(x) = \phi^T d, \quad (58)$$

که در آن

$$\Phi^T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & 0 & \phi_2(x) & 0 & \dots & \phi_N(x) & 0 \\ 0 & \phi_1(x) & 0 & \phi_2(x) & \dots & 0 & \phi_N(x) \end{bmatrix} \quad (59)$$

و  $d$  بردار پارامترهای گره ای یا تغییر مکانهای کلی است و  $N$  کل تعداد گره های موجود در ناحیه  $\Omega$  می باشد. با اعمال معادلات (58) و (59) به معادله گسسته (57) داریم:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ f_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{ext} \\ g \end{Bmatrix} \quad (60)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \in L(R^{2N} \times R^{2N}) \quad (61)$$

$$d = \{d_1^1, d_1^2, d_2^1, d_2^2, \dots, d_N^1, d_N^2\}^T \quad (62)$$

$K$  ماتریس سختی با مولفه های زیر است:

$$k_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega \quad (63)$$

$$G^T = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & 0 & \phi_1(x_2) & 0 & \dots & \phi_1(x_N) & 0 \\ 0 & \phi_1(x_1) & 0 & \phi_1(x_2) & \dots & 0 & \phi_1(x_N) \\ \phi_2(x_1) & 0 & \phi_2(x_2) & 0 & \dots & \phi_2(x_N) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_L(x_1) & 0 & \phi_L(x_2) & 0 & \dots & \phi_L(x_N) & 0 \\ 0 & \phi_L(x_1) & 0 & \phi_L(x_2) & \dots & 0 & \phi_L(x_N) \end{bmatrix} \quad (64)$$

و  $G^T$  ماتریس شامل توابع شکل گره هایی است که در آنها شرایط مرزی تغییر مکان مشخص است و  $L$  تعداد کل گره های روی ناحیه  $\Gamma_u$  می باشد و

$$f^R = \{f(x_{k_1}), f(x_{k_2}), \dots, f(x_{k_L})\} \quad (65)$$

که بردار نیروهای عکس العمل روی  $\Gamma_u$  است. بردار نیروها:

$$f^{ext} = \int_{\Omega} \phi^T b d\Omega + \int_{\Gamma-T} \phi^T \bar{t} d\Gamma \quad (66)$$

و

$$g = \{\bar{u}(x_{k_1}), \bar{u}(x_{k_2}), \dots, \bar{u}(x_{k_L})\}^T \in R^{2L} \quad (67)$$

$$A(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) p(x_i) P^T(x_i) = P^T W P \quad (51)$$

$$C(x) = [w_1(x) p(x_1), \dots, w_n(x) p(x_n)] = P^T W \quad (52)$$

با بدست آوردن  $a(x)$  از معادله (50) و جایگذاری آن در معادله (44) داریم:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) d_i = \phi^T(x) d \quad (53)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \phi^T(x) &= \{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\} \\ &= P^T(x) A^{-1}(x) C(x) \end{aligned} \quad (54)$$

برداری با مولفه  $\bar{a}$  م به صورت زیر است:

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) [A^{-1}(x) C(x)]_{ji} \quad (55)$$

که نمایانگر تابع شکل تقریب کمترین مربعات متحرک<sup>۶</sup> مربوط به گره  $I$  می باشد. از آنجا که تابع شکل بدون شبکه بسیار وابسته به نوع تابع پایه بکار رفته است، در مسائل شامل ترک، تابع پایه غنی شده ای همانند معادله (47) برای اعمال تکنیکی تنش در نوک ترک مورد نیاز است.

## گسسته سازی و فرمول بندی واریاسیون

### الف- مواد همگن

برای تغییر مکان های کوچک در مواد ایزوتروپیک و خطی الاستیک در حالت دو بعدی، معادله تعادل و شرایط مرزی به صورت زیر می باشند:

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad (56)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{On } \Gamma_t \quad (\text{شرایط مرزی طبیعی})$$

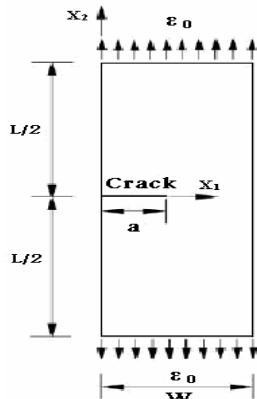
$$u = \bar{u} \quad \text{On } \Gamma_u \quad (\text{شرایط مرزی اساسی})$$

که در آن  $\sigma = D(x) \varepsilon$  بردار تنش و  $D(x)$  نیز ماتریس خواص ماده بوده و  $\varepsilon = \nabla_s u$  بردار کرنش و  $u$  بردار تغییر مکان،  $b$  بردار نیروی حجمی،  $\bar{t}, \bar{u}$  بردارهای تغییر مکان و کشش سطحی از پیش معین و  $n$  بردار واحد عمود بر ناحیه  $\Gamma_u, \Gamma_t, \Omega$  بخشهایی از مرز  $\Gamma$  هستند که در آنها تغییر مکان و کشش سطحی تعیین شده است و  $\nabla_s u$  قسمت متقارن  $\nabla u$  می باشد. واریاسیون یا فرم ضعیف معادله (56) به صورت زیر خواهد بود:

هستند که تغییرات مدول الاستیسیته را نشان می دهند. مقادیر عددی زیر مورد استفاده قرار گرفته اند:

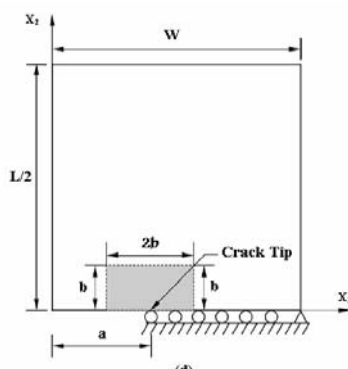
$$E_1 = 1, E_2/E_1 = \exp(\eta) = 0.1, 0.2, 5, 10 \quad (7.0)$$

$$a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 \quad (7.1)$$



شکل ۲: صفحه با ترک لبه ای مد I تحت بارگذاری با لبه ثابت.

ضریب پواسون برابر  $\nu = 0.3$  و فرض کرنش صفحه ای مورد استفاده قرار گرفته است. صفحه ای با ترک لبه ای به طول  $L=8$  واحد، و  $w=1$  و طول ترک  $a$  مطابق شکل‌های (۲) و (۵) مفروض است. به علت وجود تقارن هندسی و تقارن بارگذاری فقط نصف صفحه همانطور که در شکل (۴) دیده می شود به روش بدون المان گلرکین تحلیل شده است. مدل بدون المان گلرکین شامل ۳۶۸ گره می باشد که تعداد ۳۴۱ گره به طور معمول و ۲۷ گره نیز در سه طوق حول نوک ترک پخش شده اند.



شکل ۳: شکل نصف صفحه و ناحیه مستطیلی مورد استفاده برای محاسبه انتگرال تقابل.

یک نمونه از اشکال پخش گره ای که در آن  $a/w=0.5$  است به همراه یک نمای بزرگ شده از پخش گره ها در سه طوق حول نوک ترک در شکل (۴) نشان داده شده است. کل ناحیه صفحه با استفاده از  $30 \times 10$  المان مستطیلی با گره هایی منطبق بر ۳۴۱ گره بدون شبکه تقسیم بندی شده است

بردار تغییر مکان های معین در  $\Gamma_{II}$  است. برای انتگرال گیری عددی در معادلات (۶۳) و (۶۶) یک شبکه زمینه<sup>۸</sup> مورد نیاز است که می تواند مستقل از آرایش گره های بدون شبکه باشد.

## ب- مواد FGM

در مواد FGM، ماتریس الاستیک  $D(x)$  وابسته مکانی است زیرا  $E(x)$ ،  $\nu(x)$  تابعی از مکان می باشند. دو روش عمده برای اعمال اثرات گرادین خواص مواد در ماتریس  $K$  وجود دارد. در روش اول، توابع شکل بدون شبکه و مقادیر گره ای خواص مواد می توانند مقادیر خواص مواد در نقاط گوسی را تخمین بزنند. در روش دوم مقادیر خواص مواد در نقاط گوسی را می توان به طور مستقیم با استفاده از معادلات زیر تخمین زد:

$$E = E(x_1, x_2) = E(x), \quad (6.8)$$

$$\nu = \nu(x_1, x_2) = \nu(x)$$

به طور کلی یک روش گوس مربعی  $6 \times 4$  کافی است مگر در المانهایی که یک گرادین تنش زیاد را احاطه می کنند که می توان از روش مربعی  $8 \times 8$  استفاده نمود. برای بدست آوردن بردار  $d$  بایستی شرایط مرزی اساسی اعمال شود. به علت عدم ارضای شرط دلتای کرانکر در توابع شکل بدون شبکه، مشکلاتی در اعمال این شرایط در روش بدون شبکه گلرکین به وجود می آید. در هر صورت روشهای مختلفی برای اعمال این شرایط وجود دارد. در این مطالعه از روش ضرایب لاگرانژ استفاده شده است.

## مسائل حل شده و نتایج حاصله

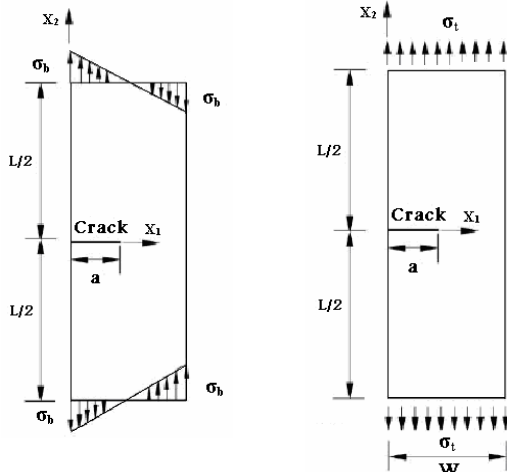
فرض می کنیم که مدول الاستیسیته با مکان تغییر می کند ولی نسبت پواسون ثابت نگه داشته می شود. این فرض، معقول و منطقی است زیرا تغییرات نسبت پواسون در مقایسه با مدول الاستیسیته بسیار ناچیز است. مقادیر  $\lambda = 1$ ،  $\beta = 4$  در تمامی مثالها در تحلیل بدون شبکه مورد استفاده قرار گرفته است. برای انتگرال گیری عددی از روش گوس مربعی  $8 \times 8$  استفاده شده است. تابع وزنی مورد استفاده مطابق معادله (۴۹) است. فرض می شود که مدول الاستیسیته رابطه ای به شرح ذیل را دارا می باشد:

$$E(x_1) = E_1 \exp(\eta x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq w \quad (6.9)$$

که در آن  $E_1 = E(0)$ ،  $E_2 = E(w)$  و  $\eta = \ln(E_2/E_1)$  می باشد. در معادله (۶۹)،  $E_1$  و  $\eta$  دو پارامتر مستقل ماده



و دقت حل از روش اجزاء محدود قوی تر می باشد ولی سرعت حل آن پایین تر است. از محاسن دیگر این روش عدم نیاز به مش بندی می باشد و در نواحی که دقت بیشتری مد نظر است، می توان به راحتی تعداد گره ها را زیادتر کرد؛ همچنین این روش در مقایسه با روش اجزاء محدود از حساسیت کمتری نسبت به تعداد گره ها برخوردار است. همانطور که گفته شد، گرادانها در این روش از دقت بیشتری برخوردار می باشند. با گسترش دادن روش بدون شبکه گلرکین و افزایش سرعت آن میتوان این روش را به عنوان جایگزین بسیار خوبی برای روش المان محدود و روش المان مرزی مطرح نمود، علی الخصوص در مورد مدلسازی رشد ترک شبه استاتیکی و دینامیکی در دو یا سه بعد.

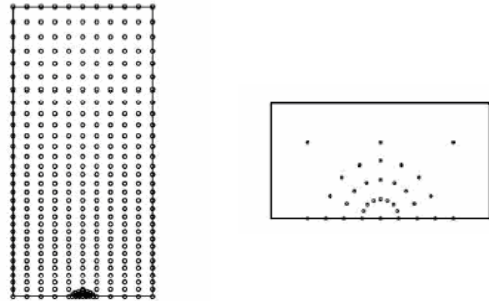


شکل ۵: صفحه با ترک لبه ای مد I تحت بارگذاری تنش ثابت و تنش خطی.

که فقط برای انتگرال گیری عددی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. ناحیه ای به اندازه  $2b \times b$  (واحد  $b=0.1$ ) نیز مطابق شکل (۳) برای محاسبه انتگرال تقابل  $\tilde{M}^{(1,2)}$  مورد استفاده قرار گرفته است. در جداول شماره (۱) تا (۳) مقادیر ضرایب بی بعد شده  $\frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}$  و  $\frac{K_{II}}{\sigma_t \sqrt{\pi a}}$  به ترتیب برای حالت های مختلف بارگذاری با لبه ثابت (fixed grip)، تنش ثابت و تنش خطی ارائه شده است که در آنها:

$$\sigma_0 = E_1 \frac{\varepsilon_0}{(1-\nu^2)}, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \sigma_t = \sigma_b = 1 \quad (72)$$

و نتایج به دست آمده با نتایج تحلیل ارائه شده توسط اردوگان و وو [۳۵] و چن و همکاران [۳۶] و کیم و پائولینو [۱۸] مقایسه شده است.



شکل ۴: یک نمونه از اشکال پخش گره ای و غنی سازی بکاررفته در نوک ترک.

### نتیجه گیری

چند مساله دو بعدی مد I در مواد FGM برای محاسبه ضرایب شدت تنش با استفاده از روش انتگرال تقابل حل شده است. مقایسه بین نتایج حاصل و نتایج ارائه شده در تحقیقات مشابه، دقت خوب و همگرایی قابل قبولی را نشان می دهد. روش بدون شبکه گلرکین از لحاظ انعطاف پذیری

جدول ۱: ضرایب شدت تنش نرمال شده برای مد I در حالت بارگذاری با لبه ثابت.

method	$E_2/E_1$	$KI/(\sigma_0 \sqrt{\pi a})$				
		$a/W = 0.2$	$a/W = 0.3$	$a/W = 0.4$	$a/W = 0.5$	$a/W = 0.6$
Chen et al [۳۶]	0.1	1.2961	1.4919	1.7962	2.2594	3.0544
	0.2	1.3145	1.5283	1.8659	2.3877	3.2910
	5	1.5414	1.9499	2.6238	3.7429	5.7936
	10	1.6296	2.1206	2.9398	4.3272	6.9171
Erdogan & Wu [۳۵]	0.1	1.2963	1.5083	1.8246	2.3140	3.1544
	0.2	1.3058	1.5330	1.8751	2.4031	3.2981
	5	1.4946	1.9118	2.5730	3.6573	5.5704
	10	1.5740	2.0723	2.8736	4.2140	6.6319
Proposed Method	0.1	1.2960	1.4837	1.7820	2.2321	3.0044
	0.2	1.3189	1.5260	1.8613	2.3800	3.2875
	5	1.5648	1.9690	2.6492	3.7857	5.9052
	10	1.6574	2.1448	2.9729	4.3838	7.0597

جدول ۲: ضرایب شدت تنش نرمال شده برای مد I در حالت بارگذاری تنش ثابت.

method	$E_2/E_1$	$K_I/(\sigma_t\sqrt{\pi a})$				
		$a/W = 0.2$	$a/W = 0.3$	$a/W = 0.4$	$a/W = 0.5$	$a/W = 0.6$
Kim & Paulino [۱۸]	0.1	1.2840	1.8460	2.5440	3.4960	4.9620
	0.2	1.3900	1.8310	2.4310	3.2920	4.6690
	5	1.1320	1.3700	1.7490	2.3660	3.4480
	10	1.0030	1.2280	1.5880	2.1750	3.2120
Erdogan& Wu [۳۵]	0.1	1.2965	1.8581	2.5699	3.5701	5.1880
	0.2	1.3956	1.8395	2.4436	3.3266	4.7614
	5	1.1318	1.3697	1.7483	2.3656	3.4454
	10	1.0019	1.2291	1.5884	2.1762	3.2124
Proposed Method	0.1	1.2681	1.8359	2.5304	3.4629	4.8498
	0.2	1.3785	1.8219	2.4209	3.2700	4.5992
	5	1.1220	1.3635	1.7407	2.3506	3.4070
	10	0.9936	1.2203	1.5790	2.1585	3.1702

جدول ۳: ضرایب شدت تنش نرمال شده برای مد I در حالت بارگذاری تنش خطی.

method	$E_2/E_1$	$K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi a})$				
		$a/W = 0.2$	$a/W = 0.3$	$a/W = 0.4$	$a/W = 0.5$	$a/W = 0.6$
Kim and Paulino [۱۸]	0.1	1.8880	1.8640	1.9430	2.1450	2.5530
	0.2	1.5880	1.6010	1.7060	1.9250	2.3410
	5	0.6870	0.7780	0.9240	1.1580	1.5610
	10	0.5650	0.6590	0.8040	1.0350	1.4290
Erdogan& Wu[۳۵]	0.1	1.9040	1.8859	1.9778	2.2151	2.7170
	0.2	1.5952	1.6122	1.7210	1.9534	2.4037
	5	0.6871	0.7778	0.9236	1.1518	1.5597
	10	0.5648	0.6588	0.8043	1.0350	1.4286
Proposed Method	0.1	1.8800	1.8531	1.9256	2.1100	2.4710
	0.2	1.5844	1.5954	1.6985	1.9108	2.3097
	5	0.6870	0.7781	0.9242	1.1611	1.5617
	10	0.5651	0.6591	0.8039	1.0350	1.4292

## مراجع

- 1 - Koizumi, M. (1993). "The concept of FGM." *Ceram Trans Func Grad Mater*, Vol. 34, PP. 3–10.
- 2 - Gibson, R E. (1993). "Some results concerning displacements and stresses in a nonhomogeneous elastic half space." *J. Mater. Sci. Lett.*, Vol. 12, No. 5, PP. 326–335.
- 3 - Allahverdizadeh A, Naei, M. H. and Nikkhah Bahrami, M. (2008). "Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 310, PP. 966-984.
- 4 - Allahverdizadeh A, Naei, M. H. and Nikkhah Bahrami, M. (2008). "Vibration amplitude and thermal effects on the nonlinear behavior of thin circular functionally graded plates." *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, No.3, PP. 445-454.
- 5 - Ebrahimi, F. Rastgoo, A. Kargarnovin, M. H. (2008). "Nonlinear free vibration analysis of smart functionally graded circular plates integrated with piezoelectric layers". Accepted to be published in the Journal of Mechanical Science and Technology, Mar. 2008, Doi: 10.1007/s12203-008-0303-2
- 6 - Ebrahimi, F. Rastgoo, A. (2008). "Free vibration analysis of smart annular FGM plates integrated with piezoelectric layers." *Smart Materials and Structures*, Vol.17, No. 015044. PP. 1-13

- 
- 7 - Ebrahimi, F. Rastgoo, A. (2008). "An analytical study on the free vibration of smart circular thin FGM plate based on classical plate theory", Accepted to be published in *Thin-Walled Structures*, Mar. 2008. Doi: 10.1016/j.tws.2008.03.008.
- 8 - Atkinson C, List R. D. (1978). "Steady state crack propagation into media with spatially varying elastic properties". *Int. J. Eng. Sci.*, Vol.16, PP.717–30.
- 9 - Dhaliwal, R S. and Singh, B. M. (1978). "On the theory of elasticity of a nonhomogeneous medium." *Int. J. elasticity*, Vol.8, PP.211–219.
- 10 - Delale, F. and Erdogan, F. (1983). "The crack problem for a nonhomogeneous plane." *J Appl Mech.*, Vol. 50, PP.609–614.
- 11 - Eischen, J. W. (1987). "Fracture of nonhomogeneous materials." *Int. J. Fract.*, Vol. 34 ,PP.3–22.
- 12 - Jin, Z. H. and Noda, N. (1994). "Crack tip singular fields in nonhomogeneous materials." *J. Appl. Mech.* Vol.61, PP.738–740.
- 13 - Jin, Z. H. and Noda, N. (1993). "An internal crack parallel to the boundary of a nonhomogeneous half plane under thermal loading." *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 31, PP.793–806.
- 14 - Erdogan, F. and Wu, B. H. (1993) "Analysis of FGM specimens for fracture toughness testing. In: Proceedings of the Second International Symposium on Functionally Graded Materials." *Ceramic Transactions*, Vol. 34. PP. 39–46.
- 15 - Gu, P. and Asaro, R. J. (1997). "Cracks in functionally graded materials." *Int. J. Solids. Struct.*, Vol. 34, PP. 1–17.
- 16 - Erdogan, F. (1995). "Fracture mechanics of functionally graded materials." *Compos. Eng.*, Vol.5, No.7, PP.753–70.
- 17 - Gu, P., Dao. M. and Asaro, R. J. (1999). "A simplified method for calculating the crack tip field of functionally graded materials using the domain integral." *J. Appl. Mech.*, Vol.66, PP.101–8.
- 18 - Kim, J. H. Paulino, G. H. (2002). "Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials." *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol., No. 8, PP. 1903–1935.
- 19 - Zou, Z. Z. Wu, S. X. and Li, C. Y. (2000). "On the multiple isoparametric finite element method and computation of stress intensity factor for cracks in FGMs." *Key. Eng. Mater.*, Vol. 53, No. 8, PP.1903-35.
- 20 - Yau, J. F. (1980). "A mixed - mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity." *J. Appl. Mech.. Trans. ASME* , Vol.47, No.2, PP. 335-341.
- 21 - Wang, S. S. et al. (1980). "Mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity." *Int. J. Fract.*, Vol. 16, No. 3, PP.247-259.
- 22 - Yau, J. F. (1979). *Mixed- mode fracture analysis using a conservation integral*, PhD thesis, Dept. of Theoretical and applied Mechanics, University of Illinois.
- 23 - Dolbow, J. Gosz, M. (2002). "On the computation of mixed- mode SIFs in FGM." *Int. J. Solids Structure.*, Vol.39, PP. 2557-2574
- 24 - Kim, J. H. G. and Paulino, H. (2003). "An accurate scheme for mixed mode fracture analysis of FGM using the interaction & micromechanics models." *Int J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 58, No. 10 , PP. 1457-1497
- 25 - Rao, B. N. and Rahman, S. (2000). "An efficient meshless method for fracture analysis of cracks." *Comput Mech.*, Vol.26, PP.398–408.
-

- 
- 26 - Belytschko, T. Lu, Y. Y. and Gu, L. (1995). "Crack propagation by element-free Galerkin methods." *Eng. Fract. Mech.*, Vol.51, No.2, PP.295–315.
- 27 - Sukumar, N. Moran, B. and Belytschko, T. (1998). "The natural element method in solid mechanics." *Int. J. Numer. Mech. Eng.*, Vol.43, PP.839-87.
- 28 - Kaljevic, I. and Saigal, S. (1997). "An improved element free Galerkin formulation." *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 40, PP.2953–74.
- 29 - Belytschko, T. and Tabbara, M. (1996). "Dynamic fracture using element-free Galerkin methods." *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 39, PP.923–938.
- 30 - Fleming, M. Chu, Y. A. Moran, B. Belytschko, T. Lu. Y. Y. and Gu, L. (1997). "Enriched element-free Galerkin methods for crack-tip fields." *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.40, PP.1483–1504.
- 31 - Belytschko, T. Krongauz, Y. Organ, D. Fleming, M. and Krysl, P. (1996). "Meshless methods: An overview and recent developments." *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.139, PP. 3-47.
- 32 - Rice, J. R. (1968). "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks." *J. of Applied Mechanics*, Vol.35, PP.379- 86.
- 33 - Moran, B. and shih, F. (1987) "Crack tip and associated domain integrals from momentum and Energy balance." *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 27, PP.615-42
- 34 - GU, P. and Dao, M. (1999). "A simplified method for calculating the crack tip field of functionally graded materials using domain integral." *J. Appl. Mech.*, Vol. 66, PP. 101-8
- 35 - Erdogan, F. and Wu, B. H. (1997). "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties." *J Appl. Mech.*, Vol. 64, PP. 449–456.
- 36 - Chen, J., Wu, L. and Du, S. (2000). "Element free Galerkin methods for fracture of functionally graded materials." *Key Eng. Mater.*, Vol.183, PP.487–492.

## واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Element Free Galerkin Method
  - 2 - Interaction Integral
  - 3 - Equivalent domain integral technique
  - 4 - Airy stress function
  - 5 - Actual state
  - 6 - Auxiliary state
  - 7 - Mean least square
  - 8 - Back ground Mesh
-