بازتاب و شکست موج SH در مرز ناهموار بین دو محیط ایزوتروپ جانبی

نوید شاد منامن [۱] و مرتضی اسکندری قادی [*۲]

[۱] دانشجوی دوره دکتری مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران

[۲] استادیار گروه علوم پایه مهندسی - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ۸۵/۳/۷ , تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۷/۲/۸ , تاريخ تصويب ۸۷/۵/۱)

چکیده

بيشتر تئوري هاي موجود در انتشار امواج الاستيك مستقيماً براي محيط هاي واقعي درون زمين قابل كاربرد نيستند، چرا كه در اين تئوري ها، مرزها يا فصل مشترك بين لايه‌ها تخت و موازي فرض شده‌اند. اهميت بررسي انتشار امواج الاستيك در مرزهاي ناهموار از آن جا ناشي مي‌شود كه بيشتر فصل مشترك ها در لايه‌هاي زمين داراي انحنا هستند. در اين مقاله، با استفاده از روش تقريب رايلي بازتاب و شكست موج تخت SH در فصل مشترك موجدار بين دو نيم فضاي ايزوتروپ جانبي مورد بررسي قرار مي‌گيرد. تموج فصل مشترك باعث مي‌شود كه علاوه بر امواج بازتابي و انكساري معمول، بخشي از انرژي موج SH ورودي در عبور از فصل مشترك ناهموار به يك سري امواج بازتابي و انكساري پراشي تبديل گردد. فرمول بندي و محاسبات عددي نشان مي‌دهند كه دامنه اين امواج تابعي از زاويه تابش، فركانس موج ورودي، تموج مرز و خواص ارتجاعي نيم فضاها است. نتايج تحليلي اين مقاله براي حالت ساده‌تر يعني ايزوتروپ بر نتايج آسانو (۱۹۶۰) كاملاً منطبق بوده و به منظور كنترل محاسبات عددي نتايج اين مقاله براي حالت ايزوتروپ با نتايج آسانو (۱۹۶۰) مقايسه شده است.

واژه های کلیدی : موج SH - بازتاب - شکست - پراش - تموج فصل مشترک - روش رایلی

مقدمه

امواج الاستيك حاوي اطلاعات زيادي درباره محيطي كه از آن عبور مي‌كنند، هستند. به ويژه اين كه عبور امواج لرزه‌اي از درون زمين در اكتشاف مواد پنهان با ارزش و نيز آگاهي از ساختار دروني زمين بسيار مفيد است. از اين رو، مطالعه انتشار امواج الاستيك و بازتاب و شكست آنها از مرزهاي مختلف از اهميت به سزايي، به ويژه در زمينه‌هاي مهندسي، ژئوفيزيك و زلزله‌شناسي برخوردار است. به همين دليل، مسائل متعدي در اين ارتباط توسط پژوهشگران بسياري مطرح شده است كه از جمله آنها مي‌توان به اوينگ و همكاران [۱]، اكي و ريچاردز [۲]، شريف و گلدارت [۳]، لي و والاس [۴] و اوديساس [۵] اشاره كرد.

وجود ناپيوستگي در رفتار محيط الاستيك باعث بازتاب و شكست امواج مي‌شود و اين امواج بازتابيده و انكساري علاوه بر ويژگي هاي محيط، به هندسه فصل مشترك (ناپيوستگي) و فركانس امواج ورودي نيز بستگي دارند. تحقيقات اخير در زمينه انعكاس و انكسار امواج از فصل مشترک دو محيط به چادهاري و همكاران [۶]، تومار و گارگ [۷] و سينگ و تومار [۸] مربوط مي‌شود. چادهاري و همكاران [۶] مسئله انكسار موج تخت SH از صفحات مسلح به تقويتي را بررسي كردند. در اين بررسي صفحات مسلح قابل جايگزيني با محيط ايزوتروپ جانبي هستند. تومار و گارگ [۷] انعكاس و انكسار امواج از فصل مشترک دو نيم فضايي كه هر يک شامل موادي هستند كه اصطلاحا جامد كشسان در مقياس ميكرو [۱] ناميده مي‌شوند را بررسي كرده‌اند. در اين مواد ذرات بزرگتر از نقاط رياضي بوده و وضعيت آنها در هر لحظه از زمان با بردارهاي تغيير مكان و چرخش و كشيدگي يا فشردگي آن بيان مي‌شوند. سينگ و تومار [۸] انعكاس و انكسار امواج عرضي از فصل مشترک دو نيم فضاهاي متشكل از جامد متخلخل را بررسي كرده‌اند.

ناپيوستگي‌هاي موجود در فصل مشترك لايه‌هاي زمين هميشه تخت نيستند و در نتيجه جايگزيني آن ها با سطح تخت با تقريب همراه مي باشد. در واقع، اين ناپيوستگي‌ها معمولاً ناصاف و يا موج‌دار بوده و طبيعت ناهموار آنها، بازتاب و شكست امواج الاستيك را تحت تاثير قرار مي‌دهد. به عبارت ديگر، هنگامي كه امواج حجمي به سطح آزاد غير تخت مي‌رسند، ناهمواري هاي سطح باعث ايجاد پراش مي‌شوند.

* نويسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۱۷۱ , فاكس : ۶۶۴۶۹۸۰۹ , Email: ghadi@ut.ac.ir

در فرايند گسترش تئوري انتشار امـواج و روش هـاي به كار رفته در محيط هاي با مرز ناهموار همانند مرزهـاي زميـن‌شنـاسي تعريف مشـخصي از ناهمـواري ضـروري مي باشد كه به طور كلي آنها را مي‌توان به سه دسـته زيـر تقسيم نمود:

- لايه نازك با ضخامت متغير؛ هر قطعـه‌ايـي از چنـين لايه‌اي ويژگي هاي فركانسي خاص خود را دارد.
- مرز تيز نابرابر؛ در قطعات مختلف اين گونـه از مرزهـا امپدانـس صـوتي بـا حالـت هـاي گونـاگون و بـا ضخامت هاي متفاوت تغيير مي‌كند.
- مرز ناهموار؛ داراي برآمدگي‌هـا و فرورفتگـي‌هـا و يـا ناصافي هاي دلخواه است. براي نمونه مـرز سينوسـي اين گونه است.

در اين مقاله مرز نوع سوم يعني مـرز نـاهموار مـورد توجه قرار مي گيرد. چنين مرزهايي در مقايسه با مرزهـاي تيز به مرزهاي زمين‌شناسي واقعي شبيه‌تر هستند هر چند كه مدل مرزهاي تيز اغلب مبناي مطالعات در زمينه انتشار امواج بوده‌اند [۹].

امواج لرزه‌اي ناشي از زمين لرزه‌ها در مسير خـود بـا حوزه‌هاي كوهستاني و ريشـه كـوه هـا مواجـه مـي‌شـوند، بنابراين اين ناهمواري ها بر بازتاب و عبور امواج الاسـتيك از محيط تأثير مي‌گذارند. از اين رو، مطالعـه ويژگـي هـاي ديناميكي امواج بازتابيده و انكسـاري از سـطوح نـاهموار از اهميت كاربردي زيادي برخوردار مي باشد. چون حل ايـن گونه مسائل داراي پيچيـدگي‌هـاي رياضـي قابـل تـوجهي است، لذا جواب هاي دقيقي براي آنها تاكنون پيـدا نشـده اسـت. بـا ايـن حـال، روشـهاي تقريبـي بـراي محاسـبه ميدان هاي تنش و تغيير مكان ناشي از پـراش در سـطوح ناهموار ارائه شده است [۱۰].

نخستين بار، لرد رايلي [۱۱] بازتاب و شكست امـواج نور و صوت از سـطوح نـاهموار را مـورد بررسـي قـرار داد. بررسي‌هاي رايلي در سـاير رشـته‌هـاي مـرتبط بـا تئـوري انتشار امواج نيز مورد كاربرد وسيعي واقع گرديد. در روش رايلي معادله مرز موج‌دار و در نتيجه شرايط مرزي در مـرز موج‌دار با سريهاي فوريه بيان مي‌شوند و ضـرايب مجهـول در ايـن روش بـراي هـر درجـه‌اي از تقريـب برحسـب مشخصات مرز تعيين مـي گردنـد. آسـانو [۱۲، ۱۳ و ۱۴] بازتاب و شكسـت امـواج الاسـتيك در مـرز مـوج‌دار را بـا استفاده از روش رايلي مورد مطالعه قرار داد. ابوـاكر [۱۵]، دونكين و ارينگن [۱۶] از تكنيـك آشـفتگي رايـس [۱۷] جهت بررسي بازتاب و شكست امواج الاسـتيك در سـطوح ناهموار استفاده كردند كه پس از آن، مطالعات گسـترده‌اي در زمينـه بازتـاب و شكسـت امـواج الاسـتيك، از جملـه امواج SH در فصل مشترك موج‌دار بـين دو نـيم فضـاي ارتجاعي صورت گرفته است.

در اين مقاله، بازتاب و شكست امـواج SH در فصـل مشترك موجدار بين دو نيم فضـاي ارتجـاعي هـر يـك بـا رفتار ايزوتروپ جانبي مورد بررسي قرار مي‌گيرد. در واقـع، اين تحقيق در ادامه كارهاي صورت گرفته در ايـن زمينـه، به ويژه توسط آسانو [۱۲] و تومار و سايني [۱۸] و تومار و همكـاران [۱۹] اسـت، بـا ايـن تفـاوت كـه معادلـه فصـل مشترك موج‌دار براي مرتبه‌هاي بالاتري از بسط فوريه نيـز گسترش داده مي‌شود. از روش تقريب رايلـي جهـت پيـدا كردن ضرايب بازتـاب و عبـور بـراي تقريـب درجـه اول از تموج فصل مشترك استفاده گرديـده اسـت. لازم بـه ذكـر است كه تومار و همكاران [۱۹] فرمولاسـيون مسـئله را بـا بسط فصل مشترک دو محيط به صـورت فوريـه تـا مرتبـه يک انجام داده‌اند، در حالي كه در ايـن مقالـه تـابع فصـل مشترک دو محيط به شكل كلي سـري فوريـه بسـط داده شده و ضرايب بازتاب تا مرتبـه ۳ بـه صـورت تحليلـي بـه دسـت آمـده‌انـد. ضـرايب بازتـاب تـابعي از زاويـه تـابش، فركانس موج ورودي، تموج مـرز و خـواص ارتجـاعي نـيم فضاها است. هم چنين ضرايب بـه طـور عـددي و تئـوري براي مرزي با معادله

$$z = \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n e^{inpx} + \zeta_{-n} e^{-inpx})$$

(به شكل ۱ رجوع شود)، مورد بحث قرار مي‌گيـرد كـه در آن ζ_n و ζ_{-n} ضـرايب سـري فوريـه، p عـدد موج، $i=\sqrt{-1}$ و n مرتبـه بسـط فوريـه اسـت. در ايـن مقاله دامنه هاي امواج بازتابي، انكساري و پراشي بر حسب دامنه موج ورودي به صورت تحليلي تا n برابر ۳ به دست مي آيد. محاسبات عددي مربوط نيز انجام شده و نتايج آن به صورت گراف ارائه مي گردد.

معادلات اساسی

بر اساس قانون هوك، اگر تنش هاي وارده بر محـيط الاستيـك، τ_{ij}، كوچـك باشنـد، كرنـش هـاي ناشـي از آن ها، ε_{ij}، رابطـه خطي با اين تنش ها دارند. در اين

حالت، رابطه تنش-كرنش به صورت زير نوشته مي‌شود:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \qquad i,j,k,l = 1,2,3 \tag{۱}$$

معادله فوق به قانون عموميت داده شده هوك معروف است كه در آن ε_{kl} تانسور كرنش خطي است كه توسط مشتقات پاره‌اي ميدان جابجايي، $\mathbf{u}$، تعريف مي‌شود:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \tag{۲}$$

C_{ijkl}، بيانگر تانسور ضرايب الاستيك است. در حالت كلي، τ_{ij} و ε_{kl} داراي ۹ عضو و بنابراين تانسور مرتبه ۴ رابطه (۱)، C_{ijkl}، داراي ۸۱ عضو جداگانه است. ولي به دليل تقارن تانسورهاي تنش و كرنش و با فرض وجود تابع انرژي كرنشي، تعداد اعضاي ماتريس ضرايب به ۲۱ عضو جداگانه كاهش مي‌يابد.

داراي تقارن محوري باشد محيط ايزوتروپ جانبي ناميده مي‌شود. در اين حالت، مواد نسبت به يك محور خاص متقارن بوده و خصوصيات مكانيكي آن ها در تمام جهات در صفحه عمود بر اين محور يكسان هستند، ولي خواص مكانيكي در اين صفحه با اين خواص در راستاي محور تقارن متفاوت مي باشند. مواد ايزوتروپ جانبي در صفحه عمود بر محور تقارن داراي خاصيت همساني مي‌باشند. تانسور ضرايب الاستيك براي حالت ايزوتروپ جانبي به شكل زير در مي‌آيد:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} \end{bmatrix} \tag{۳}$$

و $C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2$.

همان گونه كه در روابط اخير ملاحظه مي‌شود تنها ۵ ضريب ارتجاعي مستقل از هم در حالت ايزوتروپ جانبي وجود دارد. در عمل رابطه تنش-كرنش بر حسب مدول يانگ، نسبت پوآسون و مدول برشي تعريف مي‌شود. بدين منظور، اين ضرايب ارتجاعي برحسب ۵ ثابت مستقل E_x، E_z، υ_x، υ_z و μ_z كه توسط لخنيتسكي [۲۰] معرفي شده‌اند، مشخص مي‌شوند:

- E_x و E_z، به ترتيب مدول يانگ در صفحه ايزوتروپ جانبي و در جهت عمود بر آن، يعني در راستاي محور تقارن z هستند.
- υ_x، ثابت پوآسون بيانگر پاسخ كرنشي فشاري يا كششي در يك امتداد در صفحه ايزوتروپ به كشش يا فشار در امتداد عمود بر آن در همان صفحه است و به همين ترتيب، υ_z نشان‌دهنده پاسخ كرنش جانبي در صفحات عمود بر صفحه ايزوتروپ به كرنش محوري در صفحه ايزوتروپ مي‌باشد.
- μ_z، مدول برشي سطوح عمود بر سطوح ايزوتروپ جانبي است. مدول برشي در صفحات موازي با سطوح ايزوتروپ به ثابتهاي مذكور در بالا مطابق رابطه $\mu_x = E_x/2(1+\upsilon_x)$ بستگي دارد.

با معرفي متغير جديد λ، روابط بين ثوابت C_{ijkl} و مهندسي به شكل ساده زير نشان داده مي‌شوند:

$$C_{1111} = \frac{E_x(\eta - \upsilon_z^2)}{\lambda(1+\upsilon_x)}, C_{1122} = \frac{E_x(\eta\upsilon_x + \upsilon_z^2)}{\lambda(1+\upsilon_x)}, C_{1212} = \mu_x,$$
$$C_{1133} = \frac{E_x\upsilon_z}{\lambda}, C_{3333} = \frac{E_x(1-\upsilon_x)}{\lambda}, C_{1313} = \mu_z \tag{۴}$$

كه در آن $\eta = E_x/E_z$ و $\lambda = \eta(1-\upsilon_x) - 2\upsilon_z^2$ [لؤلؤيي، ۲۱].

معادلات حاكم بر انتشار آشفتگي‌هاي كوچك در محيط ارتجاعي توسط معادله زير بيان مي‌شود:

$$\nabla.\boldsymbol{\tau} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{۵}$$

كه در آن $\nabla.\boldsymbol{\tau}$، ديورژانس تانسور تنش و ρ چگالي محيط مي‌باشند. مؤلفه‌هاي بردار جا به جايي به صورت $\mathbf{u} = (u,v,w)$ در نظر گرفته شده است. لذا معادله (۵) به صورت زير بازنويسي مي‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = \rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} = \rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \tag{۶}$$

براي امواج تخت SH كه در صفحه $x-z$ انتشار مي‌يابند، جا به جايي ذرات تنها يك مؤلفه در امتداد y دارد. به عبارت ديگر، $u = w = 0$ و $v = v(x,z,t)$ هستند. بنابراين، مجموعه معادلات (۶) به يك معادله كاهش پيدا مي نمايد:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (۷)$$

مؤلفه‌هاي غير صفر تنش با استفاده از روابط (۱)، (۳) و (۴) به صورت زير بر حسب تغيير مكان $\mathbf{u}$ بيان مي‌شوند:

$$\tau_{yx}=\mu_x\frac{\partial v}{\partial x}\ ;\quad \tau_{yz}=\mu_z\frac{\partial v}{\partial z} \quad (۸)$$

با جايگزيني معادلات (۸) در معادله (۷)، معادله زير براي جا به جايي ذرات محيط بر اثر انتشار موج SH به دست مي‌آيد:

$$\mu_x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\mu_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (۹)$$

معادله فصل مشترك موج دار بين دو نيم فضاي ايزوتروپ جانبي با خواص ارتجاعي متفاوت به صورت زير نوشته مي‌شود:

$$z=\zeta(x) \quad (۱۰)$$

كه در آن ζ مستقل از y در نظر گرفته شده است. محورهاي x و y روي سطح افقي و محور z در راستاي عمودي به طرف پايين اختيار شده‌اند (شكل ۱). M_1 نيم فضاي بالايي در محدوده $-\infty<z\le\zeta(x)$ و M_2 نيم فضاي پاييني در محدوده $\zeta(x)\le z<\infty$ است. از آنجايي كه هر تابع با استفاده از سري فوريه قابل بيان به شكل تناوبي (با پريود محدود يا نامحدود) است، تابع $\zeta(x)$ را به صورت سري مختلط زير نوشته مي شود:

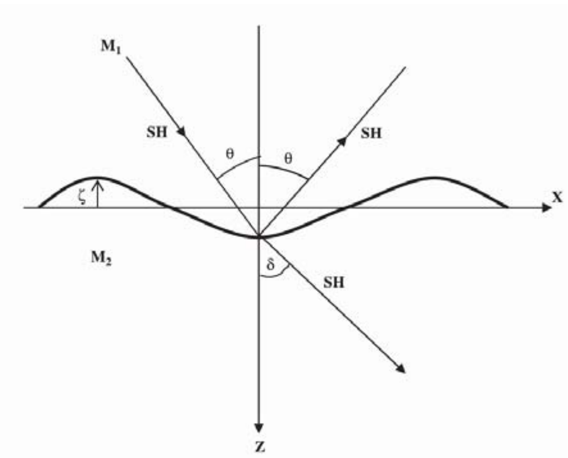
$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\zeta_n e^{inpx}+\zeta_{-n}e^{-inpx}) \quad (۱۱)$$

كه در آن ζ_n و ζ_{-n} ضرايب بسط فوريه، p عدد موج، n مرتبه بسط اين سري و $i=\sqrt{-1}$ هستند. با تعريف ثابتهاي d، c_n و s_n به صورت زير:

$$\zeta_1=\zeta_{-1}=\frac{d}{2},\quad \zeta_{\pm n}=\frac{(c_n\mp is_n)}{2},\quad n=2,3,4,\ldots \quad (۱۲)$$

معادله (۱۱) به شكل (۱۳) نوشته مي‌شود:

$$\begin{aligned}\zeta&=d\cos(px)+c_2\cos(2px)+s_2\sin(2px)\\&\cdots+c_n\cos(npx)+s_n\sin(npx)+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos npx+\sum_{n=2}^{\infty}s_n\sin npx\end{aligned} \quad (۱۳)$$



شكل ۱: هندسه فصل مشترك موج دار.

اگر فصل مشترك موج دار تنها با جمله اول كسينوسي نشان داده شود، $\zeta=d\cos(px)$، آنگاه طول موج فصل مشترك برابر $\frac{2\pi}{p}$ و دامنه تموج d مي‌باشند.

جواب مسئله

معادله انتشار موج SH در محيط $M_m(m=1,2)$ توسط رابطه زير داده مي‌شود:

$$\mu_x\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\mu_z\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}=\rho_1\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \quad (۱۴\text{- الف})$$

$$\mu'_x\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\mu'_z\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}=\rho_2\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \quad (۱۴\text{- ب})$$

كه در آن v_m مؤلفه جا به جايي در امتداد y در محيط M_m است. مدول برشي سطوح موازي و عمود بر سطح ايزوتروپ جانبي در محيط اول به ترتيب با μ_x و μ_z و در محيط دوم با μ'_x و μ'_z نشان داده شده‌اند. حل معادله (۱۴) در فضاي فركانسي موج تخت SH مي‌باشد كه در صفحه $x-z$ منتشر مي‌شود. معادله اين موج در حالتي كه انتشار موج در راستاي مثبت محورهاي x و z باشد به صورت زير است:

$$v_m(x,z,t)=A\exp\{-i(k_x x+k_z z-\omega t)\},\ ;m=1,2 \quad (۱۵)$$

كه در آن، A دامنه موج SH، k_x و k_z عدد موج در راستاي محورهاي x و z هستند. k_z براي محيط اول با $q=k_x\sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_z}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)}$ و در محيط دوم با $r=k_x\sqrt{\frac{\mu'_x}{\mu'_z}\left(\frac{1}{\sin^2\delta}-1\right)}$ نشان داده مي‌شوند كه در آن θ و δ به ترتيب زواياي تابش و شكست موج SH

بـوده و ω، فرکـانس زاويـه‌اي اسـت کـه مقـدار آن برابـر $\omega = k_x c$ مي باشد به طوري که c سرعت فاز است.

همان طور که گفته شـد، تمـوج فصـل مشـترك بـر بازتاب و شکست امواج SH اثرگذار است. ناهمواري فصـل مشترك دو محيط باعث مـي‌شـود کـه مـوج SH تابشـي علاوه بر امواج بازتابي و انکساري معمول، به امواج بازتابي و انکساري پراشي تبديل شـود [آسـانو، ۱۲]. جـا بـه جـايي ذرات در محـيط اول ناشـي از تـابش و بازتـاب معمـولي موج SH توسط رابطه زير بيان مي‌شود:

$$v_1^{inci+reg\_refl} = \left\{Ae^{-iqz} + Be^{iqz}\right\} e^{-i\omega\left(\frac{x\sin\theta}{\beta_1}-t\right)} \qquad (۱۶)$$

که در آن A و B بـه ترتيـب دامنـه مـوج SH تابشـي و بازتابي معمولي هستند. β_1 سـرعت مـوج SH در محـيط اول است که از رابطه $\beta_1 = \sqrt{\mu_x / \rho_1}$ به دست مي‌آيد. بـه طور مشابه، جابه جايي در محيط دوم، M_2، ناشي از مـوج انکساري معمولي به صورت زير است:

$$v_2^{reg\_refr} = De^{-irz} e^{-i\omega\left(\frac{x\sin\delta}{\beta_2}-t\right)} \qquad (۱۷)$$

کــه در آن D دامنــه مــوج انکســاري معمــولي اســت و $\beta_2 = \sqrt{\frac{\mu'_x}{\rho_2}}$. مطابق قانون اسنل زاويـه شکسـت δ بـه صورت زير با زاويه تابش θ ارتباط دارد:

$$\frac{\sin\theta}{\beta_1} = \frac{\sin\delta}{\beta_2} = \frac{k_x}{\omega} \qquad (۱۸)$$

يادآوري مي‌شود که بر اساس قانون اسنل، مقدار k_x بـراي دو محيط يکسان است.

طيف مرتبه n امواج بازتابي پراشـي ناشـي از تمـوج فصل مشترك به صورت زير تعريف مي‌شود:

$$v_1^{ir\_refl} = B_n e^{iq_n z} \exp\left\{-i\omega\left((x\sin\theta_n)/\beta_1 - t\right)\right\} + B'_n e^{iq'_n z} \exp\left\{-i\omega\left((x\sin\theta'_n)/\beta_1 - t\right)\right\} \qquad (۱۹)$$

که در آن

$$q_n = k\sqrt{\mu_x\left(1/\sin^2\theta_n - 1\right)/\mu_z}$$

و

$$q'_n = k\sqrt{\mu_x\left(1/\sin^2\theta'_n - 1\right)/\mu_z}$$

B_n و B'_n دامنـه‌هـا و θ_n و θ'_n زوايـاي امـواج بازتـابي پراشي نسبت به محور z هستند. بـه طـور مشـابه، طيـف مرتبه n امـواج انکسـاري پراشـي ناشـي از تمـوج فصـل مشترك به صورت زير مي‌باشد:

$$v_2^{ir-refr} = D_n e^{-ir_n z} \exp\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\delta_n}{\beta_2} - t\right)\right\} + D'_n e^{-ir'_n z}\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\delta'_n}{\beta_2} - t\right)\right\} \qquad (۲۰)$$

که در آن

$$r_n = k\sqrt{\mu'_x\left(1/\sin^2\delta_n - 1\right)/\mu'_z}$$

و

$$r'_n = k\sqrt{\mu'_x\left(1/\sin^2\delta'_n - 1\right)/\mu'_z}$$

D_n، D'_n دامنـه‌هـا و δ_n و δ'_n زوايـاي امـواج انکسـاري پراشي نسبت بـه محـور z هسـتند. زوايـاي θ_n، θ'_n، δ_n و δ'_n توسط تئوري طيفي بـه صـورت زيـر بـا يـك ديگـر ارتباط دارند [آسانو، ۱۲]:

$$\sin\theta_n - \sin\theta = \frac{np\beta_1}{\omega}, \sin\theta'_n - \sin\theta = -\frac{np\beta_1}{\omega}, \quad \sin\delta_n - \sin\delta = \frac{np\beta_2}{\omega}, \sin\delta'_n - \sin\delta = -\frac{np\beta_2}{\omega} \qquad (۲۱)$$

بنابراين، جا به جـايي کـل v_1 در محـيط اول، M_1، برابـر مجموع جا به جايي‌هـاي ناشـي از امـواج تابشـي، بازتـابي معمولي و بازتابي پراشي در اين محيط است:

$$v_1 = \left\{Ae^{-iqz} + Be^{iqz}\right\}\exp\left[-i\omega\left(\frac{x\sin\theta}{\beta_1} - t\right)\right] + \sum_n B_n e^{iq_n z}\exp\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\theta_n}{\beta_1} - t\right)\right\} + \sum_n B'_n e^{iq'_n z}\exp\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\theta'_n}{\beta_1} - t\right)\right\} \qquad (۲۲)$$

بـه طـور مشـابه، جابجـايي کـل v_2 در محـيط پاييني M_2 برابر مجمـوع جابجـايي‌هـاي ناشـي از امـواج انکساري معمولي و انکساري پراشي است:

$$v_2 = De^{-irz}\exp\left[-i\omega\left(\frac{x\sin\delta}{\beta_2} - t\right)\right] + \sum_n D_n e^{-ir_n z}\exp\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\delta_n}{\beta_2} - t\right)\right\} + \sum_n D'_n e^{-ir'_n z}\exp\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\delta'_n}{\beta_2} - t\right)\right\} \qquad (۲۳)$$

دامنه‌هاي B_n، B'_n، D، D_n و D'_n با اسـتفاده از برقـراري شرايط مرزي بر حسب A تعيين مي‌شوند.

شرايط مرزي

كسينوس هاي هادي خطوط مماس و عمـود بـر هـر نقطه در فصـل مشـترك موجـدار $z=\zeta(x)$ بـه ترتيـب عبارتند از (شكل ۱):

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\zeta'^2(x)}},0,\frac{\zeta'(x)}{\sqrt{1+\zeta'^2(x)}}\right),\quad \left(\frac{-\zeta'(x)}{\sqrt{1+\zeta'^2(x)}},0,\frac{1}{\sqrt{1+\zeta'^2(x)}}\right), \tag{۲۴}$$

و بردار تنش در محيط M_m روي فصـل مشـترك عبـارت است از:

$$[\tau_{ij}]\begin{bmatrix}-\zeta'/\sqrt{1+\zeta'^2}\\ 0\\ 1/\sqrt{1+\zeta'^2}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta'^2}}(\tau_{yz}^m-\zeta'\tau_{yx}^m)$$

كه در آن ζ' مشتق ζ نسبت به x و انديس بالانهـاد m نشان دهنده شماره محيط است. در روش رايلي فـرض بـر اين است كه دامنه تمـوج فصـل مشـترك بـه حـد كـافي كوچك است، يعني دامنه تموج فصل مشـترك نسـبت بـه طول موج آن قابل اغماض است. شـرايط مـرزي در فصـل مشترك موج دار عبارتند از پيوستگي جا به جايي و تـنش كه از نظر رياضي به صورت زير بيان مي‌شوند:

$$z=\zeta(x),\quad \text{where}\ v_1=v_2 \tag{۲۵}$$

$$z=\zeta(x),\ \text{where}\ \tau_{yz}^1-\zeta'\tau_{yx}^1=\tau_{yz}^2-\zeta'\tau_{yx}^2 \tag{۲۶}$$

با بهره‌گيري از معادلات (۸)، مولفه‌هـاي تـنش موجـود در محيط M_1 عبارتند از:

$$\tau_{yx}^1=\mu_x\frac{\partial v_1}{\partial x}\ ;\quad \tau_{yz}^1=\mu_z\frac{\partial v_1}{\partial z} \tag{۲۷}$$

و در محيط M_2 عبارتند از:

$$\tau_{yx}^2=\mu'_x\frac{\partial v_2}{\partial x}\ ;\quad \tau_{yz}^2=\mu'_z\frac{\partial v_2}{\partial z} \tag{۲۸}$$

بـا اسـتفاده از معـادلات (۲۷) و (۲۸) در رابطـه (۲۶)، مي‌توان نوشت:

$$\mu_z\frac{\partial v_1}{\partial z}-\zeta'\mu_x\frac{\partial v_1}{\partial x}=\mu'_z\frac{\partial v_2}{\partial z}-\zeta'\mu'_x\frac{\partial v_2}{\partial x} \tag{۲۹}$$

با قرار دادن معادلات (۲۲) و (۲۳) در شرايط مـرزي (۲۵) و (۲۹) و ساده كردن نتايج به دست آمده، داريم:

$$\begin{aligned}&Ae^{-iq\zeta}+Be^{iq\zeta}+\\ &\sum_n\left\{B_ne^{iq_n\zeta}\,\mathbf{exp}(-inpx)+\sum_n B'_ne^{iq'_n\zeta}\,\mathbf{exp}(inpx)\right\}=\\ &De^{-ir\zeta}+\sum_n\left\{D_ne^{-ir_n\zeta}\,\mathbf{exp}(-inpx)+\sum_n D'_ne^{-ir'_n\zeta}\,\mathbf{exp}(inpx)\right\}\end{aligned} \tag{۳۰}$$

$$\begin{aligned}&A\{\mu_zq-\zeta'\mu_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1})\}e^{-iq\zeta}+B\{-\mu_zq-\zeta'\mu_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1})\}\\ &\times e^{iq\zeta}-\sum_n B_n\{\mu_zq_n+\zeta'\mu_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1}+np)\}e^{-inpx}e^{iq_n\zeta}\\ &-\sum_n B'_n\{\mu_zq'_n+\zeta'\mu_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1}-np)\}e^{inpx}e^{iq'_n\zeta}\\ &=D\{\mu'_zr-\zeta'\mu'_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1})\}e^{-ir\zeta}+\\ &\sum_n D_n\{\mu'_zr_n-\zeta'\mu'_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1}+np)\}e^{-inpx}e^{-ir_n\zeta}\\ &+\sum_n D'_n\{\mu'_zr'_n-\zeta'\mu'_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1}-np)\}e^{inpx}e^{-ir'_n\zeta}\end{aligned} \tag{۳۱}$$

معـادلات (۳۰) و (۳۱)، فرمـول بنـدي ضـرايب بازتاب و عبور بـراي هـر درجـه‌اي از تقريـب تمـوج فصـل مشترك را بيان مي‌كنند.

جواب براي تقريب اول

با اين فرض كه دامنه موج فصل مشترك $z=\zeta(x)$ خيلي كوچك است، و استفاده از تقريب درجه اول مي‌توان نوشت: $\exp(\pm iq\zeta)=1\pm iq\zeta$. با وارد كـردن معادلـه (۱۱) و استفاده از معادلات (۱۸) و (۲۱) در معادلات (۳۰) و (۳۱) و تقريـب فـوق از تمـوج مـي‌تـوان B و D را بـا جداسازي جملات مسـتقل از x و ζ بـر حسـب A بـه دست آورد:

$$A+B=D \tag{۳۲}$$

$$A\mu_zq-B\mu_zq=D\mu'_zr \tag{۳۳}$$

براي يافتن جـواب تقريـب اول از تمـوج بـراي B_n و D_n، ضرايب $\exp(-inpx)$ در دو طرف معادلات (۳۰) و (۳۱) مساوي هم قرار داده مي‌شوند:

$$B_n-D_n=i\zeta_{-n}\left[Aq-Bq-Dr\right] \tag{۳۴}$$

$$B_n\mu_zq_n+D_n\mu'_zr_n=i\zeta_{-n}\left\{(A+B)[np\mu_x\frac{\omega\sin\theta}{\beta_1}-q^2\mu_z]-D[np\mu'_x\frac{\omega\sin\theta}{\beta_1}-r^2\mu'_z]\right\} \tag{۳۵}$$

به طور مشابه، براي يافتن جواب تقريب اول از تمـوج B'_n و D'_n، ضرايب $\exp(inpx)$ در دو طـرف معادلـه مسـاوي هم قرار داده مي‌شوند:

$$B'_n - D'_n = i\zeta_n\left[Aq - Bq - Dr\right] \qquad (۳۶)$$

$$B'_n \mu_z q'_n + D'_n \mu'_z r'_n = i\,\zeta_{-n}\left\{(A+B)[np\,\mu_x \times \frac{\omega\sin\theta}{\beta_1} + q^2\mu_z] - D[np\,\mu'_x\,\frac{\omega\sin\theta}{\beta_1} + r^2\mu'_z]\right\} \qquad (۳۷)$$

با حل معادلات (۳۲) و (۳۳)، ضرایب بازتاب و عبور بر حسب دامنه موج ورودي به دست مي‌آيند:

$$B = A\,\frac{\mu_z q - \mu'_z r}{\mu_z q + \mu'_z r} \quad D = A\,\frac{2\mu_z q}{\mu_z q + \mu'_z r} \qquad (۳۸)$$

اين ضرايب مساوي ضرايب موجود براي فصل مشترك تخت بين دو محيط ايزوتروپ جانبي هستند. با حل معادلات (۳۴)، (۳۵)، (۳۶) و (۳۷) دامنه‌هاي امواج بازتابي و شكستي ناشي از تموج فصل مشترك دو محيط به دست مي‌آيند:

$$B_n = \frac{\Delta B_n}{\Delta_n},\; D_n = \frac{\Delta D_n}{\Delta_n},\; B'_n = \frac{\Delta B'_n}{\Delta'_n},\; D'_n = \frac{\Delta D'_n}{\Delta'_n} \qquad (۳۹)$$

كه در آن

$$\Delta_n = \gamma_1^n + \frac{\mu'_z\,\gamma_2^n}{\mu_z}, \quad \Delta'_n = \gamma_1'^n + \frac{\mu'_z\,\gamma_2'^n}{\mu_z}$$

$$\Delta B_n = i\,\zeta_{-n}k\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 + \frac{\mu_x np}{\mu_z k}] + (A-B) \times [\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2^n}{\mu_z}] + D\,[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\gamma_2^n\gamma_2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\mu'_x np}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta D_n = i\,\zeta_{-n}k\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 + \frac{\mu_x np}{\mu_z k}] + (A-B) \times [-\gamma_1\gamma_1^n] + D\,[\frac{\gamma_2^{2n}\mu'_z}{\mu_z} + \gamma_1^n\gamma_2 - \frac{\mu'_x np}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta B'_n = i\,\zeta_n k\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 - \frac{\mu_x np}{\mu_z k}] + (A-B) \times [\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2'^n}{\mu_z}] + D\,[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\gamma_2'^n\gamma_2\mu'_z}{\mu_z} + \frac{\mu'_x np}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta D'_n = i\,\zeta_n k\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 - \frac{\mu_x np}{\mu_z k}] + (A-B) \times [-\gamma_1\gamma_1'^n] + D\,[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} + \gamma_1'^n\gamma_2 + \frac{\mu'_x np}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\mu_x\left(1/\sin^2\theta - 1\right)/\mu_z},$$
$$\gamma_2 = \sqrt{\mu'_x\left(1/\sin^2\delta - 1\right)/\mu'_z},$$
$$\gamma_1^n = \sqrt{\mu_x\left(1/\sin^2\theta_n - 1\right)/\mu_z},$$
$$\gamma_1'^n = \sqrt{\mu_x\left(1/\sin^2\theta'_n - 1\right)/\mu_z},$$
$$\gamma_2^n = \sqrt{\mu'_x\left(1/\sin^2\delta_n - 1\right)/\mu'_z},$$
$$\gamma_2'^n = \sqrt{\mu'_x\left(1/\sin^2\delta'_n - 1\right)/\mu'_z}.$$

(۴۰)

روابط (۳۹) بيانگر ضرايب بازتاب و عبور براي تقريب درجه اول از تموج است.

جوابها به ازاي $n = 1, 2, 3$

همان طور كه قبلا نيز ذكر شد، با فرض اين كه

$$\zeta_{-n} = \zeta_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq 1 \\ d/2 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

معادله فصل مشترك موجدار به صورت $z = d\cos px$ است. در اين حالت، ضرايب بازتاب و شكست B_1، D_1، B'_1 و D'_1 براي تقريب درجه اول از فصل مشترك با قرار دادن $n = 1$ در معادلات (۳۹) بدست مي‌آيند:

$$B_1 = \frac{\Delta B_1}{\Delta_1},\; D_1 = \frac{\Delta D_1}{\Delta_1},\; B'_1 = \frac{\Delta B'_1}{\Delta'_1},\; D'_1 = \frac{\Delta D'_1}{\Delta'_1} \qquad (۴۱)$$

كه در آن

$$\Delta_1 = \gamma_1^1 + \frac{\mu'_z\,\gamma_2^1}{\mu_z}, \quad \Delta'_1 = \gamma_1'^1 + \frac{\mu'_z\,\gamma_2'^1}{\mu_z}$$

$$\Delta B_1 = i\,\frac{kd}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 + \frac{\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B) \times [\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2^1}{\mu_z}] + D\,[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\gamma_2^1\gamma_2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta D_1 = i\,\frac{kd}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 + \frac{\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B) \times [-\gamma_1\gamma_1^1] + D\,[\frac{(\gamma_2^1)^2\mu'_z}{\mu_z} + \gamma_1^1\gamma_2 - \frac{\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta B'_1 = i\,\frac{kd}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 - \frac{\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B) \times [\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2'^1}{\mu_z}] + D\,[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\gamma_2'^1\gamma_2\mu'_z}{\mu_z} + \frac{\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta D'_1 = i\,\frac{kd}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 - \frac{\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B) \times [-\gamma_1\gamma_1'^1] + D\,[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} + \gamma_1'^1\gamma_2 + \frac{\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

(۴۲)

معادله (۱۱) يا معادل آن معادلات (۱۲) و (۱۳) شكل فصل مشترك دو محيط را در اختيار قرار مي‌دهند. اگر دو نيم‌فضا ايزوتروپ كامل باشند، يعني $\mu_x = \mu_z = \mu_1$ و $\mu'_x = \mu'_z = \mu_2$، در اين صورت با فرض شرايط بالا و در نظر گرفتن تابش عمودي داريم:

$$\begin{cases}\theta = \delta = 0 \\ \zeta_1 = \zeta_{-1} = d/2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos\theta_1 = \cos\theta'_1 \\ \cos\delta_1 = \cos\delta'_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}B_1 = B'_1 \\ D_1 = D'_1\end{cases}$$

كه در آن B_1 و D_1 از روابط زير به دست مي‌آيند:

$$B_1 - D_1 = i\,\zeta_1 \omega \left[\frac{A-B}{\beta_1} - \frac{D}{\beta_2}\right],$$

$$B_1\mu_1 q_1 + D_1\mu_2 r_1 = i\,\zeta_1\omega^2 \left\{-\mu_1 \frac{A+B}{\beta_1^2} + \mu_2 \frac{D}{\beta_2^2}\right\}$$

اين روابط منطبق بر روابطي هستند كه آسانو [۱۲] براي دو نيم‌فضاي ايزوتروپ با فصل مشترك ناهموار با فرض تقريب اول به دست آورد. بدين ترتيب نشان داده شده است كه جواب به دست آمده به صورت تحليلي درست مي‌باشد. براي نشان دادن صحت محاسبات عددي در جدول (۱)، مقادير B_1 و D_1 از روابط بالا براي تقريب اول با مقادير مشابه به دست آمده توسط آسانو با تقريب درجه دوم، $\exp(\pm iq\zeta) = 1 \pm iq\zeta - iq^2\frac{\zeta^2}{2!}$، مقايسه شده اند. آشكار است كه نتايج به دست آمده بسيار نزديك به مقادير آسانو هستند و اختلاف ناچيز بين آن ها ناشي از تفاوت در تقريب هاي در نظر گرفته شده براي فصل مشترك است. اگر در معادلات ۳۴ الي ۳۷، n برابر ۲ در نظر گرفته شود، معادله فصل مشترك به صورت زير بازنويسي مي‌شود:

$$\zeta = d\cos(px) + c_2\cos(2px) + s_2\sin(2px) \quad (۴۳)$$

كه در آن $\zeta_1 = \zeta_{-1} = d/2$، $\zeta_2 = (c_2 - is_2)/2$ و $\zeta_{-2} = (c_2 + is_2)/2$. براي $n = 2$ ضرايب بازتاب و شكست پراشي در تقريب درجه اول از فصل مشترك عبارت از B_1، B_2، D_1، D_2، B'_1، B'_2، D'_1 و D'_2 بوده كه در آن B_1، D_1، B'_1 و D'_1 از معادلات (۴۱) و مابقي از معادلات زير به دست مي‌آيند:

$$B_2 = \frac{\Delta B_2}{\Delta_2},\ D_2 = \frac{\Delta D_2}{\Delta_2},\ B'_2 = \frac{\Delta B'_2}{\Delta'_2},\ D'_2 = \frac{\Delta D'_2}{\Delta'_2} \quad (۴۴)$$

در اين جا

$$\Delta_2 = \gamma_1^2 + \frac{\mu'_z\gamma_2^2}{\mu_z} \quad و \quad \Delta'_2 = \gamma_1'^2 + \frac{\mu'_z\gamma_2'^2}{\mu_z}$$

$$\Delta B_2 = i\,\frac{k(c_2+is_2)}{2}\Big\{(A+B)[-\gamma_1^2 + \frac{2\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B)[\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2^2}{\mu_z}] + D[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\gamma_2^2\gamma_2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{2\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\Big\}$$

$$\Delta D_2 = i\,\frac{k(c_2+is_2)}{2}\Big\{(A+B)[-\gamma_1^2 + \frac{2\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B)[-\gamma_1\gamma_1^2] + D[\frac{(\gamma_2^2)^2\mu'_z}{\mu_z} + \gamma_1^2\gamma_2 - \frac{2\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\Big\}$$

$$\Delta B'_2 = i\,\frac{k(c_2-is_2)}{2}\Big\{(A+B)[-\gamma_1^2 - \frac{2\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B)[\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2'^2}{\mu_z}] + D[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\gamma_2'^2\gamma_2\mu'_z}{\mu_z} + \frac{2\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\Big\}$$

$$\Delta D'_2 = i\,\frac{k(c_2-is_2)}{2}\Big\{(A+B)[-\gamma_1^2 - \frac{2\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B)[-\gamma_1\gamma_1'^2] + D[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} + \gamma_1'^2\gamma_2 + \frac{2\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\Big\}$$

(۴۵)

به طور مشابه، در حالتي كه $n = 3$ در نظر گرفته شود، معادله فصل مشترك به صورت زير بازنويسي مي‌شود:

$$\zeta = d\cos(px) + c_2\cos(2px) + s_2\sin(2px) + c_3\cos(3px) + s_3\sin(3px)$$

كه در آن $\zeta_{\pm 3} = (c_3 \mp is_3)/2$. براي $n = 3$، ضرايب بازتاب و شكست پراشي، علاوه بر ضرايب موجود در $n = 2$، ضرايب B_3، D_3، B'_3 و D'_3 را نيز شامل مي‌شود و مقادير آنها، مشابه حالت $n = 2$، از معادلات (۳۹) به دست مي‌آيند.

نتايج عددی

براي مطالعه اثر تموج فصل مشترك، ضرايب بازتاب و شكست به طور عددي بر حسب زواياي تابش مختلف محاسبه و رسم مي‌شوند. به منظور محاسبات عددي، مقادير زير براي مشخصه هاي مربوطه در نظر گرفته شده است:

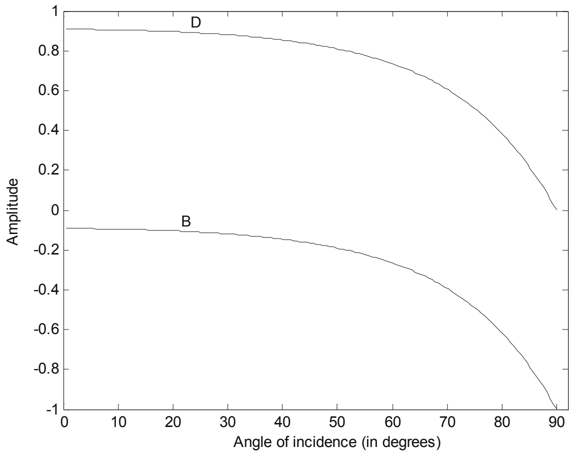
- در نيم‌فضاي M_1: $\rho_1 = 2.2\times10^3\ kg/m^3$، $\mu_z = 2.68\times10^9\ N/m^2$، $\mu_x = 5.68\times10^9\ N/m^2$.
- در نيم‌فضاي M_2: $\rho_2 = 2.9\times10^3\ kg/m^3$، $\mu'_z = 2.95\times10^9\ N/m^2$، $\mu'_x = 4.88\times10^9\ N/m^2$.

با این فرض که $d\omega/\beta_1 = 0.1$، مقدار pd برابر 0.001 و 0.0001 در نظر گرفته می‌شود. $d\omega/\beta_1$ مشخصه فرکانسی نامیده می‌شود محاسبات برای به دست آوردن ضرایب بازتاب و شکست در $n = 1,2,3$ صورت گرفته است.

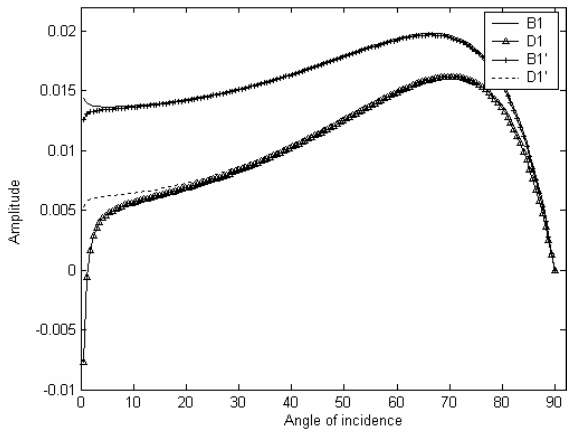
جدول ۱: مقایسه مقادیر B_1 و D_1 حاصل از تقریب اول با نتایج به دست آمده توسط آسانو از تقریب دوم برای دو نیم‌فضای ایزوتروپ با فصل مشترک ناهموار. B_{1A} و D_{1A} نشان‌دهنده مقادیر به دست آمده توسط آسانو (۱۹۶۰) هستند. مشخصه های مورد نیاز برای محاسبه این ضرایب همان مشخصه های پیش‌فرض در مقاله آسانو می باشند.

B_1	B_{1A}	D_1	D_{1A}
0.043	0.042	0.017	0.019
0.043	0.042	0.018	0.019
0.043	0.041	0.018	0.019
0.041	0.039	0.020	0.022
0.039	0.036	0.021	0.025
0.034	0.020	0.026	0.040
0.027	0.031	0.036	0.036
0.038	0.040	0.031	0.032
0.046	0.046	0.025	0.026
0.051	0.051	0.020	0.021
0.058	0.057	0.009	0.010
0.059	0.059	0.005	0.007
0.061	0.060	0.001	0.003
0.061	0.061	0.004	0.002
0.062	0.061	0.011	0.010
0.054	0.054	0.012	0.011
0.052	0.051	0.013	0.012
0.049	0.049	0.014	0.014
0.049	0.049	0.015	0.014
0.048	0.048	0.015	0.014
0.048	0.048	0.015	0.014
0.048	0.048	0.015	0.015
0.046	0.046	0.016	0.016
0.045	0.045	0.017	0.017
0.042	0.042	0.019	0.019
0.041	0.041	0.019	0.019

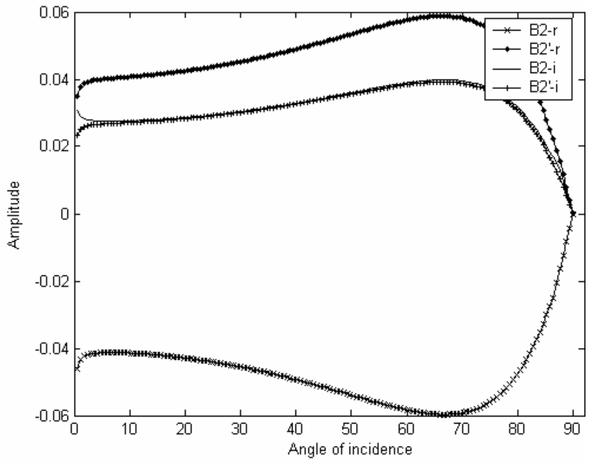
شکل (۲)، تغییرات ضرایب بازتاب و شکست معمولی، B و D بر حسب زاویه تابش، θ، در فصل مشترک بین نیم‌فضاهای M_1 و M_2 را نشان می‌دهد. با افزایش زاویه تابش، مقدار مطلق دامنه ضریب بازتاب B به طور نمایی افزایش می‌یابد به طوری که در $\theta = 90^0$، تابش مماس با فصل مشترک، به بیشینه مقدار خود می‌رسد. بر عکس، ضریب شکست D با افزایش زاویه تابش کاهش یافته تا به کمترین مقدار خود در $\theta = 90^0$ برسد. شکل (۳)، تغییرات ضرایب بازتاب و شکست پراشی B_1، D_1، B_1' و D_1' را بر حسب θ نشان می‌دهد. تغییرات دامنه این ضرایب نشان می‌دهد که تمامی آنها تقریباً پس از $\theta = 3^0$ روند صعودی به خود گرفته تا این که در حدود $\theta = 70^0$ به مقدار بیشینه خود رسیده و پس از آن کاهش می‌یابند. برای $n = 2,3$ نیز که در شکل های (۴) تا (۷) رسم شده‌اند، تقریباً همان روند مشاهده می‌شود، با این تفاوت که در اندیس های بالاتر دامنه ضرایب کمتر است. در این شکل ها دامنه‌های قسمت های حقیقی ضرایب بازتاب و شکست B_2، D_2، B_3 و D_3 نسبت به قسمت های موهومی آنها حالت تقارن دارند. مقایسه تغییرات دامنه امواج بازتابی و انکساری معمولی (شکل ۲) با تغییرات دامنه امواج پراشی (شکل های ۳ الی ۷) بر حسب زاویه تابش به وضوح نشان می‌دهد که بخش اعظمی از انرژی تبدیل شده موج ورودی، سهم امواج بازتابی و انکساری معمولی است. دامنه امواج بازتابی و انکساری معمولی بین صفر تا یك در نوسان است در حالی که این تغییرات برای امواج پراشی حداکثر بین صفر تا ۰/۰۸ است.



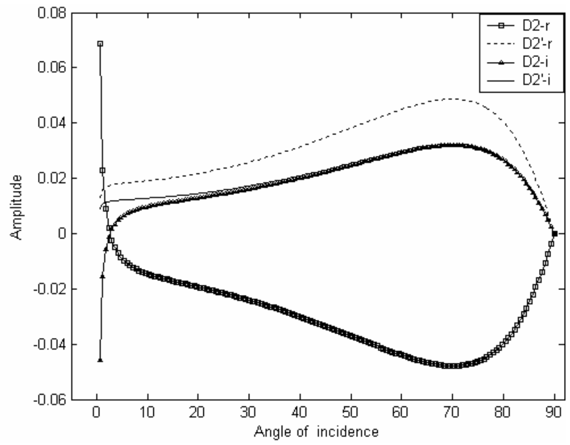
شکل ۲ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست معمولی، B و D بر حسب زاویه تابش ($pd = 0.0001$).



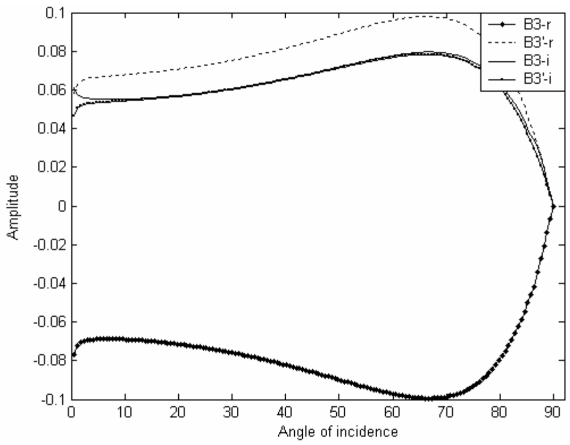
شکل ۳: تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی، B_1, D_1, B_1', D_1' بر حسب زاویه تابش ($pd = 0.0001$).



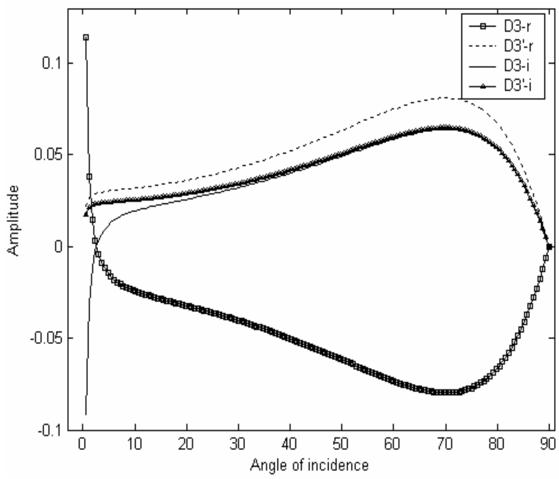
شکل ۴ :تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی حقیقی و موهومی، B_2, B_2' بر حسب زاویه تابش $(pd = 0.0001)$.



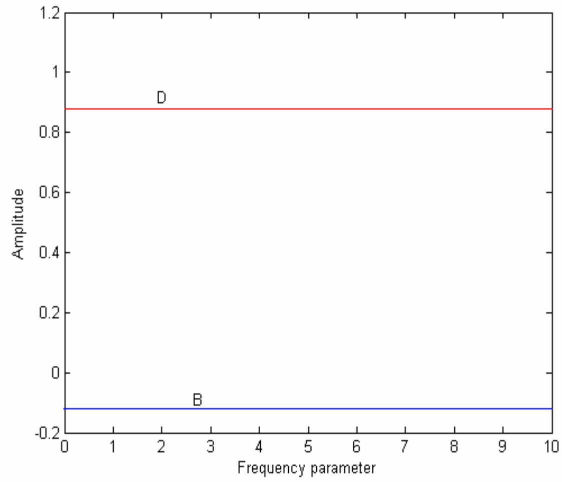
شکل ۵ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی حقیقی و موهومی، D_2, D_2' بر حسب زاویه تابش $(pd = 0.0001)$.



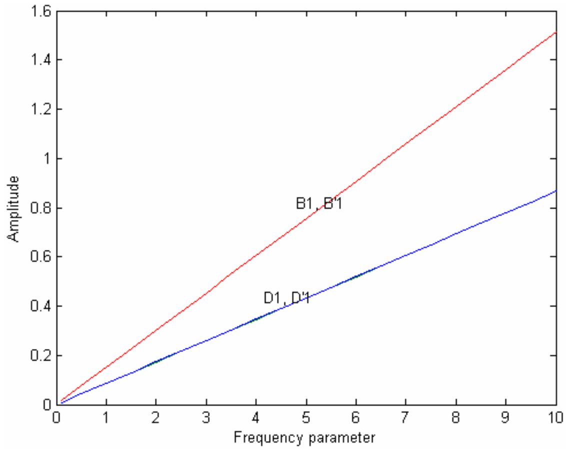
شکل ۶ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی حقیقی و موهومی، B_3, B_3' بر حسب زاویه تابش $(pd = 0.0001)$.



شکل ۷ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی حقیقی و موهومی، D_3, D_3' بر حسب زاویه تابش $(pd = 0.0001)$.

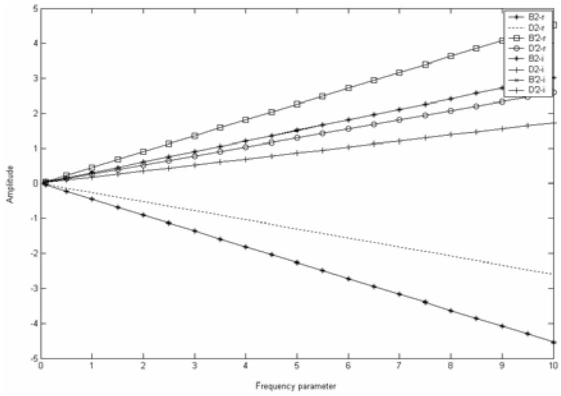


شکل ۸ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست عادی، B و D بر حسب مشخصه فرکانس $(pd = 0.0001)$.

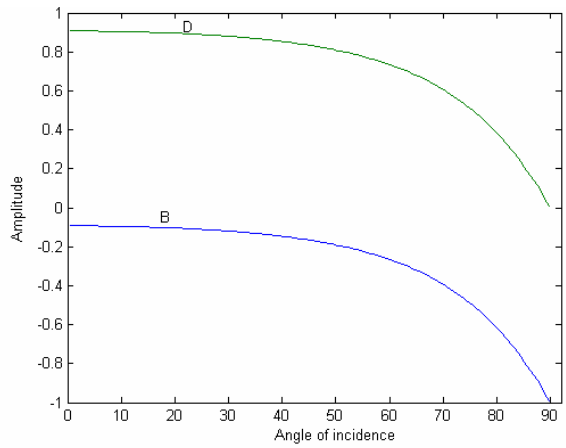


شکل ۹ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی، B_1, D_1, B_1', D_1' بر حسب مشخصه فرکانس $(pd = 0.0001)$.

شــكل هــاي (۸)، (۹) و (۱۰)، تغييــرات ضــرائب بازتاب و شكست بر حسب مشخصه فركانسي $\omega d / \beta_1$ در حالتي كه $n = 1,2$ و $\theta = 30^0$ است را نشان مـي‌دهـد. آشكار است كه ضرائب بازتاب و شكســت عــادي، B و D در فصـل مشــترك تخـت بـين M_1 و M_2 بـه مشخصه فركانسي بستگي ندارنـد (شـكل ۸). ولـي، مقـادير مطلـق ضرايب بازتاب و شكست پراشي با افزايش فركانس به طور خطي افزايش مي‌يابد.

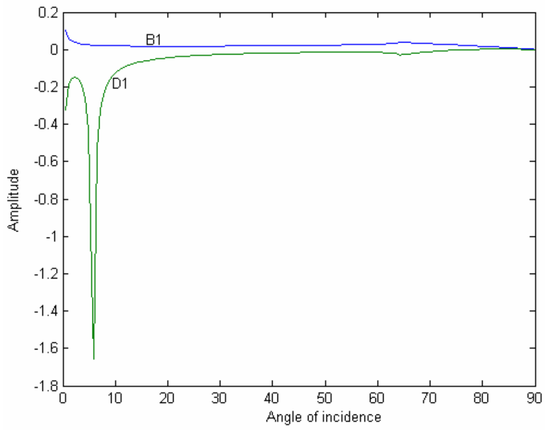


شكل ۱۰: تغييرات دامنه‌های حقيقی و موهومی ضرايب بازتاب و شكست پراشی، B_2, D_2, B_2', D_2' بر حسب مشخصه فركانس ($pd = 0.0001$).

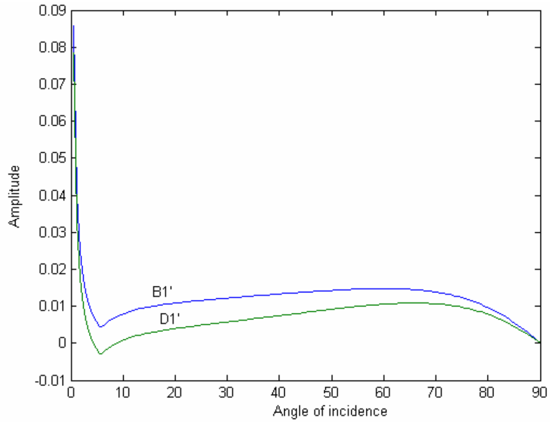


شكل ۱۱: تغييرات دامنه‌های بازتاب و شكست معمول، B و D بر حسب زاويه تابش ($pd = 0.01$).

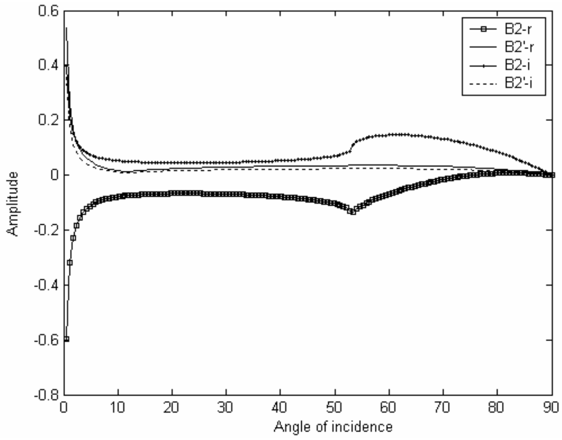
شكل هاي (۱۱) الي (۱۵)، تغييـرات دامنـه ضـرايب بازتـاب و شكسـت بـراي تقريـب درجـه اول از تمـوج بـا مشخصه تموج متفاوت $pd = 0.01$ را نشان مي‌دهند. بـه دليل عدم وابستگي ضرايب بازتاب و شكسـت معمـولي B و D به مشخصه تموج، تغيير اين مشخصه هيچ تأثيري بر روي ضرايب B و D نـدارد. در حـالتي كـه $pd = 0.01$ است، عدد موج معادله فصل مشترك، p ، بزرگتر مي‌شود، در نتيجه، طول موج فصل مشترك كاهش مي‌يابد كه ايـن با فرض اوليه رايلي، مبني بر به حـد كـافي كوچـك بـودن تموج فصل مشترك مغايرت دارد و شكل هـاي (۱۱) الـي (۱۵) تغييرات ضرايب بازتاب و شكست پراشي بـر حسـب زاويه تابش θ را براي حالتي كه $pd = 0.01$ است نشـان مي دهد.



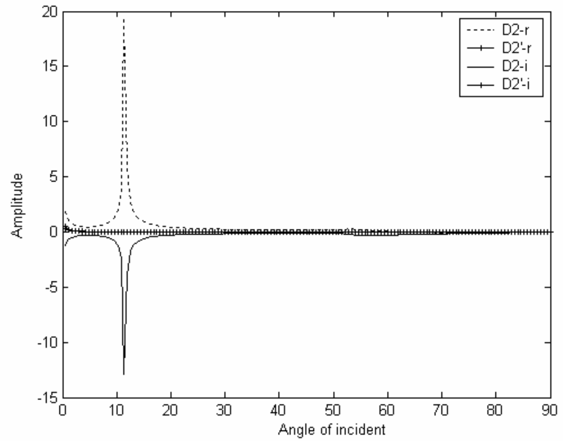
شكل ۱۲: تغييرات دامنه‌های بازتاب و شكست پراشی، B_1, D_1 بر حسب زاويه تابش ($pd = 0.01$).



شكل ۱۳ : تغييرات دامنه‌های بازتاب و شكست پراشی، B_1', D_1' بر حسب زاويه تابش ($pd = 0.01$).



شكل ۱۴: تغييرات دامنه‌های بازتاب و شكست پراشی حقيقی و موهومی B_2, B_2' بر حسب زاويه تابش ($pd = 0.01$).



شکل ۱۵: تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی حقیقی و موهومی، D_2, D_2' بر حسب زاویه تابش ($pd = 0.01$)،

نتیجه گیری

از روش تقریب رايلي براي پيدا كردن ضرايب بازتاب و شكست موج تخت تابشي *SH* در فصل مشترك موج دار بين دو نيم‌فضاي ايزوتروپ جانبي استفاده شده است. ضرايب بازتاب و شكست براي مرز تخت و هم چنين تقريب درجه اول از تموج فصل مشترك به دست مي‌آيند. نتايج به دست آمده نشان مي‌دهند كه اين ضرائب به زاويه تابش، فركانس موج، تموج فصل مشترك و خواص الاستيكي محيط بستگي دارند. محاسبات عددي نشان مي‌دهند كه اين ضرائب قوياً تحت تأثير تموج فصل مشترك مي باشند. در صورتي كه فصل مشترك تخت باشد، فركانس موج تابشي هيچ تأثيري بر ضرائب بازتاب و شكست ندارد، ليكن اين ضرائب براي تقريب درجه اول از تموج، شديداً تحت تأثير مشخصه فركانسي قرار دارند.

مراجع

1 - Ewing, W. M., Jardetsky, W. S. and Press, F. (1957). *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill Pub. Co., New York.

2 - Aki, K. and Richards, P. G. (2002). *Quantitative Seismology*, 2nd. Ed. University Science Book, New York,

3 - Sheriff, R. E. and Geldart, P. L. (1995). *Exploration Seismology*. Cambridge University Press, Cambridge.

4 - Lay, T. and Wallace, T. C. (1995). *Modern Global Seismology*, International Geophysics Series, Academic Press, New York.

5 - Udias, A. (1999*). Principles of Seismology*, Cambridge University Press, Cambridge.

6 - Chaudhary, S., Kaushik, V. P. and Tomar, S. K. (2004), "Transmission of plane SH-wave through a self-reinforced elastic slab sandwiched between two anisotropic inhomogeneous elastic solid half-spaces." *Int. J. Applied Mech. & Engng,* Vol. 9, No. 1, PP. 131-146.

7 - Tomar, S. K. and Garg, M. (2005), "Reflection and transmission of waves from a plane interface between two microstretch solid half-spaces." *Int. J. Engineering Science*, Vol. 43, No. 1-2, PP. 139-169.

8 - Singh, J. and Tomar, S. K. (2006), "Reflection and transmission of transverse waves at a plane interface between two different porous elastic solid half-spaces." *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 176, No. 1, PP. 364-378.

9 - Adams, W. M. and Ghung-Po, C. (1964). "Wave propagation phenomena at an irregular infinite interface: Part I: Theory." *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 54, No. 6, Part B, PP. 2209-2222.

10 - Gupta, S. (1987). "Reflection and transmission of SH wave in laterally and vertically heterogeneous media at an irregular boundary." *Geophysical Transactions,* Vol. 33, No. 2, PP. 89-111.

11 - Rayleigh, L. (1893). "On the reflection of sound or light from a corrugated surface." *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.,* PP. 690-691.

12 - Asano, S. (1960). "Reflection and refraction of elastic waves at a corrugated boundary surface: Part I: The case of incidence of SH-wave." *Bulletin of the Earthquake Research Institute,* Vol. 38, No. 2, PP. 177–197.

13 - Asano, S. (1966). "Reflection and refraction of elastic waves at a corrugated interface." *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 56, No. 1, PP. 201–221.

14 - Asano, S. (1961). "Reflection and refraction of elastic waves at a corrugated boundary surface: Part II." *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, Vol. 39, No. 3, PP. 367–466.

15 - Abubakar, I. (1962). "Scattering of plane elastic waves at rough surfaces." *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 58, PP. 136–157.

16 - Dunkin, J. W. and Eringen, A. C. (1962). "Reflection of elastic waves from the wavy boundary of a half-space." *Proceedings of the 4th US National Congress of Applied Mechanics*, ASME Publication, PP. 143–160.

17 - Rice, O. (1951). "Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces." *Communication of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 4, PP. 351–378.

18 - Tomar, S. K. and Saini, S. L. (1997). "Reflection and refraction of SH-waves at a corrugated interface between two-dimensional transversely isotropic half spaces." *Journal of Physics of the Earth*, Vol. 45, PP. 347–362.

19 - Tomar, S. K., Kumar, R. and Chopra, A. (2000). "Reflection and refraction of SH-waves at a corrugated interface between transversely isotropic and visco-elastic solid half spaces." *Acta Geophysica Polonica,* Vol. 50, PP. 231–249.

20 - Lekhnitskii, S. G. (1963). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Holden-Day, San Francisco.

21 - Loloi, M. (2000). "Boundary integral equation solution of three-dimensional elastostatic problems in transversely isotropic solids using closed-form displacement fundamental solutions." *Int. J. Numer. Meth. Engng,* Vol. 48, PP. 823-842.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده درمتن

1 - Microstrech Solid